

---

**ТЕПЛО- И МАССООБМЕН,  
СВОЙСТВА РАБОЧИХ ТЕЛ И МАТЕРИАЛОВ**

---

**ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ  
ВО ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ТЕПЛООТДАЧИ<sup>1</sup>**© 2025 г. В. А. Кудинов<sup>а</sup>, \*, Е. В. Котова<sup>а</sup>, С. В. Зайцев<sup>а</sup>, Е. В. Стефанюк<sup>а</sup><sup>а</sup>Самарский государственный технический университет, Молодогвардейская ул., д. 244, г. Самара, 443100 Россия

\*e-mail: totig@samgtu.ru

Поступила в редакцию 22.07.2024 г.

После доработки 30.10.2024 г.

Принята к публикации 30.10.2024 г.

На основе определения дополнительных граничных условий и дополнительной искомой функции (ДИФ) получено приближенное аналитическое решение задачи теплопроводности для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях третьего рода с переменным во времени коэффициентом теплоотдачи. Следуя интегральному методу теплового баланса, решение разделяют на две стадии по времени. Первая стадия включает временной интервал нерегулярного режима теплообмена, а вторая – регулярного режима. В качестве ДИФ на первой стадии принимается функция, характеризующая перемещение фронта температурного возмущения по координате  $\xi$  во времени. На второй стадии в качестве ДИФ рассматривается функция, характеризующая изменение во времени температуры в центре симметрии, в котором задано граничное условие отсутствия теплообмена. Использование ДИФ на обеих стадиях позволяет сводить решение исходного уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения относительно ДИФ. Решая это уравнение на второй стадии, находят собственные числа, определяемые в классических методах из краевой задачи Штурма – Лиувилля, в которой для каждого конкретного числа Био численным методом решается тригонометрическое трансцендентное уравнение. Следовательно, в данном случае рассматривается другое направление определения собственных чисел, позволяющее получать формулу, из которой можно находить собственные числа при любом конкретном числе Био. Дополнительные граничные условия приводят в таком виде, чтобы их выполнение при нахождении искомого решения было эквивалентно таковому при решении исходного дифференциального уравнения в граничных точках. Показано, что решение уравнения в точках границы приводит к его решению и внутри рассматриваемой области, при этом исключается его непосредственное интегрирование по пространственной переменной и ограничивается лишь выполнение интеграла теплового баланса – осредненного исходного дифференциального уравнения.

*Ключевые слова:* переменный во времени коэффициент теплоотдачи, интегральный метод теплового баланса, аналитическое решение, дополнительная искомая функция, дополнительные граничные условия, фронт температурного возмущения

DOI: 10.56304/S0040363624700723

В классической теории теплопроводности коэффициент теплоотдачи, характеризующий интенсивность теплообмена между твердым телом и окружающей средой, принимается не зависящим от температуры и времени. Для его определения используются эмпирические критериальные уравнения, связывающие его значение лишь с температурным напором между телом и средой. При этом исключается влияние на коэффициент теплоотдачи температуры стенки, изменяющейся в нестационарном процессе. Согласно результатам

экспериментальных исследований, в нестационарных процессах коэффициент теплоотдачи существенно изменяется во времени [1–4]. Закон этого изменения определяется температурой стенки (при неизменной температуре среды), которая заранее неизвестна и может быть получена лишь в процессе решения задачи. Следовательно, постоянство коэффициентов теплоотдачи в реальных процессах не реализуется точно. В то же время их переменность также не может быть выражена точными аналитическими зависимостями ввиду изменяющегося во времени температурного напора по неизвестной заранее закономерности, в связи с чем переменность коэффициента теплоотдачи может быть оценена лишь некоторыми приближенными зависимостями [1–5].

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSSE-2024-0014) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета (создание новых молодежных лабораторий).

В рамках классических методов согласование решения линейного уравнения теплопроводности с граничным условием третьего рода с переменным во времени коэффициентом теплоотдачи не представляется возможным. Использование операционного метода или метода тепловых потенциалов позволяет свести уравнение теплопроводности к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Решение задачи в конечном итоге представляется в виде бесконечного ряда последовательных приближений. Решения классическими методами рассмотрены в работах [1, 6–8].

