

**ПАРОВЫЕ КОТЛЫ, ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ТОПЛИВО,
ГОРЕЛОЧНЫЕ УСТРОЙСТВА
И ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ КОТЛОВ**

**ПРИМЕНЕНИЕ СМЕШАННОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РАСЧЕТА РАДИАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОГО
ТЕПЛООБМЕНА В ПЕЧИ С ГОРЕЛКАМИ**

© 2025 г. Jaafar Albadr^{a, *}, Mofdi El-Amrani^b, Mohammed Seaid^a

^aDepartment of Engineering, University of Durham, South Road, Durham, DH1 3LE UK

^bDepartamento de Matemática Aplicada, Universidad Rey Juan Carlos, Mostoles, Madrid, 28933 Spain

*e-mail: jnalbader@yahoo.com

Поступила в редакцию 19.08.2023 г.

После доработки 19.08.2023 г.

Принята к публикации 01.11.2023 г.

Представлены некоторые упрощения, применяемые при моделировании теплообмена в двумерной печи с нагреваемой пластиной. В качестве основных уравнений выбраны хорошо известные уравнения Навье – Стокса для несжимаемой жидкости, в том числе уравнение энергии. Для моделирования изменений плотности жидкости используется приближение Буссинеска. Упрощенные P_N -аппроксимации нужны для описания теплообмена излучением, сопряженного с конвективным теплопереносом (теплообменом). Для решения системы уравнений на сетке с треугольными ячейками применяется метод конечных элементов Тейлора – Худа, а для учета преобладающей адвекции теплового потока – характеристический метод Галеркина. Представлены расчетные данные, полученные при работе различных горелок. Выполнено сопоставление результатов численных расчетов, проведенных без учета и с учетом лучистого (радиационного) теплообмена, согласно которым температура на боковых стенах печи неодинакова. Это связано с тем, что нестационарное конвекционно-радиационное тепло “оттягивает” нестабильный тепловой поток в стороны в выбранный момент времени. При более высоком значении числа Рейнольдса становится доступным и дополнительный механизм теплопередачи в азимутальном и радиальном направлениях – так называемый вихревой перенос. Он интенсивный, а передача энергии поперек потока в данном положении лучше, чем при более низком значении числа Рейнольдса. Еще одно различие, на которое стоит обратить внимание, – это протяженность области теплового входа, в которой поперечное распределение температуры становится полностью развитым. Данная область относительно коротка при работе горелок № 7 и 9 (именно из-за интенсивного турбулентного поперечного переноса энергии), тогда как при работе горелок № 1 и 3 она длиннее.

Ключевые слова: лучистый теплообмен, несжимаемые течения, смешанный метод конечных элементов, уравнения Навье – Стокса, характеристический метод Галеркина, упрощенные P_N -аппроксимации

DOI: 10.56304/S0040363625700791

В связи с растущими требованиями к снижению потребляемой энергии и сокращению выбросов загрязняющих веществ центральной темой большого количества исследований стало моделирование особенностей теплопередачи в промышленных печах [1, 2]. Важно отметить, что именно работа горелок в печи позволяет получить нужные тепловые характеристики, применяемые для решения технических задач. Существуют определенные факторы, которые играют важную роль в процессах, протекающих в печах, – они обеспечивают равномерные температурные градиенты, защищают от возможных многочисленных повреждений (например, появления следов салазок), увеличивают производительность печи. Бо-

лее того, данные факторы способствуют росту качества обрабатываемых изделий вследствие повышения их прочности и твердости. В печи тепло излучением и конвекцией передается элементам конструкции, через которые отводится посредством теплопроводности [3]. Тем не менее процесс моделирования теплового потока может оказаться очень сложным из-за необходимости учитывать такие факторы, как направление распространения тепла, положение обрабатываемого изделия, форма конкретной печи и ориентация горелок на поверхности печи сложной формы, а также тепловое взаимодействие рабочих сред и элементов конструкции, участвующих в процессе теплопереноса. Таким образом,

применение моделей и программ, разработанных на основе методов вычислительной гидродинамики, имеет решающее значение для успешного исследования указанных факторов и расчета характеристик печи в целом.

Главная цель настоящей статьи – создание и обоснование двухмерной методики расчета процессов, протекающих в печи сложной формы при работе нескольких горелок. В частности, особое внимание уделяется тщательному анализу теплового потока в сечении печи с учетом теплопередачи посредством конвекции и излучения. Для решения этой задачи предложено использовать смешанный метод конечных элементов [4].

В последние годы внимание авторов многих научных статей было сосредоточено на изучении различных технических устройств, работа которых зависит от теплового взаимодействия элементов конструкции и теплоносителей [5, 6]. В [7] на основе упрощенного метода создана модель для оперативного управления вращающейся печью промежуточного нагрева. Такая модель применяется для анализа процессов нагрева и отжига металла. Одно из направлений исследований было связано с радиационным теплообменом в проходной печи с толкателем. Однако все сводилось к контролю изменения температуры во времени без учета совместного конвективно-лучистого переноса тепла; не проводилось и изучение влияния оптической глубины и постоянной Планка на уравнение излучения.

В [8] был разработан упрощенный метод для оперативного регулирования температуры в проходной печи с толкателем с целью улучшить ее эксплуатационные характеристики и оптимизировать ее конструкцию. Однако в [8] рассматривались только тепловые потоки, передаваемые радиацией от газообразных продуктов горения, и не принимались во внимание количество горелок и их расположение.

Авторы [9] создали модель печи косвенного нагрева, позволяющую прогнозировать расход топлива, но изучали только термохимические процессы без учета теплофизических явлений. В [10] были предложены модели для анализа теплообмена излучением применительно к расчету нагрева заготовок во вращающейся печи и печи с роликовым подом. Тем не менее, исследование сводилось к определению температуры заготовки без учета конвективного теплопереноса, распределения тепловых потоков, режимов работы горелок и их расположения. На основе метода конечных объемов в [11] была создана модель для прогнозирования теплообмена, причем привнеслось во внимание излучение газовой среды в огневой печи прямого нагрева с толкателем. Однако исследовался только лучистый теплообмен без учета перетоков тепла в самой печи.

Для расчета лучистого теплообмена на поверхности заготовки и распределения температуры в самой заготовке в [12] была предложена математическая модель, основанная на методе конечных объемов. Однако исследование было ограничено решением уравнения лучистого теплопереноса от горелок без учета уравнений, описывающих конвективный перенос тепла (уравнений Навье – Стокса).

Для изучения лучистого теплообмена в стекле применялись SP_N -аппроксимации [13]; рассматривалось только охлаждение стеклянных листов. Согласно полученным результатам, упрощенные аппроксимации эффективны и имеют приемлемую точность.

В [14] SP_N -аппроксимации использовались для анализа лучистого теплообмена прерывистым методом конечных элементов высокого порядка точности, основанного на методе Галеркина. Показано, что для оптически толстых сред SP_N -аппроксимации позволяют получить решения, близкие к численному решению полной задачи лучистого теплообмена. Однако метод использовался для простых задач, поэтому требуются дополнительные исследования для определения его применимости для решения более сложных задач и оценки погрешности.

Что касается влияния физических характеристик, размеров и форм нагреваемых изделий, то экспериментальное решение этой задачи становится все более трудоемким и дорогостоящим. По-видимому, настоящая статья – первая работа, посвященная изучению конвективно-лучистого теплообмена с использованием метода конечных элементов Тейлора – Худа и SP_3 -аппроксимаций.

Насколько известно авторам данной статьи, еще одна отличительная особенность предложенной модели заключается в том, что она позволяет исследовать печь сложной формы и учесть особенности промышленных печей для производства и плавления стекла. Кроме того, анализируются различные режимы работы горелок печи. Все эти факторы очень важны для того, чтобы составить представление о закономерностях теплообмена в печи, рассчитать срок ее службы и модифицировать ее внутреннюю конфигурацию применительно к промышленным печам в целях достижения требуемых технико-экономических показателей, уменьшения затрат на изготовление печей и их эксплуатацию.

В настоящей статье для моделирования лучистого теплообмена используются уравнения Навье – Стокса для несжимаемой жидкости, в том числе уравнение энергии, а теплоперенос излучением описывается с помощью SP_1 - и SP_3 -аппроксимаций. Предлагается использовать характеристический метод Галеркина, в котором

производная по времени и конвективный член группируются по характеристикам и решение сводится к расчету с определенным шагом по времени.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНО-ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА

На рис. 1 показана форма исследуемой печи, которая оснащена несколькими горелками и в сечении которой располагается нагреваемая горизонтальная стеклянная пластина. В начальный момент времени печь находится при комнатной температуре, которая составляет $\Theta'_C = 300$ К. Температура пламени горелок равна $\Theta'_H = 1800$ К. Поскольку в качестве рабочей жидкости рассматривалась ньютоновская жидкость, все ее термодинамические характеристики считаются постоянными, за исключением плотности в члене уравнения, описывающем влияние сил плавучести, которое можно точно смоделировать с помощью приближения Буссинеска [15] без учета вязкостного сопротивления и диссипации. Стоит отметить, что нагретая пластина очень тонкая (толщина 5 мм). С учетом указанных допущений размерные уравнения Навье – Стокса для несжимаемой жидкости имеют следующий вид:

уравнение сохранения массы

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0; \quad (1)$$

уравнения движения

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} = v' \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right); \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'} = \\ = v' \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) + g' \beta' (\Theta' - \Theta'_C); \end{aligned} \quad (3)$$

уравнение энергии

$$\begin{aligned} \rho' c'_p \frac{\partial \Theta'}{\partial t'} + u' \frac{\partial \Theta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \Theta'}{\partial y'} = \\ = \lambda' \left(\frac{\partial^2 \Theta'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Theta'}{\partial y'^2} \right) - \nabla \cdot \mathbf{q}'_R, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{u}' = (u', v')$ – поле скорости, м/с; u' – скорость в направлении оси x' ; v' – скорость в направлении оси y' ; x', y' – ось абсцисс и ординат соответственно, м; t' – время, с; ρ' – характерная плотность, кг/м³; p' – давление, Па; v' – кинематический коэффициент вязкости, м²/с; g' – ускорение свобод-

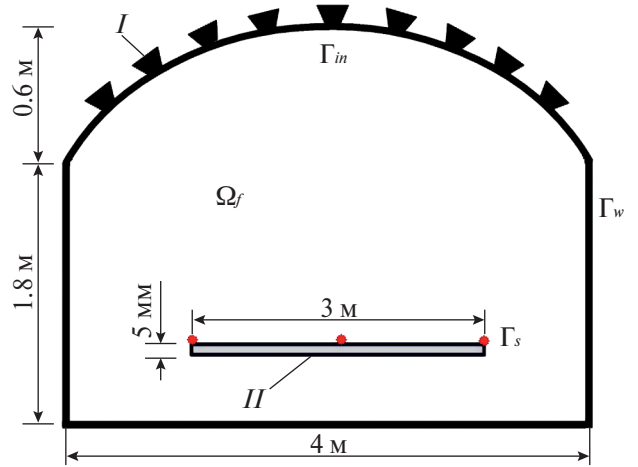


Рис. 1. Поперечное сечение исследуемой печи с несколькими горелками (I) и тонкой нагреваемой пластиной (II).

