

ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 531.53

ДИАГРАММЫ ФУНКЦИЙ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ  
В ЗАДАЧЕ НАИБЫСТРЕЙШЕГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ  
ПЛАТФОРМЫ С ДВУМЯ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

© 2022 г. О. Р. Каюмов

Филиал ОмГПУ, г. Тара, Россия

e-mail: Oleg\_Kayumov@mail.ru

Поступила в редакцию 22.02.2022 г.

После доработки 11.05.2022 г.

Принята к публикации 30.05.2022 г.

Рассматривается задача оптимального по быстродействию перемещения системы с тремя степенями свободы в виде твердого тела, движущегося поступательно вдоль горизонтальной прямой и несущего два линейных осциллятора. Единственная управляющая сила приложена к несущему телу и ограничена по модулю, трение отсутствует. Система переводится из состояния покоя на заданное расстояние с гашением колебаний. Исследуется эволюция функций оптимального управления в зависимости от дальности перемещения. Предлагается наглядное представление этой зависимости в виде диаграммы, для построения которой дается алгоритм.

DOI: 10.31857/S0002338822050092

**Введение.** Рассматривается система, состоящая из несущего твердого тела и прикрепленных к нему линейными пружинами двух материальных точек (рис. 1). Пружины параллельны горизонтальной оси, вдоль которой несущее тело движется поступательно. Единственная управляющая сила  $\bar{F}$  приложена к этой платформе и ограничена по модулю наперед заданной величиной. Подобная модель может приближенно описывать малые перемещения платформы с упругими звеньями или сосуда, частично заполненного жидкостью. Постановки задач управления такими объектами известны давно [1], но многие из них до сих пор актуальны. Проблема – в дефиците управляющих воздействий, когда одной силой требуется погасить колебания нескольких взаимосвязанных тел. Известно, что платформа с  $n$  осцилляторами при действии горизонтальной силы управляема, если частоты собственных колебаний осцилляторов попарно различны [1, 2]. Практическая невозможность аналитического решения задачи наибо́льшего перемещения такой системы стимулировала поиски методов квазиоптимального управления. В [3] предложен поэтапный алгоритм синтеза ограниченного управления, где сочетаются метод [4] аппроксимации множества достижимости (для больших энергий системы) и применение общей функции Ляпунова [5, 6] (для построения обратной связи в окрестности требуемого положения равновесия). Подход развивался в работе [7], где исследовались проблемы существования и единственности движения под действием предлагаемого управления, а также в [8], где подробно рассмотрен случай платформы с двумя осцилляторами. Для этой же системы были построены алгоритмы, достигающие цели при действии неизвестных возмущений и при неизмеряемых состояниях осцилляторов [9, 10]. В работе [11] указан закон управления, переводящего платформу с  $n$  осцилляторами за конечное время в требуемое состояние покоя при неполной информации о состоянии и возмущениях, причем для некоторого типа начальных состояний найдена асимптотика времени движения в зависимости от числа  $n$ .

Далее речь пойдет о задаче оптимального быстродействия, когда трение отсутствует, а фазовое состояние системы в каждый момент измеримо. Ранее с помощью принципа максимума Понтрягина [12] была решена задача наибо́льшего перемещения платформы с одним осциллятором, где оптимальное управление оказалось кусочно-постоянным с тремя переключениями [1, 13].

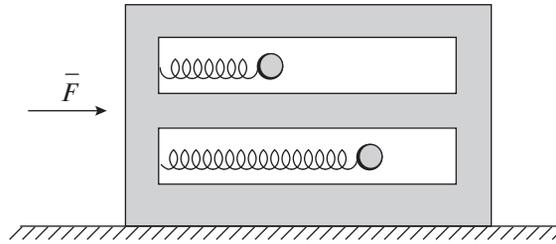


Рис. 1. Модель платформы с двумя осцилляторами

В [14] на основе учета симметрий задачи предложена структура управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимального быстрогодействия для перемещения платформы с  $n$  осцилляторами. В его записи участвуют значения первых  $n$  моментов переключения, что требует предварительного решения системы нелинейных уравнений. Показано, что искомое управление является кусочно-постоянным с нечетным числом переключений. Для случая  $n = 2$  численные решения иллюстрировались на фазовой плоскости одного из осцилляторов, и, в частности, доказано, что для малых значений дальности перемещения количество переключений равно пяти.