Для решения задач такого рода весьма эффективными оказываются приближенные аналитические методы, среди которых следует отметить метод Кармана – Польгаузена, используемый при решении задач динамического пограничного слоя [9]. Этот метод был распространен на задачи теплопроводности путем введения движущегося по пространственной переменной во времени фронта температурного возмущения, определяющего толщину термического (прогретого) слоя, за пределами которого тело находится при начальной температуре, т.е. принимается модель конечной скорости распространения тепла, несмотря на то что решению подлежит параболическое уравнение теплопроводности. Исходное дифференциальное уравнение путем осреднения в пределах толщины термического слоя заменяется интегральным соотношением (интегралом теплового баланса). Искомый температурный профиль принимается в виде полиномиальной зависимости, неизвестные коэффициенты которой находятся в соответствии с граничными условиями и условиями, задаваемыми на фронте температурного возмущения. Ввиду ограниченного количества этих условий температурный профиль принимается в виде квадратичной параболы, что приводит к низкой точности получаемых решений [10–12]. Для повышения точности в работах [13–15] используются дополнительные граничные условия (ДГУ), позволяющие повысить степень аппроксимирующего полинома. В работах [13, 16] этот метод применен для решения задачи теплопроводности при линейном изменении коэффициента теплоотдачи во времени. Среди других приближенных аналитических методов следует отметить метод осреднения функциональных поправок [17], метод сведения исходного дифференциального уравнения к уравнению Фредгольма второго рода и др. [18].

Далее рассматривается, как к решению задачи теплопроводности для бесконечной пластины при экспоненциальном изменении коэффициента теплоотдачи во времени можно применить интегральный метод теплового баланса

$$\alpha(\tau) = \alpha_0 \exp(\beta\tau), \quad (1)$$

где  $\alpha_0$  – начальное значение коэффициента теплоотдачи (при  $\tau = 0$ );  $\tau$  – время;  $\beta$  – коэффициент.

Краевая задача для бесконечной пластины с симметричными граничными условиями третьего рода в данном случае при  $\beta > 0$  представляется в виде

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (2)$$

$$\tau > 0; \quad 0 \leq x \leq \delta; \quad T(x, 0) = T_0; \quad (3)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = \alpha_0 \exp(\beta\tau) [T_{cp} - T(0, \tau)]; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T(\delta, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

где  $T$  – температура тела;  $x$  – координата;  $T_0$  – начальная температура;  $T_{cp}$  – температура среды;  $a, \lambda$  – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности;  $\delta$  – половина толщины пластины;  $T(x, \tau)$  – искомая функция.

Для приведения задачи (2)–(5) к безразмерному виду вводятся следующие обозначения:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_{cp} - T_0}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}, \quad (6)$$

где  $\Theta, \xi, Fo$  – безразмерные температура, координата, число Фурье (безразмерное время).

С учетом (6) задача (2)–(5) выглядит так:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}; \quad (7)$$

$$Fo > 0; \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad \Theta(\xi, 0) = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} - Bi_0 \exp(\gamma Fo) [\Theta(0, Fo) - 1] = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} = 0, \quad (10)$$

где  $Bi_0 = \frac{\alpha_0 \delta}{\lambda}$  – число Био;  $\gamma = \frac{\beta \delta^2}{a}$  – безразмерный комплекс.

Для решения задачи (7)–(10) принимается допущение о конечной скорости распространения тепла. Для этого вводится в рассмотрение дополнительная искомая функция  $q_1(Fo)$ , характеризующая перемещение фронта температурного возмущения по координате  $\xi$  во времени. Следуя интегральному методу теплового баланса, решение задачи (7)–(10) делят на две стадии по времени. Первая стадия включает в себя диапазон времени  $0 \leq Fo \leq Fo_1$ , а вторая –  $Fo_1 \leq Fo < \infty$ . На первой стадии вводится новая (дополнительная) искомая функция  $q_1(Fo)$ , характеризующая перемещение фронта температурного возмущения по координате  $\xi$  во времени  $Fo$  от  $\xi = 0$  (при  $Fo = 0$ )

до  $\xi = 1$  (при  $Fo = Fo_1$ ), где  $Fo_1$  – время достижения фронтом температурного возмущения координаты  $\xi = 1$ . Функция  $q_1(Fo)$  имеет размерность длины, и ее введение означает принятие допущения о постепенном проникновении тепла внутрь пластины и, следовательно, о ее конечной скорости, несмотря на то что решению подлежит параболическое уравнение теплопроводности. Данное противоречие снимается тем, что с увеличением числа приближений ( $n$ ) скорость перемещения фронта температурного возмущения возрастает и при  $n \rightarrow \infty$  она устремляется к бесконечному значению и, следовательно,  $Fo_1 \rightarrow 0$ . В связи с чем количество приближений необходимо ограничивать таким их числом, при котором скорость перемещения фронта температурного возмущения совпадает со скоростью тепловой волны  $v$ , определяемой по формуле  $v = \sqrt{a/\tau_r}$ , где  $\tau_r$  – время релаксации [19].