Ω_f – условия внутри печи; граничные условия: Γ_{in} – только горелок; Γ_w – стенки печи; Γ_s – конструкции стеклянного листа

ного падения, м/с²; β' – коэффициент теплового расширения, К⁻¹ × 10⁻⁶; Θ' – температура, К; c'_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, Дж/(кг · К); λ' – коэффициент теплопроводности, Вт/(м · К); $(-\nabla \cdot \mathbf{q}'_R)$ – дивергенция лучистого теплового потока, Вт/м²; штрих в обозначении величины означает, что она имеет размерность.

Влияние излучения учитывается в уравнении энергии с помощью $(-\nabla \cdot \mathbf{q}'_R)$. Для серой среды (т.е. частота в уравнении не принимается во внимание) параметр $(-\nabla \cdot \mathbf{q}'_R)$ можно представить в виде

$$-\nabla \cdot \mathbf{q}'_R = \int_{S^2} \kappa' [B'(\Theta') - I'] d\omega, \quad (5)$$

где κ' – коэффициент поглощения, м⁻¹; $B'(\Theta') = \sigma'_B \Theta'^4$ – спектральная плотность излучения абсолютно черного тела, определяемая по формуле Планка, кг · м²/с²; σ'_B – постоянная Больцмана [16, 17]; $I'(\omega, \mathbf{x}')$ – спектральная плотность излучения, распространяющегося в “угловом” направлении $\omega = (\omega_x, \omega_y)$ в точке $\mathbf{x}' = (x, y)$; S^2 – единичная сфера.

Интенсивность I' в нерассеивающей среде рассчитывается по уравнению переноса энергии излучения

$$\left(\omega_x \frac{\partial I'}{\partial x'} + \omega_y \frac{\partial I'}{\partial y'} \right) + \kappa' I' = \kappa' B'(\Theta'). \quad (6)$$

Для представления размерных уравнений Навье – Стокса в безразмерном виде использовались следующие масштабы:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}'}{D'}; \quad t = \frac{t'}{t_\infty}; \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}'}{u_\infty}; \quad p = \frac{p'}{p'u_\infty^2}; \quad \nu' = \frac{\mu'}{\rho'};$$

$$I = \frac{I'}{I_\infty}; \quad \Theta = \frac{\Theta' - \Theta'_C}{\Theta'_H - \Theta'_C}; \quad g = \frac{D'g'}{u_\infty^2};$$

$$\beta = \beta'\Theta'_H; \quad D = \frac{D'}{D_\infty}; \quad \kappa = \frac{\kappa'}{\kappa_\infty},$$

где D' – толщина нагреваемой плиты, м; нижний индекс ∞ указывает на характерное значение параметра, используемое в качестве масштаба; μ – динамический коэффициент вязкости, кг/(м · с).

Безразмерные числа подобия определяются как

$$\tau = \kappa_\infty L_\infty; \quad \text{Pr} = \frac{\nu'}{a'}; \quad \text{Re} = \frac{D'u_\infty}{\nu'}; \quad \text{Pl} = \frac{\lambda'}{D'\sigma'_B\Theta'^3_H},$$

где τ – оптическая глубина; L_∞ – расстояние от свода печи до нагреваемой пластины, м; Pr – число Прандтля; a' – температуропроводность, м²/с; Re – число Рейнольдса; Pl – число Планка.

После подстановки безразмерных параметров в (1)–(4) получены следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0; \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} &= \Theta \mathbf{e}; \\ \frac{D\Theta}{Dt} - \frac{1}{\text{Pr Re}} \nabla^2 \Theta &= -\frac{1}{\text{Pr Re}} \nabla \cdot \mathbf{q}_R, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $\mathbf{e} = (0, 1)$ – единичный вектор, связанный с силой тяжести.

Субстанциональная производная $Dn/(Dt)$ некоторой функции n записывается как

$$\frac{Dn}{Dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla n. \quad (8)$$

Безразмерный лучистый тепловой поток рассчитывается по уравнению

$$-\nabla \cdot \mathbf{q}_R = \frac{1}{\tau \text{Pl}} [B(\Theta) - \varphi], \quad (9)$$

где φ – суммарная интенсивность падающего излучения.

Формула для вычисления параметра φ имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{S^2} I(\omega, \mathbf{x}) d\omega. \quad (10)$$

Безразмерная функция Планка B определяется как

$$B(\Theta) = 4\Theta^4.$$

Таким образом, уравнение лучистого теплообмена (6) можно записать в безразмерном виде:

$$\tau \omega \cdot \nabla I + \kappa I = \kappa B(\Theta). \quad (11)$$

Уравнения (7) и (11) решаются в расчетной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega = \Gamma_w \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_s$, представляющей собой поперечное сечение печи (см. рис. 1) со следующими граничными условиями:

для скоростей

$$\mathbf{u} = (t, \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}; \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_w;$$

$$\mathbf{u} = (t, \hat{\mathbf{x}}) = u; \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_{in},$$

для температур

$$\left. \begin{aligned} \Theta(t, \hat{\mathbf{x}}) &= \Theta_C; \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_w; \\ \Theta(t, \hat{\mathbf{x}}) &= \Theta_H; \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_{in}; \\ \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \Theta(t, \hat{\mathbf{x}}) &= 0; \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_s, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $\mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}})$ – внешняя единичная нормаль к границе области $\partial\Omega$.

При лучистом теплообмене граничные условия устанавливались для диффузно излучающих и отражающих стенок:

$$\left. \begin{aligned} I(\hat{\mathbf{x}}) &= B(\Theta_C); \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_w; \\ I(\hat{\mathbf{x}}) &= B(\Theta_H); \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_{in}; \\ \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla I(\hat{\mathbf{x}}) &= 0; \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_s, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где границы рассматриваемой области будут следующие:

$$\hat{\Gamma}_i = \{\hat{\mathbf{x}} \in \Gamma_i; \omega \cdot \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) < 0\}; \quad i = w, in, s.$$

УПРОЩЕННЫЕ P_N -АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА

Были проанализированы упрощенные P_N -аппроксимации применительно к эксплуатации газовых турбин [18–20], производству стекла [21, 22] и течениям с небольшими числами Маха [23]. В настоящем исследовании область использования этих аппроксимаций распространена на сложный радиационно-конвективный теплообмен. Чтобы вывести выражения для SP_N -аппроксимаций для уравнения лучистого теплообмена, нужно записать уравнение (11) в виде

$$\left(1 + \frac{\tau}{\kappa} \omega \cdot \nabla\right) I = B(\Theta).$$

Для обращения оператора переноса используются ряды Неймана:

$$I = \left(1 + \frac{\tau}{\kappa} \omega \cdot \nabla\right)^{-1} B(\Theta);$$

$$I \approx \left[1 - \frac{\tau}{\kappa} \omega \cdot \nabla + \frac{\tau^2}{\kappa^2} (\omega \cdot \nabla)^2 - \frac{\tau^3}{\kappa^3} (\omega \cdot \nabla)^3 + \dots\right] B(\Theta).$$

Следующий шаг заключается в интегрировании по параметру ω по всем направлениям в единичной сфере S^2 с использованием выражения

$$\int_{S^2} (\omega \cdot \nabla)^n d\omega = \left[1 + (-1)^n \right] \frac{2\pi}{n+1} \nabla^n.$$

В результате будет получено формальное асимптотическое уравнение для φ :

$$4\pi B(\Theta) = \left(1 - \frac{\tau^2}{3\kappa^2} \nabla^2 - \frac{4\tau^4}{45\kappa^4} \nabla^4 - \frac{44\tau^6}{945\kappa^6} \nabla^6 \right) \varphi + O(\tau^8).$$

Если пренебречь остаточными членами $O(\tau^2)$, $O(\tau^4)$, $O(\tau^6)$ или $O(\tau^8)$, можно провести упрощенные аппроксимации SP_0 , SP_1 или SP_3 . Для SP_0 -аппроксимации характерно выражение

$$4\pi B(\Theta) = \varphi. \quad (14)$$

Следует отметить, что использование равенства (14) в уравнении энергии (7) приводит к исключению влияния излучения.