**1. Постановка задачи.** Повторяя использованные в [14] преобразования координат и времени, приведем уравнения движения платформы с двумя осцилляторами (рис. 1) к форме с безразмерными переменными и временем:

$$\ddot{x}_0 = u, \quad \ddot{x}_1 + x_1 = u, \quad \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = u, \quad |u| \leq 1, \quad (1.1)$$

где  $u$  — управляющая сила, параметр  $\omega > 1$  растет с увеличением отношения собственных частот осцилляторов. Переменные  $x_0, x_1, x_2$  являются линейными комбинациями горизонтальных координат платформы и осцилляторов. Одновременное обращение в нуль значений  $x_1$  и  $x_2$  соответствует ненапряженным состояниям пружин. Полагая, что при требуемом перемещении платформы переменная  $x_0$  меняется на величину  $2b$ , назовем в середине этого отрезка начало отсчета координаты  $x_0$ . Аналогичную “удвоенную” запись введем и для искомого общего времени  $2T$  движения системы, что придаст краевым условиям симметричный вид.

Задача оптимального по быстродействию перемещения платформы с двумя осцилляторами формулируется следующим образом: требуется определить управление  $u(t), t \in [0, 2T]$ , переводящее систему (1.1) из состояния

$$x_0(0) = -b, \quad x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

за наименьшее время  $2T$  (заранее неизвестное) в состояние

$$x_0(2T) = b, \quad x_i(2T) = \dot{x}_i(2T) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.3)$$

Как и в работе [14], поставленную задачу быстрогодействия будем рассматривать для взаимной вариационной задачи на максимум дальности  $2b$  при заданном времени  $2T$ . При этом исследуем эволюцию функций оптимального управления  $u(t), t \in [0, 2T]$  с изменением параметра  $T$ . Для наглядного представления этой эволюции введем изображение, которое назовем *диаграммой функций оптимального управления*. Поскольку каждая такая функция однозначно задается чередованием участков с постоянными значениями “+1” и “−1”, то поставим ей в соответствие отрезок длиной  $2T$ , составленный из серых и белых фрагментов, повторяющих длительности положительных и отрицательных участков на графике. Таким способом за счет двух цветов графический образ функции  $u(t), t \in [0, 2T]$  станет одномерным. Далее из составных отрезков (как из горизонтальных слоев) на плоскости с вертикальной координатой  $T$  соберем двумерную диаграмму, отражающую эволюцию функции управления с изменением  $T$ . Если при этом использовать смещенное время  $\tilde{t} = t - T, \tilde{t} \in [-T, T]$ , то диаграмма для функций  $u(\tilde{t})$  окажется симметричной относительно вертикальной оси.

На рис. 2 построена такая диаграмма для решенной в [1, 13] задачи наибо­ль­шего перемещения платформы с одним осциллятором. Каждое горизонтальное сечение диаграммы символизирует одну функцию  $u(\tilde{t}), \tilde{t} \in [-T, T]$ , с тремя моментами переключения.

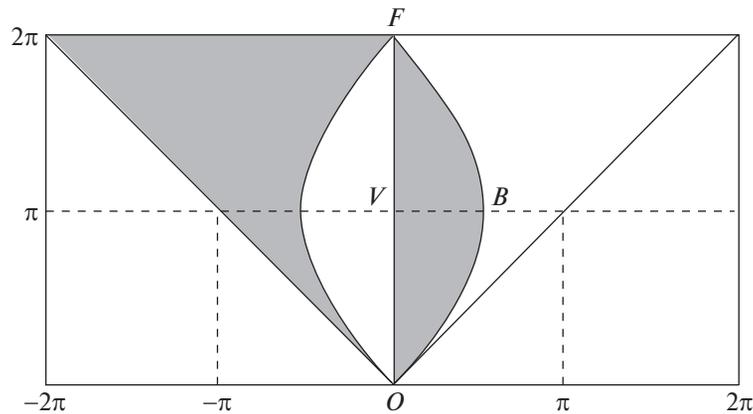


Рис. 2. Диаграмма в случае платформы с одним осциллятором

Поставим задачу исследования закономерностей, позволяющих строить диаграммы функций управления в задаче оптимального по быстродействию перемещения платформы с двумя осцилляторами.

**2. Свойства движений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности.** На основе принципа максимума Понтрягина было показано [14], что в задаче оптимального быстродействия (1.1)–(1.3) в смещенном времени  $\tilde{t} = t - T$ ,  $\tilde{t} \in [-T, T]$ , оптимальное управление  $u(\tilde{t})$ , а также решения  $x_i(\tilde{t})$ ,  $i = \overline{0, 2}$ , будут нечетными функциями, а  $\dot{x}_i(\tilde{t})$ ,  $i = \overline{0, 2}$ , – четными функциями. В конце оптимальной полутраектории выполняются соотношения

$$u(T) = x_i(T) = 0, \quad i = \overline{0, 2}. \quad (2.1)$$

Оптимальное управление будет кусочно-постоянным с конечным числом переключений, число которых нечетно. Особые управления здесь невозможны в силу линейной независимости известных решений сопряженной системы принципа максимума.