При  $Fo = Fo_1$  [ $q_1(Fo_1) = 1$ ] понятие фронта температурного возмущения теряет смысл и начинается вторая стадия теплообмена. Здесь вводится дополнительная искомая функция  $q_2(Fo)$ , характеризующая изменение температуры во времени в точке  $\xi = 1$ . Начальным условием в краевой задаче для второй стадии является распределение температуры, полученное на первой стадии при  $Fo = Fo_1$ .

Математическая постановка задачи для первой стадии имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}; \quad (11)$$

$$0 < Fo \leq Fo_1; \quad 0 \leq \xi \leq q_1(Fo);$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} - Bi_0 \exp(\gamma Fo) [\Theta(0, Fo) - 1] = 0; \quad (12)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} = 0, \quad (14)$$

где соотношения (13), (14) представляют собой условия сопряжения прогретой и непрогретой зон. Согласно (13) температура в точке расположения фронта температурного возмущения  $\xi = q_1(Fo)$  равна начальной температуре  $\Theta(\xi, 0) = 0$ . Согласно (14) тепловой поток за пределами фронта возмущения отсутствует. Следовательно, температурные кривые в точке  $\xi = q_1(Fo)$  будут касательными к линии начальной температуры.

В задаче (11)–(14) введена дополнительная искомая функция  $q_1(Fo)$  при начальном условии

$$q_1(Fo)|_{Fo=0} = 0. \quad (15)$$

Решение задачи (11)–(14) выглядит следующим образом:

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(q_1) \xi^k, \quad k = \overline{0, n}, \quad (16)$$

где  $b_k[q_1(Fo)]$  – неизвестные функции, зависящие от времени.

Для вычисления  $b_k$  используются основные (12)–(14) и некоторые дополнительные граничные условия, представляемые в таком виде, чтобы их выполнение при нахождении искомого решения (16) было эквивалентно их выполнению при решении уравнения (11) в граничной точке  $\xi = 0$  и на фронте температурного возмущения  $\xi = q_1(Fo)$ .

Для определения ДГУ в точке  $\xi = 0$  следует проинтегрировать соотношение (12) по переменной  $Fo$ :

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} - \gamma Bi_0 \exp(\gamma Fo) [\Theta(0, Fo) - 1] - Bi_0 \exp(\gamma Fo) \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = 0. \quad (17)$$

Уравнение (11) после дифференцирования по переменной  $\xi$  принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} = \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^3}. \quad (18)$$

Сопоставив (17) с (18) и учтя (11) применительно к точке  $\xi = 0$ , выражение для ДГУ можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} - Bi_0 \exp(\gamma Fo) \times \left\{ \gamma [\Theta(0, Fo) - 1] + \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} \right\} = 0. \quad (19)$$

Для получения дополнительных граничных условий в точке  $\xi = q_1(Fo)$  следует проинтегрировать соотношение (13) по  $Fo$ . Так как в точке  $\xi = q_1(Fo)$  переменная  $\xi$  является функцией  $Fo$ , то  $\Theta(\xi, Fo)$  будет сложной функцией:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} \Big|_{\xi=q_1} &= \left[ \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Fo} \right]_{\xi=q_1} + \\ &+ \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} \Big|_{\xi=q_1} = \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=q_1} \frac{\partial q_1}{\partial Fo} + \\ &+ \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} \Big|_{\xi=q_1} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Соотношение (20) с учетом (14) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} \Big|_{\xi=q_1} = 0. \quad (21)$$

После сопоставления (21) с уравнением (11) для точки  $\xi = q_1(\text{Fo})$  выражение для ДГУ можно записать так:

$$\frac{\partial^2 \Theta(q_1, \text{Fo})}{\partial \xi^2} = 0. \quad (22)$$

Для нахождения второго ДГУ в точке  $\xi = q_1(\text{Fo})$  необходимо продифференцировать соотношение (14) по  $\text{Fo}$ , принимая во внимание, что  $\Theta(\xi, \text{Fo})$  в этой точке является сложной функцией:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \left[ \frac{\partial \Theta(q_1, \text{Fo})}{\partial \xi} \right] &= \\ &= \frac{\partial^2 \Theta(q_1, \text{Fo})}{\partial \xi^2} \frac{\partial q_1}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 \Theta(q_1, \text{Fo})}{\partial \xi \partial \text{Fo}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Соотношение (23) с учетом (22) записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \Theta(q_1, \text{Fo})}{\partial \xi \partial \text{Fo}} = 0. \quad (24)$$