В настоящем исследовании использовали модели с упрощенными SP_1 - и SP_3 -аппроксимациями. Эти модели могут применяться с другими аппроксимациями, при изучении иных объектов. Таким образом, при выборе упрощенной SP_1 -аппроксимации будет получено выражение

$$4\pi B(\Theta) = \varphi - \frac{\tau^2}{3\kappa^2} \nabla^2 \varphi + O(\tau^4),$$

а также уравнение

$$-\frac{\tau^2}{3\kappa^2} \nabla^2 \varphi + \kappa \varphi = 4\pi \kappa B(\Theta). \quad (15)$$

Далее SP_N -аппроксимацию можно представить в виде

$$4\pi B(\Theta) = \left(1 - \frac{\tau^2}{3\kappa} \nabla^2 - \frac{4\tau^4}{45\kappa^4} \nabla^4 - \frac{44\tau^6}{945\kappa^6} \nabla^6 \right) \varphi + O(\tau^8),$$

а ассоциируемые с ней уравнения как

$$\begin{aligned} -\frac{\tau^2}{\kappa} \mu_1^2 \nabla^2 \varphi_1 + \kappa \varphi_1 &= 4\pi \kappa B(T); \\ -\frac{\tau^2}{\kappa} \mu_2^2 \nabla^2 \varphi_2 + \kappa \varphi_2 &= 4\pi \kappa B(T), \end{aligned} \quad (16)$$

где κ_k – коэффициент поглощения, который учитывает только поглощение (а не поглощение и рассеяние) (SP_1 и SP_3).

Новые переменные φ_1 и φ_2 в (16) связаны с полной интенсивностью падающего излучения соотношением

$$\varphi = \frac{\gamma_2 \varphi_1 - \gamma_1 \varphi_2}{\gamma_2 - \gamma_1}, \quad (17)$$

где γ_1, γ_2 – коэффициенты усиления [17].

После расчета средней интенсивности по указанным аппроксимациям SP_1/SP_3 будет вычисляться тепловой поток по формуле (9). Граничные условия для упрощенных SP_N -аппроксимаций аналогичны условиям Маршака, и их вывод основан на вариационных принципах [17]. Приведенные далее граничные условия для SP_1/SP_3 -аппроксимаций соответствуют исходным граничным условиям (12). Таким образом, для уравнений (15), полученных для упрощенных SP_1/SP_3 -аппроксимаций, граничные условия будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau}{3\kappa} \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \varphi(\hat{\mathbf{x}}) + \varphi(\hat{\mathbf{x}}) &= B(\Theta_C); \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_w; \\ \frac{\tau}{3\kappa} \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \varphi(\hat{\mathbf{x}}) + \varphi(\hat{\mathbf{x}}) &= B(\Theta_H); \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_{in}; \\ \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \varphi(\hat{\mathbf{x}}) &= 0; \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_s. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Для уравнений (16), выведенных для приближенной SP_3 -аппроксимации, граничные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \varphi_1(t, \hat{\mathbf{x}}) + \alpha_1 \varphi_1(t, \hat{\mathbf{x}}) &= \\ = \eta_1 B(\Theta_C) + \beta_2 \varphi_2(t, \hat{\mathbf{x}}); \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_w; \\ \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \varphi_1(t, \hat{\mathbf{x}}) + \alpha_1 \varphi_1(t, \hat{\mathbf{x}}) &= \\ = \eta_1 B(\Theta_H) + \beta_2 \varphi_2(t, \hat{\mathbf{x}}); \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_{in}; \\ \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \varphi_2(t, \hat{\mathbf{x}}) + \alpha_2 \varphi_2(t, \hat{\mathbf{x}}) &= \\ = \eta_2 B(\Theta_C) + \beta_1 \varphi_1(t, \hat{\mathbf{x}}); \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_w; \\ \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \varphi_2(t, \hat{\mathbf{x}}) + \alpha_2 \varphi_2(t, \hat{\mathbf{x}}) &= \\ = \eta_2 B(\Theta_H) + \beta_1 \varphi_1(t, \hat{\mathbf{x}}); \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_{in}; \\ \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \varphi_1(t, \hat{\mathbf{x}}) &= \\ = \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \varphi_2(t, \hat{\mathbf{x}}) = 0; \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Gamma_s, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \eta_1, \eta_2$ рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{5}{96} \left(34 + 11\sqrt{\frac{5}{6}} \right); \quad \alpha_2 = \frac{5}{96} \left(34 - 11\sqrt{\frac{5}{6}} \right); \\ \beta_1 &= \frac{5}{96} \left(2 - \sqrt{\frac{5}{6}} \right); \quad \beta_2 = \frac{5}{96} \left(2 + \sqrt{\frac{5}{6}} \right); \\ \eta_1 &= \frac{5\pi}{2} \left(3 + \sqrt{\frac{5}{6}} \right); \quad \eta_2 = \frac{5\pi}{2} \left(3 - \sqrt{\frac{5}{6}} \right). \end{aligned}$$

Стоит отметить, что рассмотренные граничные условия применимы только для уравнения лучистого теплообмена (11), в котором учитываются граничные условия без отражения падающего излучения.

ПРИМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА СОВМЕСТНО С МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Определяющие уравнения, приведенные в предыдущем разделе, можно рассматривать как численный метод, в котором при дискретизации по времени конвективная часть “отделяется” от части, основанной на приближении Стокса – Буссинеска. Таким образом, температура и скорость обновляются на каждом шаге по времени путем решения уравнений конвективного теплопереноса

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= 0; \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

а затем при решении уравнений Стокса – Буссинеска (7).

Перед началом работы горелок граничные условия для уравнений (20) и (7) задаются исходя из того, что камера доменной печи и ее (печи) среда имеют комнатную температуру. После аппроксимации конвективного шага в (20) уравнение энергии в системе (7) “связывается” с уравнением движения, которое можно решить отдельно.

Расчет по Лагранжу

Расчетная область имела квазиравномерное разбиение $\Omega_h \subset \bar{\Omega}$ на небольшие треугольники τ_j , которые отвечали следующим условиям. Для описания полей скорости, температуры, излучения и давления использовались конечные элементы Тейлора – Худа P_2/P_1 , т.е. полином второй степени для скорости, температуры и излучения и полином первой степени для давления. Конечные элементы Тейлора – Худа для степени полинома $m = 2$ показаны на рис. 2.

После выбора шага по времени Δt весь временной интервал был разбит на подынтервалы $[t_n, t_{n+1}]$, где $t_n = n\Delta t$ (n – значение подынтервалов), и для любой функции w было введено обозначение $w^n(\mathbf{x}) = w^n(\mathbf{x}, t_n)$. Таким образом, решение, полученное при использовании метода конечных эле-

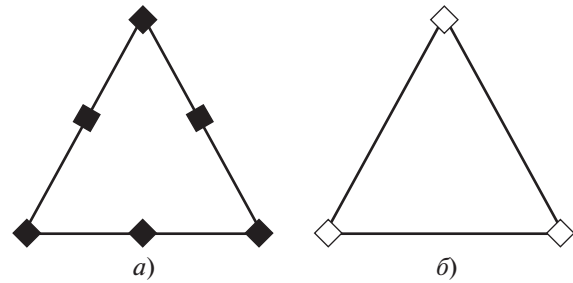


Рис. 2. Элементы Тейлора – Худа P_2/P_1 с узлами для расчета температуры, скорости, характеристик лучистого теплового потока (а) и давления (б).

P_2 означает, что в одном треугольном элементе имеется шесть узлов (узлы созданы для определения температуры и скорости при решении). P_1 означает, что имеются три узла, на которые нужно оказать давление для получения решения

ментов, для $u^n(\mathbf{x})$, $v^n(\mathbf{x})$, $\Theta^n(\mathbf{x})$, $\phi^n(\mathbf{x})$ и $p^n(\mathbf{x})$ можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} u_h^n &= \sum_{j=1}^M (U_j^n \phi_j); & v_h^n &= \sum_{j=1}^M (V_j^n \phi_j); \\ \Theta_h^n &= \sum_{j=1}^M (\Lambda_j^n \phi_j); \\ \phi_h^n &= \sum_{j=1}^M (\xi_j^n \phi_j); & p_h^n &= \sum_{j=1}^N (P_j^n \psi_j), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где $N = 3$ – количество точек, в которых рассчитывается давление; $M = 6$ – количество точек для расчета скорости, температуры, характеристик излучения в элементе разбиения Ω_h . Функции U_j^n , V_j^n , Λ_j^n , ξ_j^n и P_j^n представляют собой значения в узлах переменных $u_h^n(\mathbf{x})$, $v_h^n(\mathbf{x})$, $\Theta_h^n(\mathbf{x})$, $\phi_h^n(\mathbf{x})$ и $p_h^n(\mathbf{x})$ соответственно и рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} U_j^n &= u_h^n(\mathbf{x}_j); & V_j^n &= v_h^n(\mathbf{x}_j); & \Lambda_j^n &= \Theta_h^n(\mathbf{x}_j); \\ \xi_j^n &= \phi_h^n(\mathbf{x}_j); & P_j^n &= p_h^n(\mathbf{y}_j); \end{aligned}$$

здесь $\{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^N$ – группы узлов сетки для расчета давления в элементе разбиения Ω_h , $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^M$ – то же для определения скорости, температуры, характеристик излучения.

Процедура расчета по Лагранжу

Через $\mathbf{X}_h(t)$ обозначены характеристики, которые связаны с субстанциональной производной (8) и являются решением следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}_h(t)}{dt} &= \mathbf{u}[\mathbf{X}_h(t), t]; & \forall (t) \in \bar{\Omega} \times [t_n, t_{n+1}], \\ \mathbf{X}_h(t_{n+1}) &= \mathbf{x}_j. \end{aligned} \quad (22)$$

Стоит отметить, что $\mathbf{X}_h(t) = [X_h(t), Y_h(t)]^T$ – исходная точка, представляющая собой положение частицы в момент времени t , которая достигла точки $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)^T$ в момент времени t_{n+1} . Таким образом, для всех $\mathbf{x}_j \in \bar{\Omega}$ и $t \in [t_n, t_{n+1}]$ решение уравнения (22) можно представить в виде

$$\mathbf{X}_{hj}^n(t_n) = \mathbf{x}_j - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{u}_h[\mathbf{X}_{hj}(t), t] dt.$$

Точность оценки характеристик $\mathbf{X}_{hj}^n(t_n)$ фактически определяет точность результатов, полученных при использовании характеристического метода Галеркина.