Моменты времени переключения управления будем обозначать через  $\tau_k$ , увеличивая индексы  $k$  с ростом значений времени. Их общее количество заранее не известно, но всегда в середине списка – момент времени  $T$ . Если его номер равен  $j$  (т.е. ему предшествуют моменты переключения  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}$ ), то в конце оптимальной полутраектории выполняется [14] система двух уравнений:

$$\begin{aligned} (-1)^{j+1} - \cos T + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} \cos(T - \tau_k) &= 0, \\ (-1)^{j+1} - \cos \omega T + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} \cos \omega(T - \tau_k) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Использование моментов переключения управления как корней системы (2.2) (при заданном значении  $T$ ) лежит в основе дальнейших рассуждений. Для достаточно малых  $T$  имеет место [14] следующее утверждение.

**З а м е ч а н и е 1.** При каждом значении  $T \in (0, T_s]$ , где  $T_s = 2\pi/\omega$ , в задаче оптимального быстродействия (1.1)–(1.3) существует режим движения с пятью переключениями управления в моменты времени  $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$ .

Можно показать [14], что если число  $\omega$  – рациональное, представимое несократимой дробью

$$\omega = \frac{l}{m}, \quad (l \in N, m \in N), \quad (2.3)$$

то в задаче оптимального быстродействия (1.1)–(1.3) выполняются следующие свойства.

**С в о й с т в о 1.** Существует оптимальное движение с одним переключением управления при  $T = T_*$ , где  $T_* = 2m\pi$ .

**С в о й с т в о 2.** Если управление с моментами переключения  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, T$  удовлетворяет краевым условиям (2.2), то управление с моментами переключения  $\tau_1 + T_*, \tau_2 + T_*, \dots, \tau_{j-1} + T_*, T + T_*$  тоже им удовлетворит.

**С в о й с т в о 3.** Если управление с моментами переключения  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, T$  при  $T < T_*/2$  удовлетворяет краевым условиям (2.2), то управление с моментами переключения  $\tau_1 + \Delta, \tau_2 + \Delta, \dots, \tau_{j-1} + \Delta, T + \Delta$  (где  $\Delta = T_* - 2T$ ) тоже им удовлетворит.

Заметим, что в случае иррационального значения  $\omega$  свойства 1–3 уже не выполняются, так как в системе (2.2) не будет общего периода  $T_*$  всех функций. В этом случае зависимость дальности перемещения системы от времени не сможет быть предъявлена в каком-либо завершенном виде ввиду бесконечного чередования все новых типов движений с ростом времени  $2T$ .

Далее ограничимся случаями, когда число  $\omega$  имеет вид (2.3).

Из [14] следуют замечания 2–4.

**З а м е ч а н и е 2.** Если в задаче (1.1)–(1.3) траектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с пятью переключениями управления (в моменты времени  $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$ ), то управляющая функция имеет вид

$$u = \text{sign}(\xi \det Q_3(t)), \quad Q_3(t) = \begin{bmatrix} T-t & T-\tau_1 & T-\tau_2 \\ \sin(T-t) & \sin(T-\tau_1) & \sin(T-\tau_2) \\ \sin\omega(T-t) & \sin\omega(T-\tau_1) & \sin\omega(T-\tau_2) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где знак константы  $\xi$  определяется известным (по условию) значением управления  $u(t)$  при  $t \in [0, \tau_1)$ .

Для сценария, описанного в замечании 2, значения  $\tau_1, \tau_2$  (при заранее заданной длительности полутраектории  $T$ ) находятся из системы (2.2), принимающей при  $j = 3$  вид

$$\begin{aligned} 1 - \cos T + 2\cos(T - \tau_1) - 2\cos(T - \tau_2) &= 0, \\ 1 - \cos\omega T + 2\cos\omega(T - \tau_1) - 2\cos\omega(T - \tau_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

**З а м е ч а н и е 3.** Если в задаче (1.1)–(1.3) траектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с количеством переключений большим, чем пять, то вид управляющей функции будет тот же (2.4).

Это замечание относится к ситуации, когда неизвестных значений  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$  больше, чем уравнений (2.2). Здесь проверить оптимальность конкретного набора моментов переключений можно путем интегрирования уравнений движения (1.1)–(1.2): расписание должно подтвердиться автоматически при действии управления (2.4), иначе оно не оптимально.

