
**ТЕПЛО- И МАССООБМЕН,
СВОЙСТВА РАБОЧИХ ТЕЛ И МАТЕРИАЛОВ**

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА
В КОЛЬЦЕВОЙ ТРУБЕ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ¹**© 2022 г. Н. Г. Разуванов^а, Е. А. Белавина^а, О. Н. Полянская^{а, *}, И. А. Беляев^а^аОбъединенный институт высоких температур РАН, Ижорская ул., д. 13, корп. 2, Москва, 125412 Россия

*e-mail: treize@bk.ru

Поступила в редакцию 15.11.2021 г.

После доработки 25.01.2022 г.

Принята к публикации 26.01.2022 г.

Предлагается методика решения задач гидродинамики и теплообмена в трубах с кольцевой закруткой, таких как контуры с плавными поворотами труб и змеевики. Использование криволинейной (кольцевой) системы координат упрощает решение таких задач. Вывод дифференциальных уравнений сохранения массы, импульса и энергии применительно к среде жидкого металла представлен на языке тензорного анализа в обобщенной системе координат. За основу взяты уравнения в цилиндрической системе координат, в которые добавлены дополнительные члены. Эти члены необходимы для перехода к новой (кольцевой) системе координат. В кольцевой системе базис тоже ортогональный, координаты выражаются такой же тройкой чисел. Отличие от цилиндрической системы координат заключается в том, что длина третьего базисного вектора зависит от двух других координат пространства и радиуса кольцевой закрутки трубы. Метод численного моделирования в кольцевой системе координат значительно упрощает геометрическое описание задачи, построение расчетной сетки, запись граничных условий и представление результатов. Предложенный подход позволяет моделировать задачи с различными радиусами кольцевой закрутки в рамках единой обобщенной формы. В соответствии с предложенной методикой получены поля скорости, давления и температуры при турбулентном течении жидкого металла в кольцевой трубе. В расчетах варьировался параметр радиуса кольцевой закрутки трубы. Проведенные параметрические исследования показывают принципиальные границы влияния кривизны трубы на характеристики течения и теплоотдачи в среде жидкого металла.

Ключевые слова: кольцевая система координат, дифференциальные уравнения сохранения, гидродинамика, теплообмен, жидкие металлы, коэффициент теплоотдачи, радиус закрутки трубы

DOI: 10.56304/S0040363622080070

Кольцевые трубы нередко встречаются в теплообменном, технологическом и энергетическом оборудовании [1–4]: плавные повороты в контурах, змеевики. В прямых трубах для описания формы канала и задания граничных условий наиболее удобна цилиндрическая система координат (ЦСК), при кольцевом повороте трубы логично перейти к кольцевой системе координат (КСК), если изогнуть продольные координатные оси по окружности так же, как изогнута труба. Это дает очевидные преимущества: простоту формы расчетной области и удобство задания граничных условий (граничные поверхности совпадают с координатными поверхностями). Используется структурированная расчетная сетка, которая при необходимости может быть сгущена вблизи стенки, элементы не дробятся на границах исследуемой области. Все это намного упрощает описание формы расчетной области, построение сетки, задание гранич-

ных условий, существенно уменьшает объем вычислений, а значит увеличивает скорость расчета.

Необходимо записать систему уравнений в новой системе координат и при возможности сформулировать допущения, упрощающие расчет.

Описание методики вывода уравнений в обобщенной (криволинейной) системе координат в настоящее время редко, но все-таки можно встретить в публикациях, например в [5]. Этот подход далеко не нов и уже основательно подзабыт. Подробное описание теории можно найти в монографиях, посвященных основам векторного и тензорного анализа, сформулированным во второй половине прошлого века, например в отечественных [6, 7] и зарубежных [8, 9] изданиях.

Гораздо более распространен упрощенный подход — переход к криволинейной системе координат, например течению в спирально-винтовой трубе [10], когда уравнения, записанные в декартовой системе координат, приводят к уравнениям в криволинейной системе с использованием преобразования координат и их производных. Такой же

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание № 075-01056-22-00).

Для дальнейшего изложения следует ввести некоторые понятия из векторного анализа [6, 7]:

прямой и обратный базисы; обратный базис \mathbf{e}^i находится через прямой \mathbf{e}_i : $\mathbf{e}^i = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) / [\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)]$, где индексы (i, j, k) в результате циклической перестановки принимают значения $(1, 2, 3)$;

ковариантные и контравариантные компоненты [6] соответствуют верхним и нижним индексам соответственно, так что ковариантный базис – это \mathbf{e}_i , а контравариантный, обратный ему, – \mathbf{e}^i ; вектор \mathbf{r} раскладывается по координатам прямого и обратного базисов: $\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}^i$, $x^i = (r, \varphi, z)$.

Свойства системы координат представляются как скалярное произведение базисных векторов и выражаются метрическим тензором g_{ij} . Для ковариантного базиса в винтовой системе координат

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{r}{R} \cos \varphi\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & A^2 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы метрического тензора имеет вид

$$G = |g_{ij}| = [1 + (r/R) \cos \varphi]^2 r^2 = A^2 r^2.$$

Тензор g_{ij} превращается в метрический тензор для ЦСК, если R устремить к бесконечности (соответственно A устремится к единице).

Для обратного (контравариантного) метрического тензора справедливы формулы:

$$g^{ij} = (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A^2} \end{pmatrix}; \quad (5)$$

$$G^{-1} = |g^{ij}| = \frac{1}{A^2 r^2}.$$

Скалярное произведение векторов прямого и обратного базисов по определению равно единичному (шаровому) тензору: $g_j^i = (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ (0 при $i \neq j$ и 1 при $i = j$).

Обычно рассматривают контравариантные компоненты вектора скорости как результат разложения по векторам прямого базиса: $\mathbf{V} = V^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{V} = (V^r, V^\varphi, V^z)$.