Авторы некоторых работ, например [24], для оценки (21), интегрированного по времени, выбирают для решения явную схему Рунге – Кутты второго порядка, точность которой недостаточна для удержания частицы жидкости на искривленной траектории движения. В исследовании [24] применяется метод, впервые предложенный в [25] при реализации полулагранжевых схем для интегрирования уравнений, используемых при прогнозировании погодных условий. Пусть смещение α_{hj} определяется как

$$\alpha_{hj} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{u}_h[\mathbf{X}_{hj}(t), t] dt.$$

Решение уравнения (22) можно записать в виде

$$\mathbf{X}_{hj}^n = \mathbf{x}_j - \alpha_{hj},$$

где смещение α_{hj} вычисляется с помощью итерационной процедуры

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{hj}^{(0)} &= \frac{\Delta t}{2} [3\mathbf{u}_h^n(\mathbf{x}_j) - \mathbf{u}_h^{n-1}(\mathbf{x}_j)]; \\ \alpha_{hj}^{(k+1)} &= \frac{\Delta t}{2} \left[3\mathbf{u}_h^n\left(\mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\alpha_{hj}^{(k)}\right) - \mathbf{u}_h^{n-1}\left(\mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\alpha_{hj}^{(k)}\right) \right]; \end{aligned} \right\} (23)$$

$k = 0, 1, \dots$

Чтобы определить значения скоростей $\mathbf{u}_h^n\left(\mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\alpha_{hj}^{(k)}\right)$ и $\mathbf{u}_h^{n-1}\left(\mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\alpha_{hj}^{(k)}\right)$, необходимо прежде всего, используя алгоритм поиска местоположения, найти элемент сетки τ_j , в который попадает параметр $\mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\alpha_{hj}^{(k)}$. Затем провести оценку приближения в элементе τ_j . При численных расчетах итерации (23) продолжают до тех пор, пока изменение траектории на двух последовательных итерациях не будет превышать 10^{-9} . Таким образом, для дискретизации по времени уравнений в приближении Стокса – Буссинеска используется схема Кранка – Николсона второго порядка для всех членов, содержащих скорость,

температуру и давление. Соответствующие конечно-разностные уравнения можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0; \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} &= \Theta^{n+1/2} \mathbf{e}; \\ \frac{\Theta^{n+1} - \tilde{\Theta}^n}{\Delta t} - \frac{1}{\text{Pr Re}} \nabla^2 \Theta^{n+1/2} &= \\ &= -\frac{1}{\text{Pr Re } \tau \text{Pl}} [B(\tilde{\Theta}^n) - \Phi^{n+1}], \end{aligned} \right\} (24)$$

где

$$\tilde{\mathbf{u}}^n(\mathbf{x}_j) = \mathbf{u}_h[\mathbf{X}_{hj}(t_n), t_{n+1}]; \quad \Theta^n(\mathbf{x}_j) = \Theta[\mathbf{X}_{hj}(t_n), t_{n+1}].$$

Как правило, $\mathbf{X}_{hj}(t_n)$ не будет совпадать с пространственным положением точки сетки. В этом случае необходимо, чтобы схема расчета $\mathbf{X}_{hj}(t)$ включала в себя алгоритм поиска местоположения для обнаружения главного (основного) элемента, в котором находится такая точка. Поля температуры и скорости в точках характеристик рассчитываются с помощью интерполяции по известным значениям в узлах сетки элемента, который содержит $\mathbf{X}_{hj}(t)$, так как $\mathbf{X}_{hj}(t)$ не находится в узле сетки.

Цель настоящего исследования – совместное применение конечно-элементной пространственной дискретизации и метода характеристик. В этом случае интерполяция по Лагранжу выполняется в элементе с выходными узлами по базисным функциям конечного элемента:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h^n &= \sum_{j=1}^M (\tilde{U}_j^n \phi_j); & \tilde{v}_h^n &= \sum_{j=1}^M (\tilde{V}_j^n \phi_j); \\ \tilde{\Theta}_h^n &= \sum_{j=1}^M (\tilde{\Lambda}_j^n \phi_j), \end{aligned} \quad (25)$$

где \tilde{U}_j^n , \tilde{V}_j^n и $\tilde{\Lambda}_j^n$ оцениваются посредством интерполяции переменных $u_h^n(\mathbf{x}_j)$, $v_h^n(\mathbf{x}_j)$ и $\Theta_h^n(\mathbf{x}_j)$ между узлами конечных элементов у “подножия” (в отношении треугольных элементов) характеристик $\mathbf{X}_{hj}(t)$.

Процедура расчета по Эйлеру

Для завершения практической реализации характеристического метода Галеркина при решении задачи конвекции (25) далее рассматривается проекционная процедура для решения задачи Стокса – Буссинеска (см. также аналогичный метод в [26]). По известным значениям $\{p^n, \mathbf{u}^n, \Theta^n, \Phi^n\}$ находится решение $\{p^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, \Theta^{n+1}, \Phi^{n+1}\}$ в следующем порядке.

Шаг 1. Поиск φ^{n+1} путем решения уравнения

$$-\frac{\tau^2}{3\kappa}\nabla^2\varphi^{n+1} + \kappa\varphi^{n+1} = \kappa = B(\Theta^n) \quad (26)$$

с граничными условиями (18) при использовании аппроксимации SP_1 или при решении следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\tau^2}{\kappa}\mu_1^2\nabla^2\varphi_1^{n+1} + \kappa\varphi_1^{n+1} &= \kappa B(\Theta^n); \\ -\frac{\tau^2}{\kappa}\mu_2^2\nabla^2\varphi_2^{n+1} + \kappa\varphi_2^{n+1} &= \kappa B(\Theta^n); \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\varphi^{n+1} = \frac{\gamma_2\varphi_1^{n+1} - \gamma_1\varphi_2^{n+1}}{\gamma_2 - \gamma_1} \quad (28)$$

с граничными условиями (19) при применении SP_3 -аппроксимации.

Шаг 2. Поиск Θ^{n+1} посредством решения уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\Theta^{n+1} - \tilde{\Theta}^n}{\Delta t} - \frac{1}{Pr Re} \nabla^2\Theta^{n+1/2} &= \\ = -\frac{1}{Pr Re \tau Pl} [B(\tilde{\Theta}^n) - \varphi^{n+1}] \end{aligned} \quad (29)$$

с граничными условиями (12).

Шаг 3. Определение $\bar{\mathbf{u}}^{n+1}$ по формуле

$$\frac{\bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n}{\Delta t} + \nabla p^n - \frac{1}{Re} \nabla^2\bar{\mathbf{u}}^{n+1/2} = \Theta^{n+1/2} \mathbf{e}. \quad (30)$$

Шаг 4. Поиск \bar{p} (решение уравнения Пуассона):

$$\nabla^2\bar{p} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^{n+1/2}. \quad (31)$$

Шаг 5. Вычисление \mathbf{u}^{n+1} :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla\bar{p} = 0. \quad (32)$$

Шаг 6. Определение p^{n+1} :

$$p^{n+1} = p^n + 2\bar{p}. \quad (33)$$

Следует отметить, что уравнение Пуассона (31) можно получить путем “взятия” дивергенции от уравнения (32) с учетом соотношения $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Процедура сводится к решению только систем линейных уравнений для “обновления” решения $\{p^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, \Theta^{n+1}, \varphi^{n+1}\}$ на следующем шаге по времени в (29)–(33).

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В связи с отсутствием результатов исследования печей с прямым огнем нагревом для обоснования предлагаемой модели были проведены расчеты для прямоугольной печи двух конфигу-

раций, исследованных в [27]: с шагающей балкой и вертикальным расположением четырех горелок. Были определены температуры заготовки при ее перемещении в печь. Единственное различие заключалось в том, что в настоящем исследовании применялась сетка с треугольными элементами, а в [27] – с четырехугольными.

Длина пути перемещения заготовки в печи от ее входа до выхода равнялась 3.8 м. Расстояние между осями горелок составляло 1 м. Ближайшая к правой стене горелка находилась в 0.65 м от нее. Для предотвращения перегрева заготовок в результате прямого воздействия пламени горелок стенка, на которой были установлены горелки, располагалась на расстоянии 0.36 м от заготовки, выходящей из печи. Ширина топки прямоугольной печи составляла 4.15 м, высота – 0.70 м. Среднее давление и температура окружающего воздуха принимались равными 74.7 кПа и 300 К соответственно. Температура пламени горелок, которые использовались для нагрева стальных изделий, превышала 1100 К через $t = 10$ с после розжига.

Для двух конфигураций печи C_1 и C_2 рассчитывалась температура в двух точках заготовки при ее перемещении в печи. В обоих случаях горелки находились на задней поверхности печи, напротив той стенки, через которую поступали заготовки. Разница между конфигурациями C_1 и C_2 заключалась в длине печи: для C_2 она была на 20% меньше, чем для C_1 . Расстояние между горелками равнялось 1 м, а четвертая горелка располагалась на 0.65 м дальше от правой стенки.

Полная схема исследуемой печи и зависимости температуры заготовки от ее положения в печи приведены в [27]. Данные, представленные на рис. 3, свидетельствуют об очень хорошем соответствии температурных зависимостей, рассчитанных для конфигураций печи C_1 и C_2 в рамках настоящего исследования, тем зависимостям, которые были получены в [27].

Следующий этап проверки заключался в анализе сеточной сходимости при использовании аппроксимации SP_1 . Рассматривался вариант работы одной горелки, находящейся в средней точке криволинейного свода печи, который входит в расчетную область. Определялись параметры в момент времени $t = 10$ с. Оптическая глубина принималась равной $\tau = 1$, постоянная Планка $Pl = 0.5$. В качестве эталонной контрольной сетки для расчета погрешности в зависимости от длительности расчета (в минутах) была выбрана очень мелкая сетка (т.е. с большим количеством треугольных ячеек).