Выражение (24) с учетом (18) приводится к еще одному ДГУ в точке  $\xi = q_1(\text{Fo})$ :

$$\frac{\partial^3 \Theta(q_1, \text{Fo})}{\partial \xi^3} = 0. \quad (25)$$

Дифференцируя найденные ДГУ (19), (22), (25) по  $\text{Fo}$ , а уравнение (11) – по  $\xi$  и сравнивая полученные результаты, можно получить и последующие ДГУ. В частности, в точке  $\xi = 0$  оно имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^5 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^5} - \text{Bi}_0 \exp(\gamma \text{Fo}) \times \\ &\times \left\{ \gamma^2 [\Theta(0, \text{Fo}) - 1] + 2\gamma \frac{\partial^2 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^2} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^4 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^4} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Для ДГУ в точке  $\xi = q_1(\text{Fo})$  можно записать общую формулу

$$\frac{\partial^i \Theta(q_1, \text{Fo})}{\partial \xi^i} = 0, \quad i = 2, 3, 4, \dots \quad (27)$$

При получении искомого решения (16) выполнение дополнительных граничных условий эквивалентно выполнению их при решении уравнения (11) в граничной точке  $\xi = 0$  и на фронте температурного возмущения  $\xi = q_1(\text{Fo})$ . В работах [14, 20] приводятся доказательства

теорем, из которых следует, что выполнение условий на границах при большом числе приближений при нахождении искомого решения приводит к их выполнению и внутри рассматриваемой области.

Для получения решения в первом приближении можно подставить (16) (ограничиваясь тремя членами ряда) в граничные условия (12)–(14). Относительно неизвестных функций  $b_k(q_1)$  ( $k = 0, 1, 2$ ) имеется система трех алгебраических линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_1 - \text{Bi}_0 \exp(\gamma \text{Fo})(b_0 - 1) &= 0; \\ b_0 + b_1 q_1 - b_2 q_1^2 &= 0; \\ b_1 + 2b_2 q_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

При решении системы уравнений (28) получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} b_0(q_1) &= 1 - \frac{2}{2 + \text{Bi}_0 \exp(\gamma \text{Fo})(2 - q_1)}; \\ b_1(q_1) &= -\frac{2\text{Bi}_0 \exp(\gamma \text{Fo})}{2 + \text{Bi}_0 \exp(\gamma \text{Fo})(2 - q_1)}; \\ b_2(q_1) &= \frac{\text{Bi}_0 \exp(\gamma \text{Fo})}{q_1 [2 + \text{Bi}_0 \exp(\gamma \text{Fo})(2 - q_1)]}. \end{aligned}$$

С учетом  $b_k(q_1)$  соотношение (16) выглядит как

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \frac{2 + \text{Bi}_0 \xi \exp(\gamma \text{Fo}) \left( 2 - \frac{\xi}{q_1} \right)}{2 + \text{Bi}_0 \exp(\gamma \text{Fo}) \left( 2 - \frac{\xi}{q_1} \right)}. \quad (29)$$

Для выполнения следующих операций необходимо, чтобы соотношение (29) удовлетворяло уравнению (11), осредненному в пределах глубины термического слоя, т.е. интегралу теплового баланса следующего вида:

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} d\xi = \int_0^{q_1} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (30)$$

Подставляя (29) в (30), после определения интегралов относительно  $q_1(\text{Fo})$  можно записать обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dq_1}{d\text{Fo}} - \frac{2q_1 [3\text{Bi}_0 \exp(\gamma \text{Fo}) - \gamma q_1] + 12}{q_1 [\text{Bi}_0 \exp(\gamma \text{Fo}) q_1 + 4]} = 0. \quad (31)$$

Используя метод, изложенный в [11], можно получить аналитическое решение уравнения (31) при начальном условии (15)

$$q_1(\text{Fo}) = 2.584\text{Fo}^{0.508}. \quad (32)$$

При  $q_1(\text{Fo}) = 1$  время достижения фронтом температурного возмущения координаты  $\xi = 1$ , т.е. время окончания первой стадии процесса, составляет  $\text{Fo}_1 = 0.1544$ .