На практике используются “физические” компоненты вектора $\mathbf{V} = V^{*i}$, которые имеют одинаковую размерность – метр в секунду: $\mathbf{V} = (V^{*r}, V^{*\varphi}, V^{*z})$ [2]. Связь с “физическими” компонента-

ми осуществляется через диагональные члены метрического тензора g_{ij} (по i не суммировать!):

$$V^i = \frac{V^{*i}}{\sqrt{g_{ii}}}. \quad (6)$$

Частная производная вектора по координате в криволинейном базисе выражается следующей формулой:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^k} = \frac{\partial (V^j \mathbf{e}_j)}{\partial x^k} = \frac{\partial V^j}{\partial x^k} \mathbf{e}_j + V^j \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k}.$$

После разложения производной вектора по контравариантным компонентам получается следующий тензор:

$$V_{,k}^i = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^k} \mathbf{e}^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} + V^j \Gamma_{jk}^i. \quad (7)$$

Здесь введены символы Кристоффеля второго порядка [6, 7], которые определяют разложение производной базисного вектора по базису:

$$\Gamma_{jk}^i = \mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k}. \quad (8)$$

Символы Кристоффеля Γ_{jk}^i можно рассчитать по формулам [6]:

$$\Gamma_{jk}^i = g^{im} \cdot \Gamma_{m,jk} = g^{im} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right).$$

В КСК символы Кристоффеля имеют следующий вид:

$$\Gamma_{jk}^1 = \mathbf{e}^r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\cos \varphi}{R} A \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_{jk}^2 = \mathbf{e}^\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k} = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r \sin \varphi}{R} A \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_{jk}^3 = \mathbf{e}^z \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\cos \varphi}{R} A \\ 0 & 0 & -\frac{r \sin \varphi}{R} A \\ \frac{\cos \varphi}{R} A & -\frac{r \sin \varphi}{R} A & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения сохранения (1)–(3) в тензорном виде [6]:

$$V_{,k}^k = 0; \quad (9)$$

$$\rho (V^j \cdot V_{,k}^i) = -g^{ik} \frac{\partial \rho}{\partial x^k} + g^{km} (\mu V_{,m}^i)_{,k} + \rho f^i; \quad (10)$$

$$\rho c_p \left(V^k \cdot \frac{\partial T}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \sqrt{G} \lambda \frac{\partial T}{\partial x^j} \right). \quad (11)$$

Член в уравнении (2), связанный с вязкостью $\nabla \cdot \mu \nabla \mathbf{V}$, определяется через тензор производных от компонент вектора скорости $V_{,k}^i$, если взять ковариантную производную от тензора по правилу, заимствованному из [6]:

$$\left(\mu V_{,m}^i \right)_{,k} = \frac{\partial (\mu V_{,m}^i)}{\partial x^k} + \mu V_{,m}^j \cdot \Gamma_{jk}^i - \mu V_{,j}^i \cdot \Gamma_{km}^j. \quad (12)$$

Контравариантные компоненты объемных сил находятся согласно соотношениям $f^i = \mathbf{f}e^i$.

Далее рассматривается преобразование системы уравнений (9)–(11) в КСК. Для “физических” компонент вектора скорости $\mathbf{V} = (V^{*r}, V^{*\phi}, V^{*z})$ нужно будет учесть представление (6). Далее в формулах слагаемых индекс “*” будет опущен. В уравнениях можно выделить два вида членов: слагаемые, не связанные с закруткой потока, такие же, как и в ЦСК, и добавочные слагаемые, в которые входит радиус закрутки R или параметр A . Уравнение неразрывности (9) по виду остается точно таким же, как и в ЦСК, с добавлением слагаемого:

$$\frac{1}{AR} \left(V^r \cos \varphi - V^\phi \sin \varphi + r \frac{\partial V^z}{\partial z} \cos \varphi \right). \quad (13)$$

В левой конвективной части трех уравнений для проекций импульса (10) появятся следующие члены:

при $i = 1$

$$\left(\frac{1}{A} - 1 \right) V^z \frac{\partial V^r}{\partial z} - \frac{\cos \varphi}{AR} (V^z)^2; \quad (14)$$

при $i = 2$

$$\left(\frac{1}{A} - 1 \right) V^z \frac{\partial V^\phi}{\partial z} + \frac{\sin \varphi}{AR} (V^z)^2; \quad (15)$$

при $i = 3$

$$\left(\frac{1}{A} - 1 \right) V^z \frac{\partial V^z}{\partial z} + \frac{V^z}{AR} (V^r \cos \varphi - V^\phi \sin \varphi). \quad (16)$$

В этих выражениях первые слагаемые связаны с изменением модуля базисного вектора \mathbf{e}_z , а вторые представляют собой добавочные компоненты инерционных сил, возникающие в кольцевой системе координат, — компоненты центробежной и кориолисовой сил.

Для градиента давления добавочный член в правой части уравнения (10) имеет вид при $i = 1$

$$-\left(\frac{1}{A} - 1 \right) \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (17)$$

В уравнении сохранения энергии (11) в левой конвективной части добавится только одно слагаемое

$$\left(\frac{1}{A} - 1 \right) V^z \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (18)$$

Дополнения (14)–(18) вносят наиболее существенный вклад в уравнения (9)–(11).

Далее приводятся добавочные члены в уравнениях движения (10) в КСК для компонент силы вязкости $\mu g^{km} (V_{,m}^i)_{,k}$ (коэффициент μ внесен под знак производной для последующего перехода к осредненным уравнениям с вводом коэффициента турбулентной вязкости — уравнениям Рейнольдса):

при $i = 1$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{A^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V^r}{\partial z} \right) - \frac{\cos \varphi}{RA^2} \left(\frac{\partial (\mu V^z)}{\partial z} + \mu \frac{\partial V^z}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\mu}{RA} \left[\frac{\partial V^r}{\partial r} \cos \varphi + \left(\frac{V^\phi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V^r}{\partial \phi} \right) \sin \varphi \right] - \\ & - \frac{\mu \cos \varphi}{R^2 A^2} (V^r \cos \varphi - V^\phi \sin \varphi); \end{aligned} \quad (19)$$

при $i = 2$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{A^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V^\phi}{\partial z} \right) + \frac{\sin \varphi}{RA^2} \left(\frac{\partial (\mu V^z)}{\partial z} + \mu \frac{\partial V^z}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\mu}{RA} \left[\frac{\partial V^\phi}{\partial r} \cos \varphi - \left(\frac{V^r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V^\phi}{\partial \phi} \right) \sin \varphi \right] + \\ & + \frac{\mu \sin \varphi}{R^2 A^2} (V^r \cos \varphi - V^\phi \sin \varphi); \end{aligned} \quad (20)$$