В настоящем исследовании число Рейнольдса ($Re = 500$) и число Прандтля ($Pr = 0.72$) были постоянными. Результаты проверки сеточной сходимости представлены в таблице. В графическом виде эти результаты показаны на рис. 4: приводятся

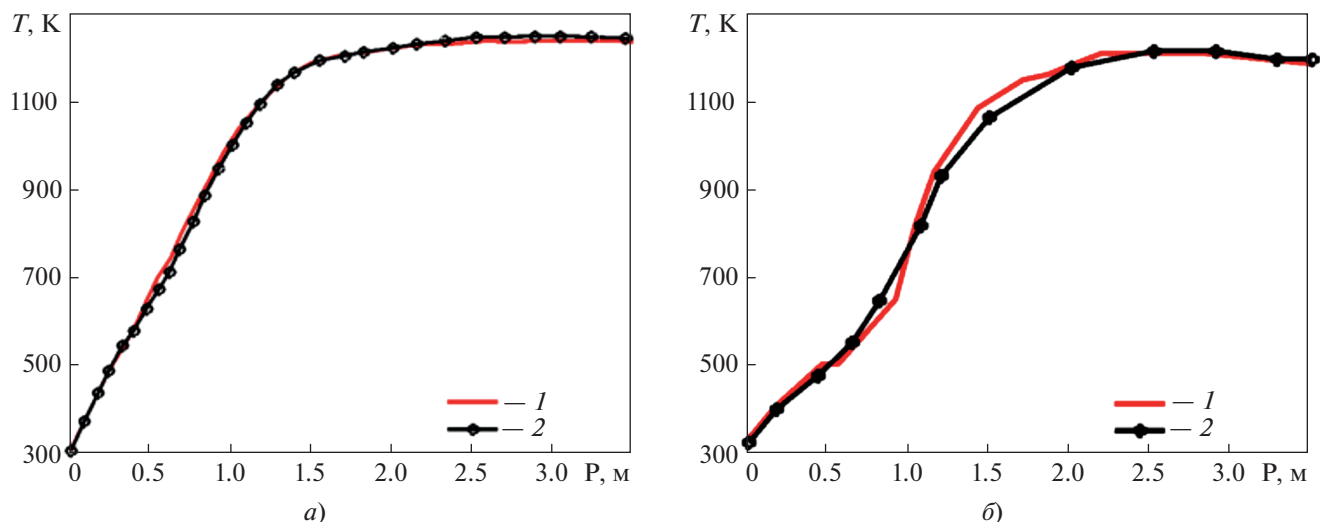


Рис. 3. Сравнение зависимостей температуры заготовки T от ее положения P в печи, рассчитанных в настоящей работе (1) и в исследовании [27] (2) для конфигураций печи C_1 (а) и C_2 (б)

распределения температуры, давления и скорости в горизонтальном сечении на высоте $y = 1.8$ м, полученные на различных сетках при использовании SP_1 -аппроксимаций. На основании проведенного сравнения результатов исследования сеточной сходимости с учетом теплообмена излучением (при рассмотрении SP_1 -приближений) была выбрана сетка С для оценки условий в печи при работе одной, трех, пяти, семи и девяти горелок. Результаты показывают, что лучистый теплообмен является определяющим фактором при распределении теплового потока и непосредственно воздействует на него (распределение) при работе печи даже при $t = 10$ с.

Вторая часть исследования посвящена изучению радиационно-конвективного теплообмена в расчетной области при использовании аппроксимаций SP_0 , SP_1 и SP_3 в интервале времени $t = 30$ с. При работе горелок радиационно-конвективный теплообмен существенно влияет на распределе-

ние температуры в расчетной области. Перенос тепла в печи начинается с излучения тепла пламенем горелки. На рис. 5 показаны нестационарные распределения температуры при включении одной, трех, пяти, семи и девяти горелок, вычисленные при использовании аппроксимаций SP_0 , SP_1 и SP_3 в момент времени $t = 10$ с.

При функционировании горелок во всем объеме печи возникают вихри. На рис. 6 показаны вихри, образующиеся под воздействием температуры и скорости теплового потока. Вынужденный конвективно-лучистый теплообмен вызван взаимодействием среды, находящейся в расчетной области при комнатной температуре, и распространяющегося теплового потока. Распределение теплового потока имеет интересные особенности, проанализировав которые, можно исследовать его влияние на образование вихрей при разных конфигурациях печи и различных условиях работы горелок.

Результаты расчетов распределений параметров в горизонтальном сечении топки при использовании SP_1 -аппроксимации для одной горелки, а также определения длительности расчетов

| Сетка | Количество элементов | Количество узлов для расчета | | Погрешность | | | Длительность расчета, мин |
|-------------|----------------------|------------------------------|----------|-------------------------|----------------------|----------------------|---------------------------|
| | | температуры и скорости | давления | при расчете температуры | при расчете скорости | при расчете давления | |
| A | 12351 | 25133 | 6391 | 0.0961 | 0.2593 | 0.2034 | 2 |
| B | 24898 | 50442 | 12772 | 0.0778 | 0.1195 | 0.0861 | 5 |
| C | 49411 | 99693 | 25141 | 0.0154 | 0.0646 | 0.0451 | 14 |
| D | 99112 | 199504 | 50196 | 0.0103 | 0.0293 | 0.0202 | 35 |
| Контрольная | 247534 | 497122 | 124794 | — | — | — | 116 |

Из-за высокой температуры внутри печи преобладающим режимом теплопереноса является тепловое излучение, которое зависит от числа горелок и их расположения, а также от размеров топки и количества тепла, которое может поглотить воздух. При излучении энергия переносится электромагнитными волнами (не молекулами), исходящими от пламени. Излучение происходит в виде фотонов, которые распространяются во всех возможных направлениях. Поскольку печь первоначально имеет комнатную температуру, поглощение тепла внутри нее превышает тепловыделение. Молекулы горячих слоев непрерывно передают тепло более холодным слоям, что приводит к образованию вихрей.

Также были исследованы распределения параметров в поперечном сечении печи на уровнях $y = 1.8, 1.2$ и 0.7 м при работе одной, трех, пяти, семи и девяти горелок в момент времени $t = 30$ с. На рис. 7 показаны распределения температуры в печи, полученные в ходе проведения численных экспериментов при различных режимах.

Согласно результатам, температура в печи при моделировании излучения с помощью аппроксимаций SP_1 и SP_3 оказалась выше, чем в случае, когда излучение не учитывалось. Это связано с тем, что воздух, находящийся внутри печи, поглощает большее количество тепла (при учете излучения), создавая восходящий поток вдоль криволинейного свода печи. Постоянная Планка была постоянной и равной 0.5 . Основная проблема, связанная с воздействием лучистого теплового потока, заключалась в том, что этот поток увеличивал турбулентность и создавал более мощные вихри, которые вызывали неравномерное распределение температуры в сечении печи, а также на ее поверхностях. Предполагается, что именно эти процессы происходят в печи, причем аналогичное влияние лучистого теплового потока уже отмечалось в [28].

Еще одним фактором, обуславливающим возникновение вихрей, является число Рейнольдса: при его увеличении в потоке возникает все больше вихрей, турбулентных структур и вихревых следов, которые исключают возможность расчета передачи тепла от горячих областей к холодным. Внутренние силы определяют поведение потока, делая его в значительной степени хаотичным. Поэтому для уменьшения влияния вихрей число Рейнольдса поддерживалось постоянным и равным 500 .

На рис. 5, 6 видно, что в сечении печи преобладает опускное течение. Однако в некоторый момент времени возникает циркуляция и появляются области подъемного течения. Для исследования распределения температуры пластины, находящейся в печи, использовались три главных узла конечного элемента. Первый узел располагался в

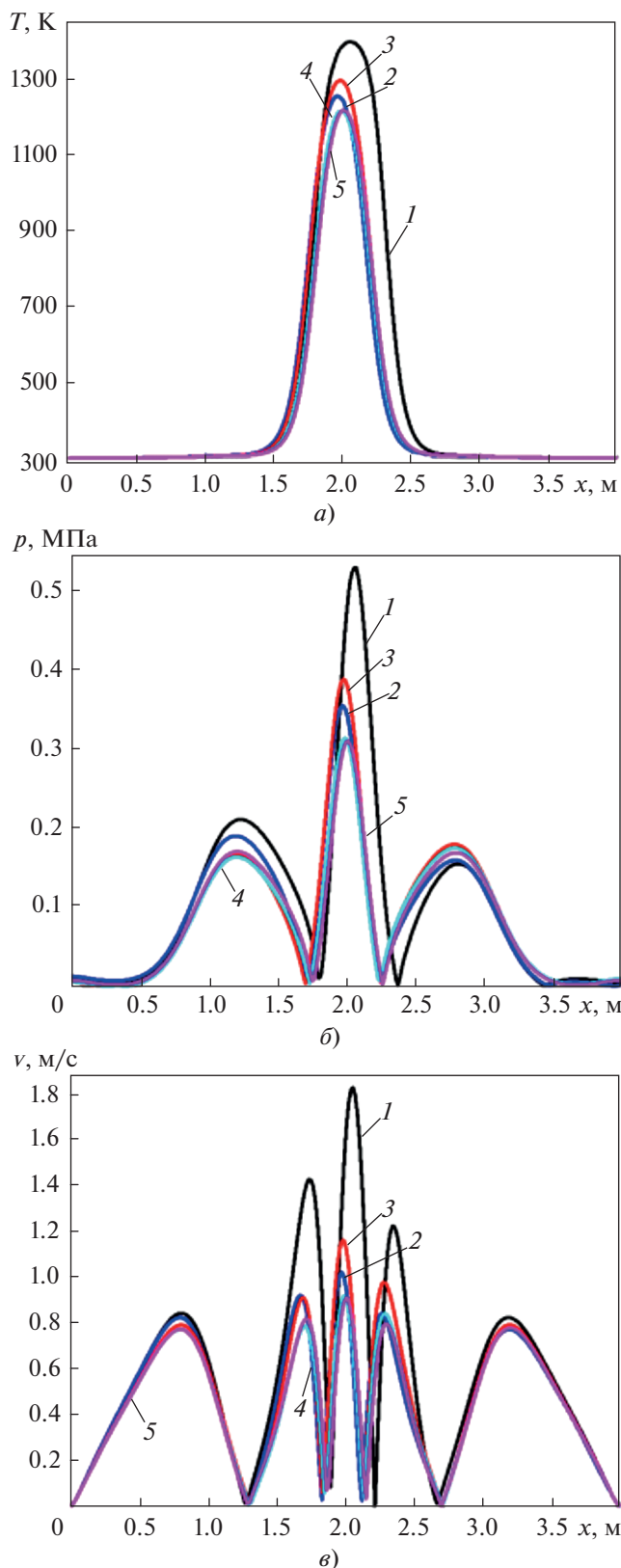


Рис. 4. Результаты расчета температуры (а), давления (б) и скорости (в) на разных сетках распределений параметров в горизонтальном сечении в момент времени $t = 10$ с при моделировании излучения с помощью SP_1 -аппроксимации. Сетка: 1 – А; 2 – В; 3 – С; 4 – D; 5 – контрольная