После подстановки (32) в (29) получается

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{Bi_0 \exp(\gamma Fo)}{2 + 2.584 Bi_0 \exp(\gamma Fo)} \times \left( 2.584 Fo^{0.508} - 2\xi + \frac{\xi^2}{2.584 Fo^{0.508}} \right). \quad (33)$$

Соотношение (33) представляет собой решение задачи (11)–(14) в первом приближении. Оно точно удовлетворяет граничным условиям (12)–(14) и приближенно – уравнению (11). При  $\gamma = 0$  соотношение (33) будет решением задачи (11)–(14) при постоянном во времени коэффициенте теплоотдачи. Результаты расчетов для этого случая в точке  $\xi = 0$  при  $Bi_0 = 1$  и  $\gamma = 0$  отличаются от точного решения [2] не более чем на 3%.

Повышение точности связано с увеличением числа членов ряда (16). Для решения задачи (11)–(14) во втором приближении выражение (16) подставляют (ограничиваясь шестью членами ряда) в основные (12)–(14) и дополнительные (19), (22), (25) граничные условия. При этом относительно неизвестных  $b_k q_1$  ( $k = \overline{0,5}$ ) получается система шести алгебраических линейных уравнений, решение которой выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} b_0 &= \eta(8\eta - \gamma q_1^2 + 36)/Z; & b_1 &= -20\eta(\eta + 6)/(q_1 Z); \\ b_3 &= 10\eta(\gamma q_1^2 + 12)/(q_1^2 Z); \\ b_4 &= 20\eta \left( 2 \frac{\eta}{q_1} - \gamma q_1 \right) / (q_1^2 Z); \\ b_5 &= -5(8\eta - 3\gamma q_1^2 + 12)\eta / (q_1^4 Z); \\ b_6 &= 4\eta(6 + 3\eta - 3\gamma q_1^2) / (q_1^5 Z), \end{aligned}$$

где  $\eta = Bi_0 \exp(\gamma Fo) q_1$ ;  $Z = 120 + \eta(56 + q_1^2 \gamma + 8\eta)$ .

С учетом найденных значений  $b_k(q_1)$  соотношение (16) принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) &= \\ &= \frac{\eta(\xi - q_1)^4 [24\xi + q_1(36 - \gamma q_1^2 + 8\eta - 4\gamma \xi q_1) + 2\xi \eta]}{q_1^5 (8\eta^2 - \gamma \eta q_1^2 + 56\eta + 120)}. \end{aligned} \quad (34)$$

После подстановки (34) в (30) относительно  $q_1(Fo)$  получается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого, если следовать методу [11], имеет вид (при  $Bi_0 = 1, \gamma = 1$ )

$$q_1(Fo) = 5.5375 Fo^{0.7186}. \quad (35)$$

Принимая  $q_1(Fo) = 1$ , можно найти  $Fo_1 = 0.092$  – время окончания первой стадии процесса, которое меньше времени первого приближения, т.е. скорость перемещения фронта температурного возмущения с увеличением числа приближений возрастает.

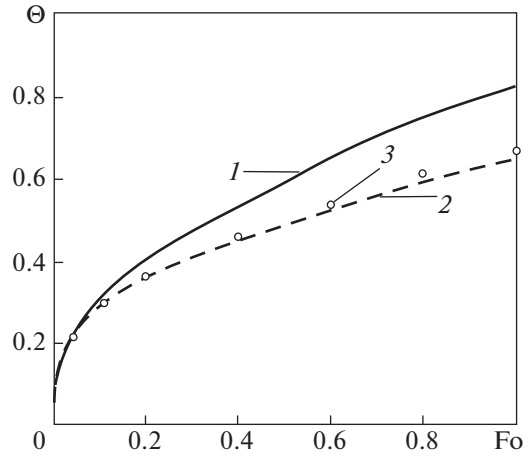


Рис. 1. Изменение температуры во времени в точке  $\xi = 0$ . 1 –  $Bi_0 = 1, \gamma = 1$ ; 2 –  $Bi_0 = 1, \gamma = 0$ ; 3 – точное решение [19]

Соотношение (34) с учетом (35) является решением задачи (11)–(14) во втором приближении. Результаты расчетов по формуле (34) отличаются от точного решения (при  $\gamma = 0$ ) не более чем на 1% (результаты расчетов при  $\gamma = 1$  приведены на рис. 1).