при $i = 3$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{A^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V^z}{\partial z} \right) + \frac{1}{RA^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu (V^r \cos \varphi - V^\phi \sin \varphi) \right] + \right. \\ & \left. + \mu \frac{\partial}{\partial z} (V^r \cos \varphi - V^\phi \sin \varphi) \right\} + \\ & + \frac{\mu}{RA} \left(\frac{\partial V^z}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial V^z}{\partial \phi} \sin \varphi \right) - \frac{\mu}{R^2 A^2} V^z. \end{aligned} \quad (21)$$

В уравнении сохранения энергии (11) справа появляются новые слагаемые

$$\left(\frac{1}{A^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\lambda}{RA} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \sin \varphi \right). \quad (22)$$

При учете турбулентности с использованием двухпараметрической модели, например $k-\varepsilon$ [15], в кольцевой системе координат также появятся дополнительные слагаемые, которыми нужно дополнить уравнения в ЦСК. Поскольку уравнения

сохранения для скалярных величин k и ε похожи на уравнения сохранения энергии (энтальпии) (11), то и добавочные члены можно записать в виде, аналогичном (18) и (22). Таким образом, в левой конвективной части уравнений для $f = \{k, \varepsilon\}$ добавится только по одному слагаемому

$$\left(\frac{1}{A} - 1\right) V^z \frac{\partial f}{\partial z},$$

а в правых частях уравнений появятся новые слагаемые

$$\left(\frac{1}{A^2} - 1\right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \frac{\mu}{RA} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \sin \varphi \right).$$

Дополнительными слагаемыми, входящими в члены и связанными с генерацией или порождением турбулентности, предлагается пренебречь: они составляют не более $1/R^2$.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В этом разделе в качестве примера представлены результаты численного решения поставленной задачи в КСК. Радиусы поворота трубы выбраны достаточно большими $R = \{5d, 10d, 20d, 40d, 80d\}$, где d – внутренний радиус трубы, толщина стенки $\delta = 0.0025d$.

Уравнения (9)–(11) приводились к безразмерному виду и для осредненных переменных имели вид: уравнение движения

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}} [\nabla \cdot (1 + \varepsilon_t) \nabla \mathbf{V}] + \frac{\text{Gr}_q}{\text{Re}^2} \Theta \mathbf{g}^*; \quad (23)$$

уравнение энергии

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \Theta = -\frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla \cdot \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \varepsilon_t \right) \nabla \Theta. \quad (24)$$

Здесь p^* – динамическое давление, отнесенное к масштабу ρV_0^2 ; V_0 – средняя по сечению канала скорость теплоносителя; $\text{Re} = V_0 d / \nu$ – число Рейнольдса; ν – кинематический коэффициент вязкости; $\text{Gr}_q = g \beta q_c d^4 / (\lambda \nu^2)$ – число Грасгофа; g – ускорение свободного падения; β – коэффициент термического расширения; $\text{Pr} = \mu c_p / \lambda$ – число Прандтля; $\text{Pr}_t = \varepsilon_t / \varepsilon_q$ – турбулентное число Прандтля; ε_t – коэффициент турбулентной вязкости; ε_q – коэффициент турбулентного переноса тепла; $\Theta = (T - T_0) / (q_c d / \lambda)$ – безразмерная разность температур; $\mathbf{g}^* = \mathbf{g} / g$ – безразмерный вектор ускорения свободного падения; T – температура жидкости; T_0 – температура на входе в трубу.

Масштаб для координат r и z принимался равным внутреннему диаметру трубы $d = 2r_0$. Компоненты вектора скорости \mathbf{V} относились к V_0 . На входе в трубу профиль скорости считался единичным: $|\mathbf{V}| = 1$. На выходе из канала обеспечивалось условие постоянства расхода. Тепловой поток на внутренней стороне стенки в безразмерном виде

задавался выражением $q_c^* = 1 / \text{Pe} (\partial \Theta / \partial R)_c = -1 / \text{Pe}$ (Pe – число Пекле). Участку обогрева $50d$ предшествовал участок гидродинамической стабилизации $20d$. Турбулентное число Прандтля принималось равным $\text{Pr}_t = 1$. Уравнения (23) и (24) записаны с учетом упрощений и допущений, справедливых как для ртути, так и для других жидких металлов.

При численном решении задачи расчетная сетка имела размеры $N_r \times N_\varphi \times N_z = 50 \times 50 \times 450$ и вблизи стенок сгущалась (N_i – число ячеек по соответствующей координате).

Система уравнений (23), (24) с учетом уравнения неразрывности (1) решалась в пакете численного моделирования процессов гидродинамики и теплообмена ANES20XE [15]. Коэффициент турбулентной вязкости ε , вводился разными способами: алгебраическим – ε , рассчитывался по формулам Рейхардта [7], либо двумя уравнениями для k – ε -модели с пристенными функциями [15]. Первый упрощенный способ для моделирования турбулентности оправдал себя при численных расчетах течения жидкого металла (ртути) в прямых трубах и каналах некруглого сечения [16, 17]. Следует отметить, что результаты расчетов с использованием разных способов учета турбулентности различаются незначительно. Далее приведены некоторые результаты расчетов, в которых применялась k – ε -модель.