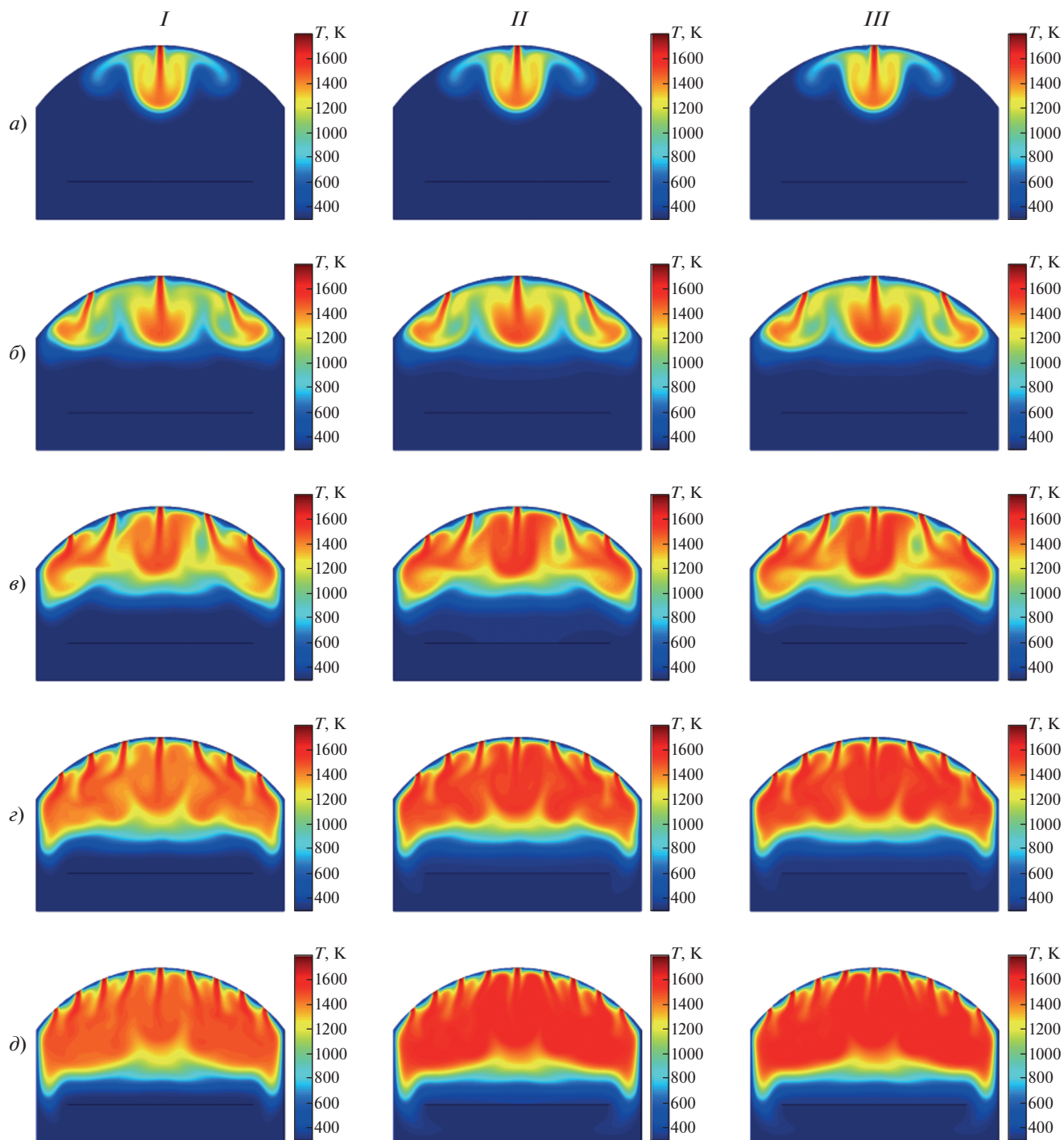


Рис. 5. Распределение температуры при работе одной (а), трех (б), пяти (в), семи (г) и девяти (д) горелок без учета излучения (I), а также при моделировании излучения с помощью аппроксимаций SP_1 (II) и SP_3 (III) в момент времени $t = 10$ с

левом верхнем углу пластины, второй – в правом верхнем, а третий – по середине верхней поверхности пластины. Эти узлы отмечены точками на рис. 1.

Температура в выбранных узлах на поверхности пластины контролировалась в зависимости от

времени. Тепловой поток достигал поверхность плиты в момент времени $t = 30$ с.

На рис. 8 показано изменение температуры левого узла в зависимости от времени в течение первых 30 с при работе одной, трех, пяти и девяти горелок. Полученные результаты свиде-

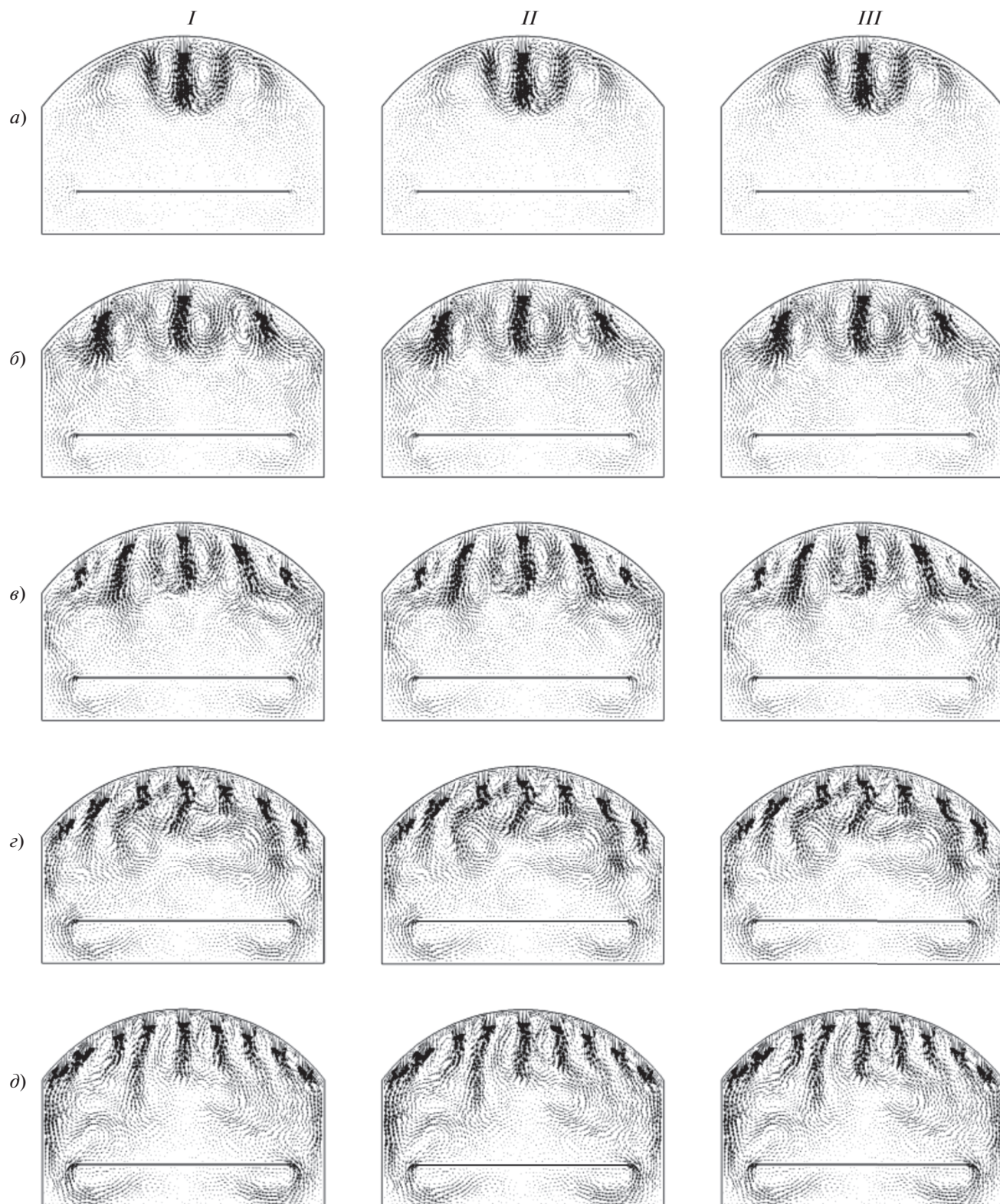


Рис. 6. Распределение скоростей в объеме печи при работе одной (а), трех (б), пяти (в), семи (г) и девяти (д) горелок без учета излучения (I), а также при моделировании излучения с помощью аппроксимаций SP_1 (II) и (III) в момент времени $t = 10$ с