При  $Fo = Fo_1$  понятие фронта температурного возмущения теряет смысл и начинается вторая стадия процесса теплообмена, в которой теплообмен происходит по всей толщине пластины. Начальным условием здесь является изменение температуры, определяемое по формуле (33) в конце первой стадии, т.е. при  $Fo = Fo_1$  и  $q_1(Fo_1) = 1$ . Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}; \quad (36)$$

$$Fo \geq Fo_1; \quad 0 < \xi < 1;$$

$$\Theta(\xi, Fo_1) = \frac{Bi_0 \exp(\gamma Fo_1)}{2 + Bi_0 \exp(\gamma Fo_1)} (1 - 2\xi + \xi^2); \quad (37)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} - Bi_0 \exp(\gamma Fo) [\Theta(0, Fo) - 1] = 0; \quad (38)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} = 0. \quad (39)$$

В качестве дополнительной искомой функции вводится функция  $q_2(Fo)$ , характеризующая изменение температуры во времени в точке  $\xi = 1$ , т.е.

$$\Theta(1, Fo) = q_2(Fo). \quad (40)$$

Функция  $q_2(Fo)$  является искомой величиной для задачи (36)–(39) при ее решении любым ме-

тодом. Ее отдельное рассмотрение не изменяет эту задачу, а служит лишь вспомогательным фактором, позволяющим существенно упростить процесс получения решения и окончательное выражение для него.

Решение задачи (36)–(39) можно принять в виде следующего ряда:

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n a_k(q_2) \varphi_k(\xi), \quad (41)$$

где  $a_k(q_2)$  – неизвестные функции;  $\varphi_k(\xi) = \xi^k$  ( $k = 0, n$ ) – координатные функции.

Чтобы решение (41) удовлетворяло основным граничным условиям (38), (39) и соотношению (40), следует подставить (41) (ограничиваясь тремя членами ряда) в (38)–(40). Относительно неизвестных функций  $a_k(q_2)$  ( $k = 0, 1, 2$ ) получается следующая система трех алгебраических линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_1 - Bi_0 \exp(\gamma Fo)(a_0 - 1) &= 0; \\ a_1 + 2a_2 &= 0; \\ a_0 + a_1 + a_2 &= q_2(Fo). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Решая систему уравнений (42), можно получить

$$\begin{aligned} a_0(q_2) &= \frac{Bi_0 \exp(\gamma Fo)}{2 + Bi_0 \exp(\gamma Fo)}; \\ a_1(q_2) &= -\frac{2Bi_0 \exp(\gamma Fo)[1 - q_2(Fo)]}{2 + Bi_0 \exp(\gamma Fo)}; \\ a_2(q_2) &= -\frac{Bi_0 \exp(\gamma Fo)[1 - q_2(Fo)]}{2 + Bi_0 \exp(\gamma Fo)}. \end{aligned} \quad (43)$$

После подстановки (43) в (41) получается

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{Bi_0 \exp(\gamma Fo)}{2 + Bi_0 \exp(\gamma Fo)} \times [1 - 2[1 - q_2(Fo)]\xi + [1 - q_2(Fo)]\xi^2]. \quad (44)$$

При  $Fo = Fo_1$  ДИФ  $q_2(Fo_1) = 1$ . Соотношение (44) в этом случае приводится к начальному условию (37). Следовательно, уже на этой стадии получения решения начальное условие (37) выполняется.

Неизвестная функция  $q_2(Fo)$  соотношения (44) вычисляется по некоторому осредненному по толщине пластины уравнению (36), т.е. по интегралу теплового баланса вида

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (45)$$

При подстановке (44) в (45) после определения интегралов относительно неизвестной функции

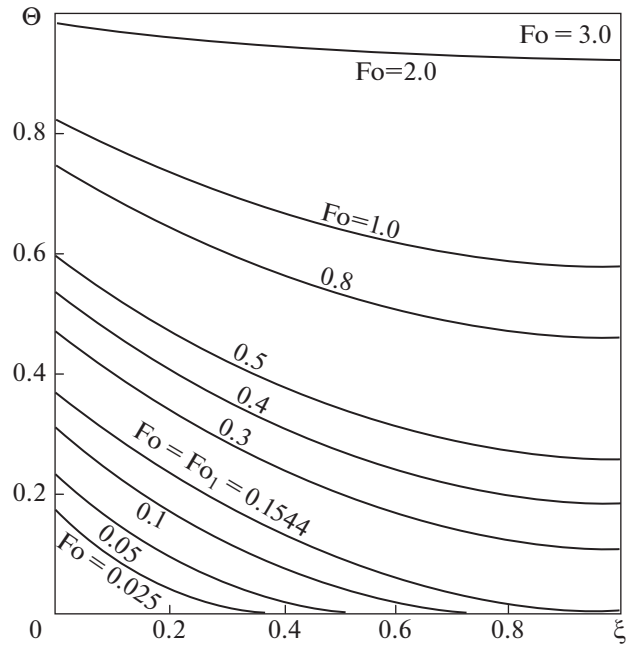


Рис. 2. Распределение температуры при  $Bi_0 = 1, \gamma = 1$

$q_2(Fo)$  получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение (при  $Bi_0 = 1, \gamma = 1$ ):