В серии расчетов кроме турбулентности учитывалось также влияние сил плавучести, возникающих при свободной конвекции. Вектор силы плавучести в уравнениях (10) определяется компонентами $\left(-\sin \varphi \frac{\text{Gr}_q}{\text{Re}^2} \Theta, -\cos \varphi \frac{\text{Gr}_q}{\text{Re}^2} \Theta, 0 \right)$. В расчете принималось, что $\text{Gr}_q = \{0, 1, 2, 4\} \times 10^8$. Поля безразмерной разности температур Θ были пересчитаны относительно среднemasсовой температуры \bar{T} в данном сечении:

$$\Theta = (T - \bar{T}) / (q_c d / \lambda).$$

Как уже упоминалось ранее, представленная методика расчета на основе системы дифференциальных уравнений в ЦСК путем добавления дополнительных слагаемых, возникающих в новой криволинейной системе координат, проверена на другой подобной задаче винтовой формы в ВСК в [13]. Правильность формул для добавочных слагаемых в настоящей задаче, решаемой в КСК,

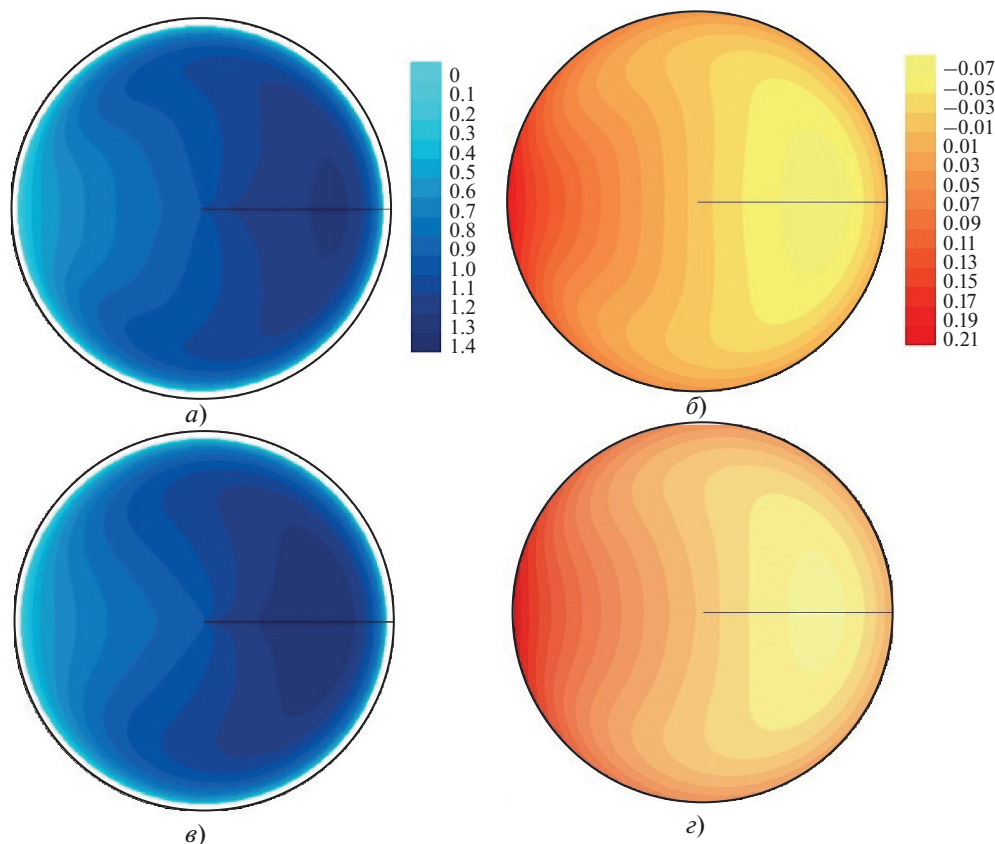


Рис. 2. Поля продольной компоненты скорости V^z (а, в) и безразмерной разности температур Θ (б, г) в сечении $z = 30d$, $Re = 20\,000$ и $Gr_q = 0$.
а, б – $R/d = 5$; в, г – $R/d = 10$

может быть подтверждена следующими рассуждениями. Авторами экспериментально и численно была решена задача течения и теплоотдачи в горизонтальной прямой трубе с однородным обогревом ($q_c = \text{const}$) с учетом термогравитационной конвекции [16]. В результате воздействия сил плавучести возникали вторичные течения в виде двух симметричных продольных вихрей. Численный расчет проводился в ЦСК с использованием аналогичных (23)–(24) уравнений и граничных условий применяемых моделей турбулентности.

Совпадение результатов расчета с опытными данными, полученными для течения ртути в трубе в идентичных расчету условиях, очень хорошее. В изогнутой трубе в КСК добавляются инерционные силы и приводят к тому же результату, что и действие термогравитационной конвекции: появлению вторичных продольных вихревых структур. Таким образом, центробежная сила по характеру действия на гидродинамику подобна действию гравитации в неизоотермическом потоке. Поэтому результаты расчетов для КСК, представленные далее, вполне правдоподобны как качественно, так и количественно (по порядку величины).

Что касается сложности и громоздкости формул добавочных слагаемых для диффузионных членов, то их вклад существенен в очень “кривых” трубах, где R близок к d . На практике труб с такой кривизной не встречается. Когда $R \approx (5–10)d$ и выше, вклад большинства этих слагаемых оказывается малым (кратен $1/R$) или ничтожно малым. В частности, V^r и V^φ много меньше V^z , слагаемые с $\partial/\partial z$ заметны только на начальном термическом участке, который для турбулентных течений не превышает $15d$. А вот вклад дополнительных инерционных сил и градиента давления здесь определяющий.

На рис. 2 показаны результаты, полученные для сечения трубы, удаленного от входа на $30d$. Полагается, что труба закручена в змеевик с минимально возможным шагом. Понятно, что в змеевике, строго говоря, базис не ортогональный. Однако если шаг змеевика мал по сравнению с радиусом закрутки, приближенно можно рассматривать задачу как течение в незамкнутой кольцевой трубе. Учитываемые дополнительные слагаемые вводились в расчет системы дифференциальных уравнений в виде функций источников членов.

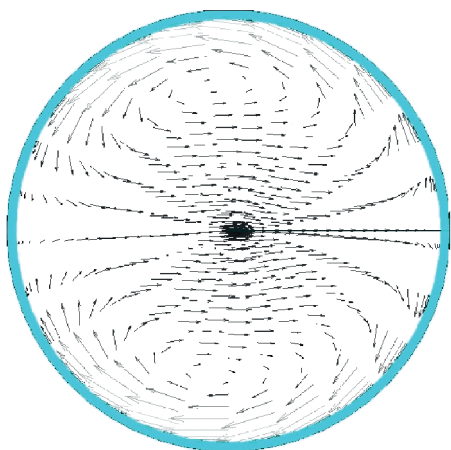


Рис. 3. Картина вторичных течений – векторов $(V^r, V^\varphi, 0)$ в сечении $z = 30d$, $Re = 20000$ и $Gr_q = 0$ для $R/d = 10$

Изоахи и изотермы на рис. 2 в сечении трубы, удаленном от входа в зону обогрева на расстояние $z = 30d$, показывают, что симметрия течения сильно нарушается как для $R = 5d$, так и для $R = 10d$.