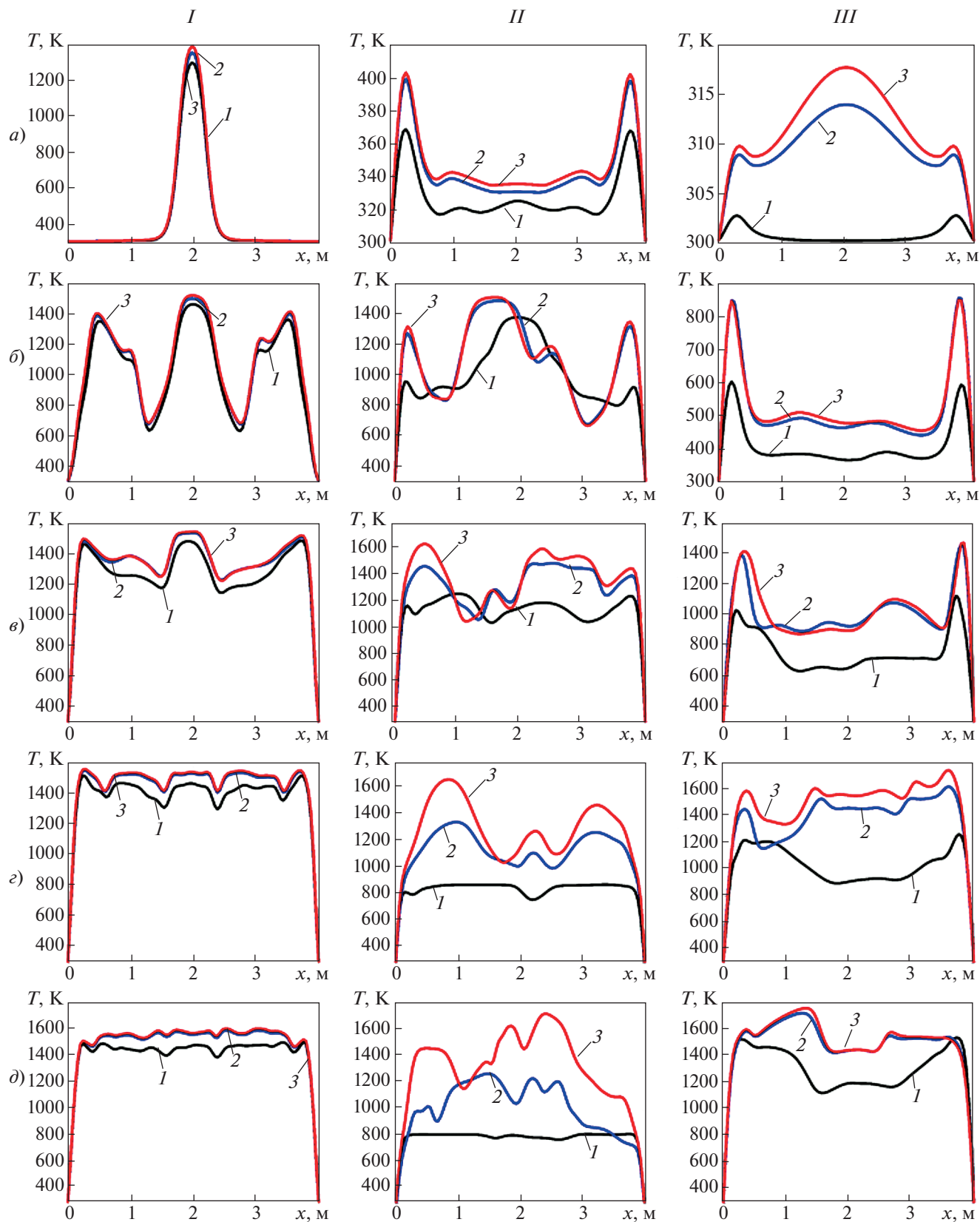


Рис. 7. Поперечные распределения температуры узлов T в направлении x на высоте $y = 1.8$ м (I) и 1.2 м (II) и на поверхности нагреваемой пластины (III) при работе одной (а), трех (б), пяти (в), семи (г) и девяти (д) горелок в момент времени $t = 30$ с [на графиках показаны различные варианты аппроксимаций SP_0 (1), SP_1 (2) и SP_3 (3)]

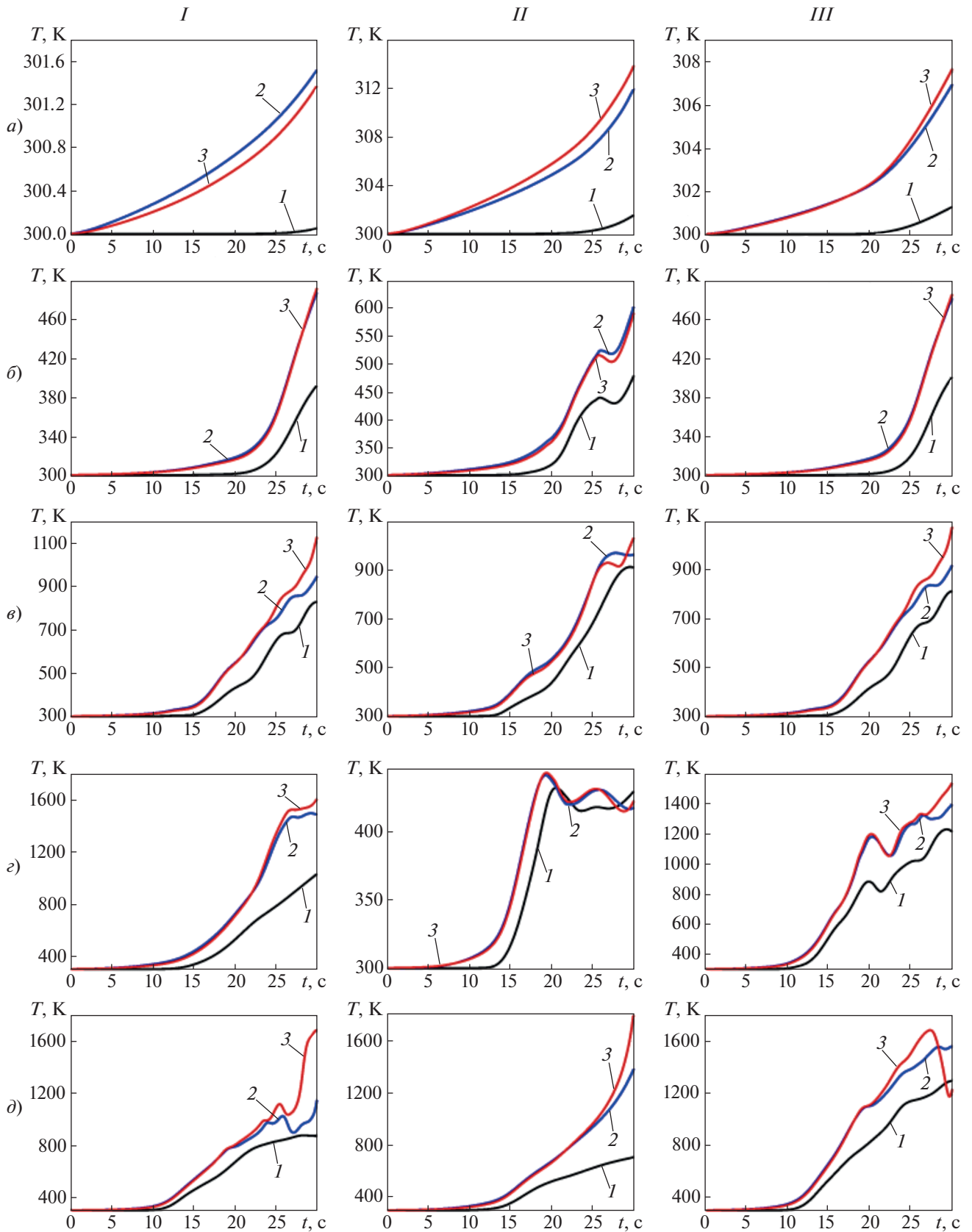


Рис. 8. Зависимость температуры узлов T от времени t для левого (I), среднего (II) и правого (III) узла пластины при работе одной (a), трех (б), пяти (в) и девяти (д) горелок [на графиках показаны различные варианты аппроксимаций SP_0 (1), SP_1 (2) и SP_3 (3)]

тельствуют о более сильном нагреве в случае, когда лучистый тепловой поток учитывался. Однако при этом наблюдается более интенсивное образование вихрей. Увеличение частоты возникновения вихрей и их интенсивности приводит к росту пульсаций температуры на поверхности печи (внешняя поверхность пластины, см. рис. 1), вызванных воздействием вихрей. Это хорошо видно при работе пяти, семи и девяти горелок. Интенсивность турбулентного течения, возникающего в печи, возрастает при увеличении подвода тепла. Этот вывод подтверждает тот факт, что при использовании SP_3 -аппроксимации наблюдаются более сильные изменения теплообмена по сравнению с теми, что получены при SP_1 -аппроксимации. Правый узел на верхней поверхности пластины является вторым узлом, в котором контролировалось изменение температуры в зависимости от времени.

На рис. 8 показано также изменение температуры правого узла до момента времени $t = 30$ с при работе одной, трех, пяти, семи и девяти горелок. Результаты, полученные в нестационарном режиме, свидетельствуют о более интенсивной турбулизации среды и возникновении более мощных вихрей в правой части объема печи, что приводит к более значительным колебаниям температуры, особенно при включении пяти, семи и девяти горелок.

Зависимость температуры от времени для среднего узла также представлена на рис. 8. В окрестности этого узла наблюдается минимальный уровень турбулентности, а циркуляция нагреваемой среды осуществляется к боковым стенкам печи и вдоль них, а не по центру пластины.

Помимо этого, на рис. 8 продемонстрированы изменения температуры среднего узла в зависимости от времени при разных моделируемых условиях эксплуатации. Такие изменения вызваны большей разностью температур, из-за которой возникает течение, направленное к боковым граням пластины, так как наименьшая температура наблюдается под пластиной. Видно, что при работе нескольких горелок преобладает лучистый теплообмен, который фактически и определяет температуру узла. Влияние лучистого теплообмена резко возрастает в зависимости от времени. Однако при включении девяти горелок нагревается весь объем печи, в результате лучистый тепловой поток, отраженный от поверхности пластины, становится наибольшим по сравнению с другими исследованными режимами. Полученные данные свидетельствуют о том, что температуры у боковых стенок печи не одинаковы. Это связано с неравномерным радиационно-конвективным переносом тепла в нестационарном режиме, обуславливающим нестабильные перетоки

тепла в боковых направлениях в рассматриваемый момент времени.