$$\frac{dq_2}{dFo} + \frac{e^{Fo}(3e^{Fo} + 5)(q_2 - 1)}{e^{2Fo} + 5e^{Fo} + 6} = 0. \quad (46)$$

Решение уравнения (46) имеет вид

$$q_2(Fo) = \frac{1}{(e^{Fo} + 3)^4} \times [c(e^{Fo} + 2) + 68e^{Fo} + 54e^{2Fo} + 12e^{3Fo} + e^{4Fo} + 1], \quad (47)$$

где  $c$  – константа интегрирования, определяемая из условия  $q_2(Fo_1) = 0$  ( $c = -55.2014$ ).

Соотношения (44), (47) представляют собой решение задачи (36)–(39) в первом приближении. Результаты расчетов по формуле (44) приведены на рис. 1, 2.

Проанализировав полученные результаты, можно сделать вывод, что при  $Bi_0 = 1$  и  $\gamma = 1$  расхождение с точным решением во всем диапазоне числа  $Fo$  не превышает 3%. Повышение точности связано с увеличением числа членов ряда (41). Для определения неизвестных функций  $a_k(q_2)$  необходимо совместно с основными использовать также и дополнительные граничные условия, которые для первой стадии получены в виде соотношений (19) и (27). Для второй стадии ДГУ в точке  $\xi = 0$  вида (19) остается неизменным. После дифференцирования граничного условия (39)

по переменной  $F_0$ , а уравнения (36) – по переменной  $\xi$  при сравнении получаемых соотношений ДГУ в точке  $\xi = 1$  для второй стадии процесса имеет вид

$$\frac{\partial^3 \Theta(1, F_0)}{\partial \xi^3} = 0. \quad (48)$$

На второй стадии необходимо также использовать ДГУ, полученное на основе соотношения (40). Дифференцируя (40) по  $F_0$  и сопоставляя полученное соотношение с уравнением (36), можно определить ДГУ

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, F_0)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial q_2(F_0)}{\partial F_0}. \quad (49)$$

Во втором приближении на второй стадии используют основные граничные условия (38), (39), соотношение (40) и ДГУ (19), (48), (49). Для неизвестных функций  $a_k(q_2)$  ( $k = 0, 5$ ) соотношения (41) имеется система шести алгебраических линейных уравнений. Дальнейшее решение как на первой, так и на второй стадии проводится в указанной последовательности.

## ВЫВОДЫ

1. На основе определения дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий получено приближенное аналитическое решение задачи теплопроводности для бесконечной пластины с симметричными граничными условиями третьего рода при экспоненциальном изменяющемся во времени коэффициенте теплоотдачи. Применение дополнительной искомой функции позволяет сводить исходное дифференциальное уравнение в частных производных к обыкновенному уравнению относительно ДИФ, при решении которого для любого конкретного числа Био находятся собственные числа краевой задачи, в отличие от классических методов, в соответствии с которыми они определяются при численном решении характеристического трансцендентного уравнения.

2. Дополнительные граничные условия находятся при использовании основных граничных условий и исходного дифференциального уравнения. Назначение ДГУ – решение исходного дифференциального уравнения в граничных точках, что, как следует из доказательства соответствующих теорем, приводит к его решению и внутри рассматриваемой области с точностью, зависящей от числа используемых ДГУ. Определяемые указанным способом ДГУ выполняются и при любом другом методе решения задачи, включая и точные аналитические решения. Дополни-