Причина заключается в воздействии центробежной силы, которая проявляется в плоскости закрутки и прижимает поток к периферийной стороне кольцевой трубы. При этом, как показано на рис. 3, в плоскости трубы возникают вторичные течения.

При наложении термогравитационной (свободной) конвекции картина полей скорости и температуры еще более усложняется (рис. 4), симметрия в горизонтальной плоскости при этом нарушается. Кольцевой поворот лежит в горизонтальной плоскости: добавляются силы плавучести, которые на основное течение накладывают еще два вторичных вихря, лежащих в поперечном сечении трубы. Поэтому минимумы и максимумы скорости и температуры смещаются по часовой стрелке.

Распределение температуры стенки $\Theta_c = (T_c - \bar{T}) / (q_c d / \lambda)$ при кольцевой закрутке потока (в отсутствие сил плавучести) становится неоднородным с появлением локальных минимумов и максимумов при $\varphi = 0$ и $\varphi = 180^\circ$ соответственно (рис. 5, а). Наличие термогравитационной кон-

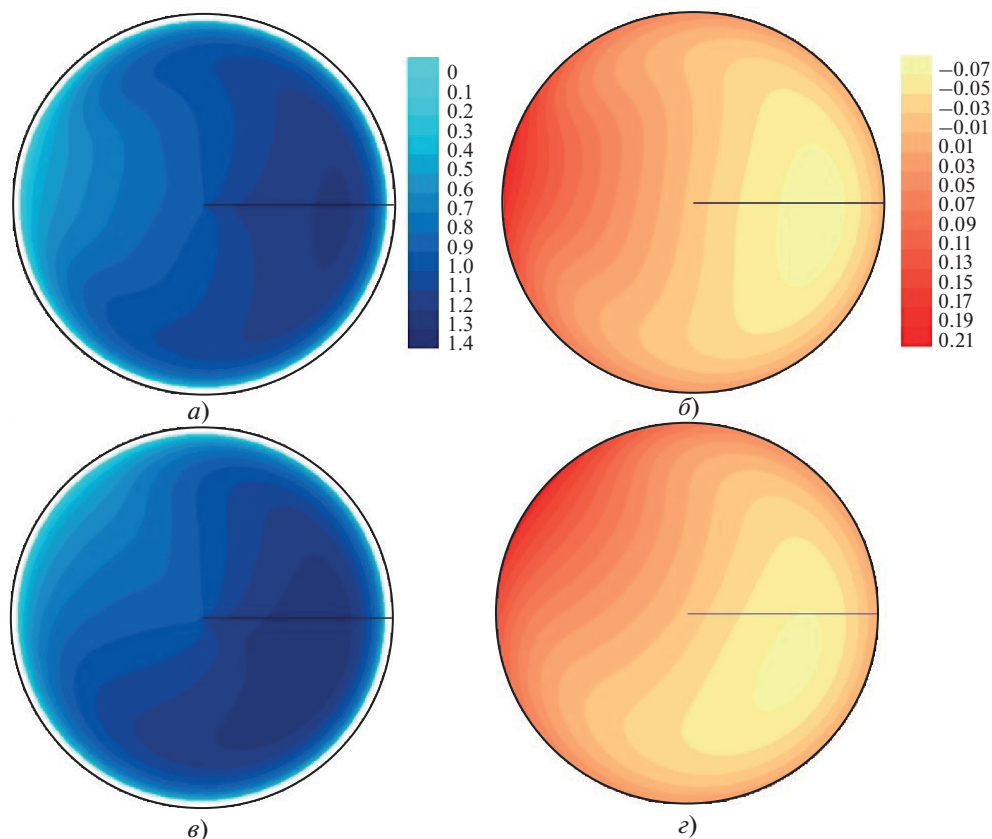


Рис. 4. Поля продольной компоненты скорости V^z (а, в) и безразмерной разности температур Θ (б, г) в сечении $z = 30d$, $Re = 20000$ и $Gr_q = 2 \times 10^8$.
а, б – $R/d = 5$; в, г – $R/d = 10$

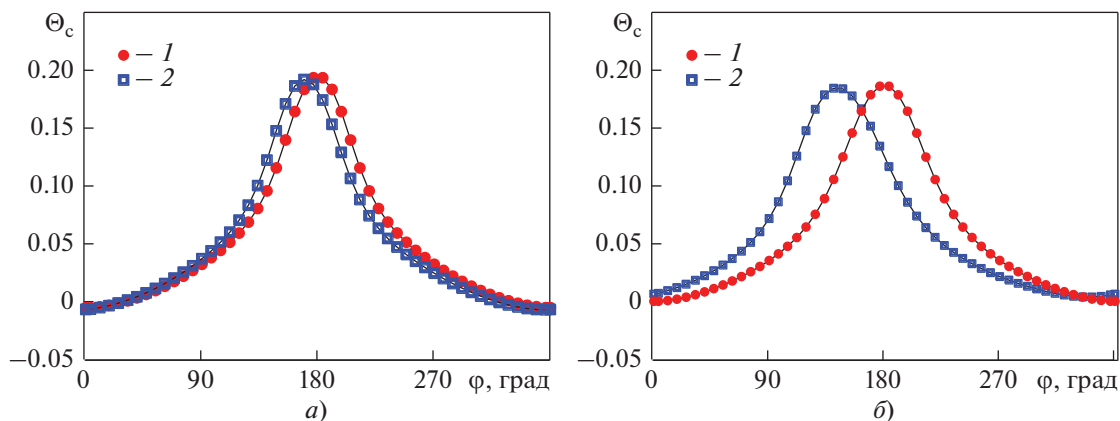


Рис. 5. Распределение по периметру сечения трубы $z = 30d$ безразмерной температуры Θ_c обогреваемой стенки при $R/d = 5$ (а) и $R/d = 10$ (б).
 Gr_q : 1 – 0; 2 – 2×10^8