ВЫВОДЫ

1. Благодаря использованию стабилизированного метода конечных элементов при решении уравнений Навье – Стокса для несжимаемой жидкости и применению упрощенных аппроксимаций был численно исследован смешанный радиационно-конвективный тепловой поток в объеме печи.
2. Предложенный метод позволил решить систему уравнений, описывающих процессы внутри печи, и получить устойчивые достоверные результаты.
3. Такой подход может дать точное решение задачи для нестационарного ламинарного течения.
4. Получены поперечные распределения температуры в печи при постоянном числе Рейнольдса для пяти различных режимов ее эксплуатации.
5. Результаты исследования необходимы для поддержания требуемого распределения температуры поверхности нагреваемого объекта, уменьшения конвективного теплопереноса к своду печи (так как используются вертикально установленные горелки), выбора необходимых размеров печи, увеличения срока ее службы, снижения расхода топлива и определения нужного числа горелок и режимов их работы. Полученная информация будет использована в следующих работах, посвященных исследованию динамических упругих (изгибных) деформаций в условиях теплового воздействия.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Авторы выражают благодарность за поддержку в проведении исследования, оказанную в рамках проекта CSIC по контракту МТМ2017 – 89423-Р.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ishii T., Zhang C., Sugiyama S.** Numerical modeling of an industrial aluminium melting furnace // J. Energy Res. Technol. 1998. V. 120. P. 276–284.
2. **Nieckele A.O., Naccache M.F., Gomes M.S.P.** Numerical modeling of an industrial aluminium melting furnace // J. Energy Res. Technol. 2004. V. 126. Is. 1. P. 72–81.
<https://doi.org/10.1115/1.1625396>
3. **Simulation** of fluid flow and gaseous radiation heat transfer in a natural gas-fired furnace / G. Song, T. Björge, J. Holen, B.F. Magnussen // Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow. 1997. V. 7. No. 2/3. P. 169–180.
<https://doi.org/10.1108/09615539710163248>

4. **Seaid M., El-Amrani M.** Finite element P_1 solution of unsteady thermal flow past a circular cylinder with radiation // *Int. J. Comput. Math.* 2008. V. 85. Is. 3–4: Recent Advances in Computational and Applied Mathematics in Science and Engineering. P. 641–656. <https://doi.org/10.1080/00207160601167060>
5. **Houzeaux G., Codina R.** An iteration-by-subdomain overlapping Dirichlet/Robin domain decomposition method for advection–diffusion problems // *J. Comput. Appl. Math.* 2003. V. 158. Is. 2. P. 243–276. [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(03\)00447-3](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(03)00447-3)
6. **Felippa C., Geers T.L.** Partitioned analysis for coupled mechanical systems // *Eng. Comput.* 1988. V. 5. No. 2. P. 123–133. <https://doi.org/10.1108/eb023730>
7. **Design** and performance of an experimental burner operating on agricultural wastes / J. Moreno Clavel, M.D. Moreno Grau, S. Moreno Grau, J.A. Cascales Pujalte // *Proc. of the 2nd European Conf. on Industrial Furnaces and Boilers*. Vilamoura, Portugal, 2–5 Apr. 1991.
8. **Barr P.** The development, verification and application of a steady-state thermal model for the pusher-type reheat furnace // *Metall. Mater. Trans. B.* 1995. V. 26. P. 851–869. <https://doi.org/10.1007/BF02651732>
9. **Chapman K.S., Ramadhyani S., Viskanta R.** Modeling and parametric studies of heat transfer in a direct-fired batch reheating furnace // *J. Heat Treating*. 1990. V. 8. P. 137–146. <https://doi.org/10.1007/BF02831634>
10. **Altschuler E., Marino P., Pignotti A.** Numerical models of reheating gas furnaces in steel industry // *Proc. of the 4th ISHMT/ASME Heat and Mass Transfer Conf.* Pune, India, 12–14 Jan. 2000. P. 37–47.
11. **Harish J., Dutta P.** Heat transfer analysis of pusher type reheat furnace // *Ironmaking & Steelmaking: Process., Prod. Appl.* 2005. V. 32. Is. 2. P. 151–158. <https://doi.org/10.1179/174328105X23923>
12. **Kim M.Y.** A heat transfer model for the analysis of transient heating of the slab in a direct-fired walking beam type reheat furnace // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2007. V. 50. Is. 19–20. P. 3740–3748. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.02.023>
13. **Klar A., Lang J., Seaid M.** Adaptive solution of SP_N -approximations to radiative heat transfer in glass // *Int. J. Therm. Sci.* 2005. V. 44. Is. 11. P. 1013–1023. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2005.04.001>
14. **Giani S., Seaid M.** hp -adaptive discontinuous Galerkin methods for simplified P_N approximations of frequency-dependent radiative transfer // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2016. V. 301. P. 52–79. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.12.013>
15. **Jaluria Y.** Natural convection heat and mass transfer. Oxford: Pergamon Press, 1980.
16. **Mihalas D., Mihalas B.S.** Foundations of radiation hydrodynamics. N.Y.: Oxford University Press, 1984.
17. **Modest M.F.** Radiative heat transfer. 3rd ed. Academic Press, 2013.
18. **A comparison** of approximate models for radiation in gas turbines / M. Frank, M. Seaid, A. Klar, R. Pinnau, G. Thommes, J. Janicka // *Prog. Comput. Fluid Dyn., An Intern. J. (PCFD)*. 2004. V. 4. No. 3/4/5. P. 191–197. <https://doi.org/10.1504/PCFD.2004.004087>
19. **Seaid M., Klar A., Pinnau R.** Numerical solvers for radiation and conduction in high temperature gas flows // *J. Flow Turbulence Combust.* 2005. V. 75. P. 173–190. <https://doi.org/10.1007/s10494-005-8589-y>
20. **Efficient** numerical methods for radiation in gas turbines / M. Seaid, M. Frank, A. Klar, R. Pinnau, G. Thommes // *J. Comput. Appl. Math.* 2004. V. 170. Is. 1. P. 217–239. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.01.003>
21. **Numerical** methods and optimal control for glass cooling processes / G. Thömmes, R. Pinnau, M. Seaid, T. Götz, A. Klar // *Transport Theory Statistical Phys.* 2002. V. 31. Is. 4–6. P. 513–529. <https://doi.org/10.1081/TT-120015512>
22. **Seaid M.** Multigrid Newton – Krylov method for radiation in diffusive semitransparent media // *J. Comput. Appl. Math.* 2007. V. 203. Is. 2. P. 498–515. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.04.016>
23. **Radiation** models for thermal flows at low Mach number / I. Teleaga, M. Seaid, I. Gasser, A. Klar, J. Struckmeier // *J. Comput. Phys.* 2006. V. 215. Is. 2. P. 506–525. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.11.015>
24. **Süli E.** Convergence and nonlinear stability of the Lagrange – Galerkin method for the Navier – Stokes equations // *Numer. Math.* 1988. V. 53. P. 459–483. <https://doi.org/10.1007/BF01396329>
25. **Temperton C., Staniforth A.** An efficient two-time-level semi-Lagrangian semi-implicit integration scheme // *Quartely J. Royal Meteorol. Soc.* 1987. V. 113. Is. 477. P. 1025–1039. <https://doi.org/10.1002/qj.49711347714>
26. **El-Amrani M., Seaid M.** Numerical simulation of natural and mixed convection flows by Galerkin-characteristic method // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 2006. V. 53. Is. 12. P. 1819–1845. <https://doi.org/10.1002/fld.1384>
27. **Effect** of the burner position on an austenitizing process in a walking-beam type reheating furnace / A.M. García, A.F. Colorado, J.E. Obando, C.E. Arrieta, A.A. Amell // *Appl. Therm. Eng.* 2019. V. 153. P. 633–645. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.02.116>
28. **Stabilized** finite element solution to handle complex heat and fluid flows in industrial furnace the using immersed volume method / E. Hachem, T. Kloczko, H. Dignonnet, T. Coupez // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 2012. V. 68. Is. 1. P. 99–121. <https://doi.org/10.1002/fld.2498>

A Second-Order Mixed Finite Element Method for Convection-Radiation Flows in Furnaces with Burners

Jaafar Albadr^{a, *}, Mofdi El-Amrani^b, and Mohammed Seaid^a

^a Department of Engineering, University of Durham, South Road, Durham, DH1 3LE UK

^b Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Rey Juan Carlos, Mostoles, Madrid, 28933 Spain

*e-mail: jnalbader@yahoo.com

Abstract—We present a class of simplified approximations for modelling heat transfer in a two-dimensional furnace with inclusions. The governing equations are the well-established thermal incompressible Navier – Stokes equations subject to the Boussinesq approximation for modelling the change in density. Simplified P_N -approximations are carried out for the radiative transfer which is coupled with convection. A Taylor – Hood finite elements technique has been adopted to solve the equations using triangular meshes. The Galerkin-characteristics method is accounted for the dominant advection. Numerical results are presented under the operation of different burners and comparisons between simulations without radiation and with radiation are discussed. Results show that the temperature on the sides of the furnace is not equal. This is due to the fact that the unsteady convection-radiation heat draws the unstable heat flow towards the sides at the chosen time. The effect of higher value of Reynolds number as far as heat transfer is concerned, is that an additional mechanism of heat transfer in the azimuthal and radial directions becomes available and higher. This is commonly termed “eddy transport” and is intense, providing much better transfer of energy across the flow at a given position than in lower value of Reynolds number. Another difference worth noting is the extent of the thermal entrance region in which the transverse temperature distribution becomes fully developed. This region is relatively short in operation with 7 and 9 burners (precisely because of the intense turbulent transverse transport of energy), whereas it tends to be long under the operation of 1 and 3 burners.

Keywords: radiative heat transfer, incompressible flows, mixed finite element method, Navier – Stokes equations, Galerkin-characteristic, simplified P_N -approximations