тельная искомая функция присутствует при любом методе решения задачи, отличие заключается лишь в том, что при реализации этих методов она отдельно (специально) не выделяется. Следовательно, введение ДИФ и ДГУ не приводит к искажению исходной математической постановки задачи, а позволяет лишь существенно упростить процесс получения ее аналитического решения и окончательного выражения для него.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. М.: Высшая школа, 2001.
2. **Шумаков Н.В.** Метод последовательных интервалов в теплотрии нестационарных процессов. М.: Атомиздат, 1979.
3. **Кудрявцев Е.В., Турчин И.А.** Зависимость нестационарного теплообмена от плотности теплового потока // ИФЖ. 1966. Т. 10. № 5. С. 573–575.
4. **Кудрявцев Е.В., Шумаков Н.В.** Влияние размеров и материала твердого тела на процесс нестационарного теплообмена // ИФЖ. 1961. Т. 4. № 1. С. 63–70.
5. **Коченов И.С., Никитин Ю.И.** О нестационарном конвективном теплообмене в трубах // ТВТ. 1970. Т. 8. № 2. С. 346–352.
6. **Карташов Э.М., Мосьяков В.Е.** Об одном классе задач теплопроводности с переменными во времени коэффициентами теплообмена // Изв. вузов. Авиационная техника. 1973. № 1. С. 75–82.
7. **Саломатов В.В., Гончаров Э.И.** Температурное поле неограниченной пластины при переменных значениях коэффициента теплообмена внешней среды // ИФЖ. 1968. Т. 14. № 4. С. 743–745.
8. **Саломатов В.В., Гончаров Э.И.** Температурный режим тепловыделяющих элементов при переменных значениях коэффициента теплообмена и температуры внешней среды // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1967. № 4. С. 99–103.
9. **Гудмен Т.** Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена: сб. науч. тр. М.: Атомиздат, 1967. С. 41–96.
10. **Беляев Н.М., Рядно А.А.** Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978.
11. **Био М.** Вариационные принципы в теории теплообмена. М.: Энергия, 1975.
12. **Глазунов Ю.Т.** Вариационные методы. М.: Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”; Ин-т компьютерных исследований, 2006.
13. **Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В.** Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Высшая школа, 2008.
14. **Кудинов И.В., Котова Е.В., Кудинов В.А.** Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных

- условий и дополнительных искомым функций // Сиб. журн. вычислит. математики. 2019. Т. 22. № 2. С. 153–165.
15. Кудряшов Л.И., Меньших Н.Л. Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Машиностроение, 1979.
  16. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. М.: Высшая школа, 2005.
  17. Тимошпольский В.И., Постольник Ю.С., Андрианов Д.Н. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии. Минск: Беларуская навука, 2005.
  18. Карташов Э.М., Любов Б.Я. Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности в области с движущимися границами // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1974. № 6. С. 83–111.
  19. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
  20. Федоров Ф.М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.

## Heat-Conduction Problems with Time-Variable Heat-Transfer Coefficients

V. A. Kudinov<sup>a, \*</sup>, E. V. Kotova<sup>a</sup>, S. V. Zaitsev<sup>a</sup>, and E. V. Stefnyuk<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Samara State Technical University, Samara, 443100 Russia

\*e-mail: totig@samgtu.ru

**Abstract**—Based on the definition of additional boundary conditions and an additional sought function (ASF), an approximate analytical solution of the heat-conduction problem for an infinite plate subject to Newton's symmetrical boundary conditions with a time variable heat-transfer coefficient is obtained. In accordance with the integral thermal balance method, the solution is subdivided into two stages in time. The first and the second stage include the time intervals corresponding to an irregular and a regular heat-transfer mode, respectively. At the first stage, a function characterizing the displacement with time of the temperature disturbance front along the  $\xi$  coordinate is adopted as the ASF. At the second stage, a function characterizing the change with time of the temperature at the symmetry center, in which the boundary condition of no heat transfer is specified, is considered as the ASF. Owing to the use of ASFs at both stages, it becomes possible to boil down the solution of the initial differential equation with partial derivatives to integration of an ordinary differential equation with respect to the ASF. By solving this equation at the second stage, the eigenvalues are found, which are determined in the classical methods from the Sturm–Liouville boundary value problem, in which a transcendental trigonometric equation is solved for each particular Biot number using a numerical method. Hence, in this case, another technique for determining eigenvalues is considered, which makes it possible to obtain a formula from which eigenvalues for each particular Biot number can be found. The form in which the additional boundary conditions are given is such that their satisfaction in finding the sought solution would be equivalent for the case of solving the initial differential equation at the boundary points. It is shown that the solution of the equation at the boundary points leads to its solution also inside the domain considered; in this case, direct integration of the equation along the spatial variable is excluded and is only limited to fulfilling the thermal balance integral, i.e., the averaged initial differential equation.

**Keywords:** time-variable heat-transfer coefficient, integral thermal balance method, analytical solution, additional sought function, additional boundary conditions, temperature disturbance front