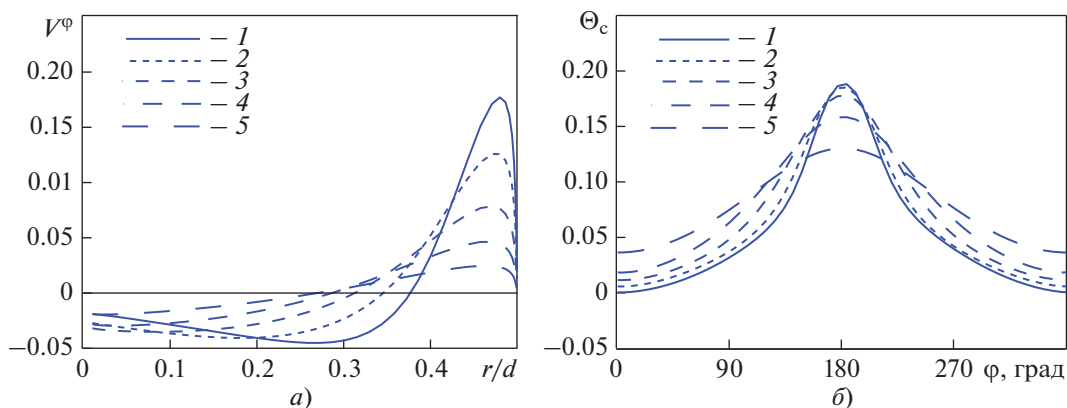


Рис. 6. Профили угловой компоненты скорости V^φ (а) ($\varphi = 90^\circ$) и распределение по периметру сечения трубы $z = 30d$ безразмерной температуры Θ_c (б) при $Re = 20000$ и $Gr_q = 0$.
 R/d : 1 – 5; 2 – 10; 3 – 20; 4 – 40; 5 – 80

векции ($Gr_q = 2 \times 10^8$) приводит к смещению минимума и максимума к нижней ($\varphi = 270^\circ$) и верхней ($\varphi = 90^\circ$) образующим трубы (рис. 5, б).

Расчет кольцевых каналов разной формы требует изменения только одного параметра – радиуса поворота R , что позволяет на одной и той же сетке получить целое семейство решений. Графики на рис. 6 иллюстрируют, как уменьшается эффект закрутки с увеличением радиуса поворота R .

Распределения безразмерной разности температур Θ_c при $\varphi = 0$ и $\varphi = 180^\circ$ для разных радиусов закрутки показаны на рис. 7. Эти данные позволяют судить о длине начального термического участка, где происходит перестройка профилей скорости и температуры, и участке стабилизации. На рис. 7 вертикальной штрихпунктирной линией отмечено сечение $z = 30d$, в котором построены поля – распределения скорости и температуры в сечении трубы, представленные на рис. 2–6.

Таким образом, теплоотдача в закрученных трубах, усложненная воздействием смешанной турбулентной конвекции, определяется не средними значениями коэффициентов теплоотдачи (числами Нуссельта), а локальными. Поэтому рассматривать надо в первую очередь максимальную и минимальную температуры стенки в поперечном сечении трубы (рис. 8).

На рис. 8 показаны максимальные и минимальные значения относительной разности температур стенки и среднemasсовой в безразмерном виде $\Theta_c Nu_t$, в зависимости от безразмерного радиуса поворота R/d . Фактически $\Theta_c Nu_t = (T_c - \bar{T}) / (T_{c,t} - \bar{T})$, где Nu_t определяется по зависимости Лайона [18], соответствующей теплоотдаче для стабилизированного турбулентного теплообмена в трубе:

$$Nu_t = 1/\Theta_{c,t} = 7 + 0.025Pe^{0.8}.$$

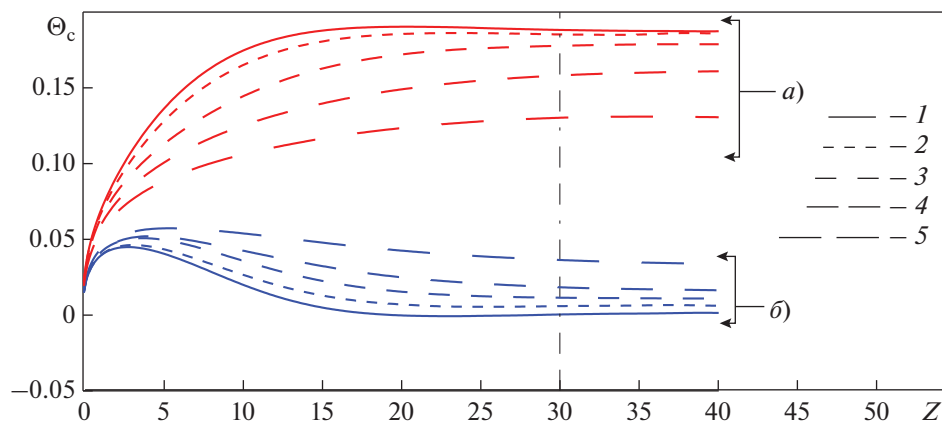


Рис. 7. Распределение по длине трубы безразмерной температуры стенки Θ_c на образующих $\varphi = 0$ (a) и $\varphi = 180^\circ$ (b) при $Gr_q = 0$, $Z = z/d$.
Обозначения см. рис. 6

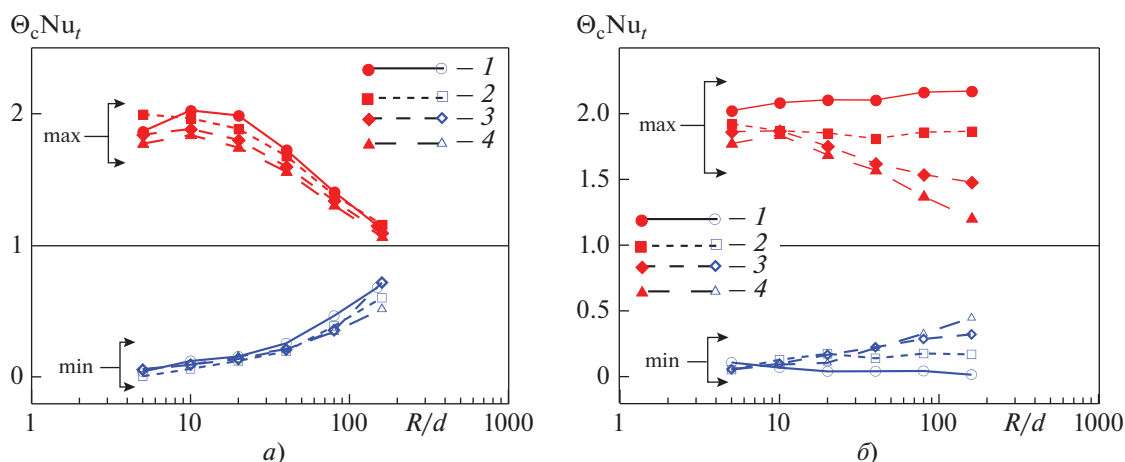


Рис. 8. Зависимость максимальной и минимальной относительной разности температур в виде $\Theta_c Nu_t$ от безразмерного радиуса поворота трубы R/d для $Gr_q = 0$ (a) и $Gr_q = 4 \times 10^8$ (б).
Re: 1 – 10 000; 2 – 20 000; 3 – 35 000; 4 – 50 000

Как видно на рис. 8, а, при увеличении R максимальные и минимальные значения безразмерной температуры стенки асимптотически приближаются к единице, а максимальной разницы достигают в диапазоне R/d от 5 до 20. При этом максимальное значение безразмерного комплекса составляет примерно 2.0. Это означает, что максимальная разность температуры стенки и среднемассовой примерно в 2 раза превышает среднее по периметру трубы значение, а минимальная приближается к нулю, т.е. равна среднемассовой. Наблюдается расслоение точек по числам Рейнольдса, но оно незначительно. При наложении свободной конвекции картина усложняется (см. рис. 8, б). Разности между максимальным и минимальным значениями безразмерной температуры при $Re = 10000$ и увеличении R сохраняются на уровне 2.0, т.е. разность температур при наложении двух факто-

ров: закрутки потока и наличия свободной конвекции – по-прежнему не превышает 2.0, но при больших R уже определяется только силами плавучести.

В несколько ином виде результаты, показанные на рис. 8, представлены на рис. 9. Здесь даны максимальные и минимальные значения Θ_c в зависимости от числа Пекле (или Рейнольдса) в сопоставлении с функцией обратного числа Нуссельта $1/Nu_t$, определенного по формуле Лайона.

На рис. 9, а видно, что максимальное и минимальное значения Θ_c асимптотически приближаются к $1/Nu_t$ при увеличении как радиуса поворота, так и числа Пекле. Вид аналогичных кривых при наличии свободной конвекции несколько отличается (см. рис. 9, б) от такового на рис. 9, а.

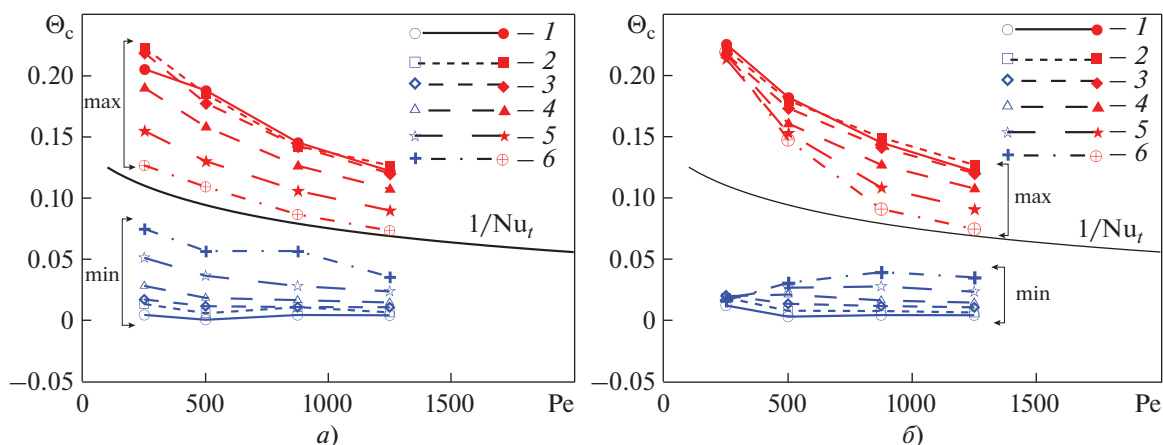


Рис. 9. Зависимость максимальной и минимальной безразмерной температуры стенки Θ_c от радиуса закрутки для $Gr_q = 0$ (а) и $Gr_q = 2 \times 10^8$ (б).

R/d : 1 – 5; 2 – 10; 3 – 20; 4 – 40; 5 – 80; 6 – 160

Следует отметить еще раз, что наличие поворота трубы приводит к появлению горячего пятна, где температура стенки значительно выше средней по сечению и выше значений, рассчитанных для прямой трубы. А наблюдаемая неоднородность в распределении температуры стенки – следствие как закрутки потока, так и влияния свободной конвекции – является важным фактором, влияющим на теплообмен в трубах. Этот фактор требуется учитывать как в теплогидравлических, так и в прочностных расчетах. Появление дополнительных напряжений, гидравлических вместе с термическими, может привести к деформации и усталостному разрушению термонагруженных стенок труб, используемых в теплообменных устройствах.

ВЫВОДЫ

1. Система дифференциальных уравнений, записанная в тензорном виде для криволинейной системы координат, позволила определить все члены, необходимые для расчета характеристик гидродинамики и теплообмена в жидкометаллической среде: давление, компоненты вектора скорости и температуры.

2. Преимущество предложенной методики заключается в простоте описания геометрической формы расчетной области, поскольку появляется возможность использовать структурированную расчетную сетку, упрощается задание граничных условий – границы расчетной области проходят по координатным поверхностям. Изменение формы расчетной области определяется только одним параметром – радиусом кольцевой закрутки трубы. При этом вид выводимых результатов расчетов становится более удобным для анализа и последующей обработки. Для учета тур-

булентности можно применить разные модели: алгебраические, хорошо зарекомендовавшие себя в прямых каналах с жидкометаллической средой, или параметрические с двумя и более уравнениями. Все это позволяет существенно экономить вычислительные ресурсы, сокращает время расчета и способствует получению более точных результатов.

3. В данной методике за основу берется система дифференциальных уравнений в цилиндрической системе координат и дополняется членами, которые отражают закрутку продольной оси трубы в кольцевой системе координат. Основным параметром является радиус закрутки трубы. При этом геометрическая форма пространства расчетной области при переходе к кольцевой системе координат остается такой же, как и для цилиндрической системы координат.

4. Выполненные с применением предлагаемой методики параметрические расчеты показывают принципиальные границы совместного влияния радиуса кольцевой закрутки и смешанной конвекции при течении жидкого металла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зорин В.М.** Атомные электростанции: учеб. пособие. М.: Издательский дом МЭИ, 2012.
2. **Абрамов А.В.** Экспериментальное обоснование безопасности реакторной установки БРЕСТ-ОД-300 при разгерметизации теплообменных труб // Сб. тр. МНТК НИКИЭТ-2014. М.: АО НИКИЭТ, 2014.
3. **Васильев С.В., Кузьминов Ю.В.** Парогенератор РУ БРЕСТ-ОД-300 // Сб. тр. конф. "Проектное направление "Прорыв"". М.: АО НИКИЭТ, 2015.
4. **Леонов В.Н.** Расчетно-экспериментальные исследования процессов, сопровождающих аварию

- “межконтурная неплотность парогенератора”, и рекомендации к схемным и конструктивным решениям реакторной установки со свинцовым теплоносителем: дис. ... канд. техн. наук. Н. Новгород: НГТУ, 2012.
5. **Surattana Sungnul.** Transformation of the Navier–Stokes equations in curvilinear coordinate systems with maple // *Global J. Pure Appl. Math.* 2016. V. 12. No. 4. P. 3315–3325.
 6. **Борисенко А.И., Тарапов И.Е.** Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Высшая школа, 1966.
 7. **Седов Л.И.** Механика сплошной среды. Т. 1. СПб.: Лань, 2004.
 8. **Danielson D.A.** Vectors and tensors in engineering and physics. 2nd ed. CRC Press, 2003.
<https://doi.org/10.1201/9780429502774>
 9. **Aris R.** Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics. N.Y.: Dover Publications, Inc., 1989.
 10. **Токарев Ю.Н.** Уравнения теплообмена закрученных потоков в полярно-спиральных координатах // Вестник МЭИ. 2004. № 5. С. 115–117.
 11. **Ito H.** Flow in curved pipes // *JSME Int. J.* 1987. V. 30. Is. 262. P. 543–552.
<https://doi.org/10.1299/jsme1987.30.543>
 12. **Chupin A., Stepanov R.** Full perturbation solution for the flow in a rotating torus // *Phys. Rev.* 2008. V. 77. P. 057301.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.057301>
 13. **Разуванов Н.Г.** Решение задачи конвективного теплообмена в винтовой системе координат // Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т. 11. № 2. С. 175–184.
 14. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003.
 15. **Численное** моделирование процессов тепло- и массообмена в элементах теплотехнического и энергетического оборудования / В.И. Артемов, Г.Г. Яньков, В.Е. Карпов, М.В. Макаров // Теплоэнергетика. 2000. № 7. С. 52–59.
 16. **Liquid metal heat transfer investigations applied to Tokamak reactor** / V.G. Sviridov, N.G. Razuvanov, Yu.P. Ivochkin, Ya.I. Listratov, E.V. Sviridov., L.G. Genin, V.G. Zhilin, I.A. Belyaev // *Proc. of the Intern. Heat Transfer Conf. IHTC14.* Washington, DC, USA, 8–13 Aug. 2010. Paper No. IHTC14-22369. P. 287–294.
<https://doi.org/10.1115/IHTC14-22369>
 17. **Поддубный И.И., Разуванов Н.Г.** Исследование гидродинамики и теплообмена при опускном течении жидкого металла в канале прямоугольного сечения в компланарном магнитном поле // Теплоэнергетика. 2016. № 2. С. 13–21.
<https://doi.org/10.1134/S0040363616020065>
 18. **Lyon R.N.** Liquid metal heat transfer coefficients // *Chem. Eng. Prog.* 1951. V. 47. № 2. P. 75–79.

Solution to the Problem of Convective Heat Transfer in a Toroidal Channel Using a Curvilinear Coordinate System

N. G. Razuvanov^a, E. A. Belavina^a, O. N. Polyanskaya^a, * and I. A. Belayev^a

^a Joint Institute for High Temperatures, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125412 Russia

*e-mail: treize@bk.ru

Abstract—A procedure is proposed for solving problems of hydrodynamics and heat transfer in coiled tubes, such as loops with smooth pipe turns and helically coiled tubes. Application of a curvilinear (toroidal) coordinate system simplifies the solution to these problems. The differential equations of mass, momentum, and energy conservation were derived for a liquid metal using the tensor analysis provisions in a generalized coordinate system. The equations with additional terms added written in a cylindrical coordinate system are taken as a basis. These terms are necessary for changing over to a new (toroidal) coordinate system. The toroidal system also has an orthogonal basis where the coordinates are also expressed by the same triple of values. The difference from the cylindrical coordinate system is that the length of the third basis vector depends on the other two space coordinates and the radius of the curvature. The method of numerical simulation in the toroidal coordinate system considerably simplifies the geometric description of the problem, construction of the computational grid, formulation of the boundary conditions, and presentation of the results. The proposed approach enables us to model problems with different curvature radii within a single generalized form. The proposed procedure yielded velocity, pressure, and temperature fields for a liquid metal turbulent flow in a toroidal (coiled) tube. The parameter of the tube curvature radius was varied in the calculations. The parametric studies performed demonstrate the principal limits of the effect of the tube curvature on the liquid metal flow hydrodynamics and heat transfer.

Keywords: toroidal coordinate system, differential conservation equations, hydrodynamics, heat transfer, liquid metals, heat-transfer coefficient, tube curvature radius