**З а м е ч а н и е 4.** Если в задаче (1.1)–(1.3) траектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с тремя переключениями (в моменты времени  $\tau_1, T, 2T - \tau_1$ ), то управляющая функция имеет вид

$$u = \text{sign}(\xi \det Q_2(t)), \quad Q_2(t) = \begin{bmatrix} T-t & T-\tau_1 \\ \sin(T-t) & \sin(T-\tau_1) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

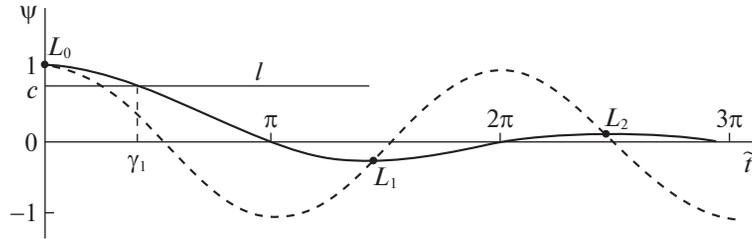
Для сокращения записей каждому значению  $\tau_k$  момента времени переключения управления будем ставить в соответствие разность

$$\gamma_k = T - \tau_k, \quad k \in N. \quad (2.7)$$

**3. Режимы с тремя переключениями управления.** Далее будет показано, что при построении диаграмм функций оптимального управления важную роль играют режимы с тремя переключениями. Их моменты времени  $\tau_1, T, 2T - \tau_1$  соответствуют корням системы (2.2), принимающей при  $j = 2$  вид

$$\begin{aligned} -1 - \cos T + 2\cos(T - \tau_1) &= 0, \\ -1 - \cos\omega T + 2\cos\omega(T - \tau_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Необходимое условие оптимальности режима, описанного в замечании 4, выражается в том, что действующая по закону (2.6) функция управления не должна обратиться в нуль при других

Рис. 3. График функции  $\psi(\tilde{t})$ 

значениях времени, кроме  $\tau_1, T, 2T - \tau_1$ . Для исследования этого условия используем смещенное время  $\tilde{t} = t - T, \tilde{t} \in [-T, T]$ , обозначения (2.7) и преобразуем определитель (2.6) к виду

$$\det Q_2(\tilde{t}) = -\gamma_1 \tilde{t} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \psi(\tilde{t}) & \psi(\gamma_1) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Здесь введено обозначение функции

$$\psi(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}. \quad (3.3)$$

которую доопределим значением  $\psi(0) = 1$ .

Функция  $\psi(\tilde{t})$  — четная. При  $\tilde{t} > 0$  условие ее экстремумов

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \left( \frac{\sin \tilde{t}}{\tilde{t}} \right) = \frac{1}{\tilde{t}} \left( \cos \tilde{t} - \frac{\sin \tilde{t}}{\tilde{t}} \right) = 0$$

соответствует точкам пересечения графиков функции  $\psi(\tilde{t})$  (на рис. 3 — сплошная линия) и функции  $\cos(\tilde{t})$  (пунктирная линия). Такими точками являются, например,  $L_1$  ( $\tilde{t} \approx 1.4303\pi$ ,  $\psi \approx -0.21723$ ),  $L_2$  ( $\tilde{t} \approx 2.4590\pi$ ,  $\psi \approx 0.12837$ ) и т.д. С увеличением номера  $i$  аргумент  $i$ -го экстремума монотонно приближается к значению  $(2i + 1)\pi/2$ .

Чтобы удовлетворить необходимому условию оптимальности, управление (2.6) должно обращаться в нуль только при  $\tilde{t} = 0$  и  $\tilde{t} = \pm\gamma_1$ . Геометрически это равносильно следующему требованию.

**Условие 1.** Горизонталь  $l$ , проведенная на уровне  $c = \psi(\gamma_1)$ , должна иметь ровно одну общую точку с графиком функции  $\psi(\tilde{t})$  при  $\tilde{t} > 0$ .

Тогда на рис. 3 она должна пройти либо через точку  $L_1$ , либо между точками  $L_0$  и  $L_2$ .

**Утверждение 1.** Для любого  $\omega \neq 2$  в задаче оптимального быстрогодействия (1.1)–(1.3) существует такое значение дальности перемещения  $2b$ , при котором управление будет иметь ровно три момента переключения:  $\tau_1, T, 2T - \tau_1$ . Эти значения удовлетворяют не только системе (3.1), но и неравенству

$$0 < T - \tau_1 < \frac{\pi}{2}. \quad (3.4)$$

**Доказательство.** В силу монотонной зависимости  $T(b)$  поиск значения  $b$  заменим варьированием  $T$ . Первое уравнение системы (3.1) представим в виде

$$\cos \gamma_1 = (1 + \cos T)/2. \quad (3.5)$$

Множество его корней изображается (рис. 4) на координатной плоскости  $(T, \gamma_1)$  бесконечной фигурой из горизонтальных цепочек  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$ , составленных из одинаковых дуг. Левая нижняя дуга  $OBF$  служит графиком функции

$$\gamma_1 = \arccos \left( \cos^2 \frac{T}{2} \right), \quad T \in [0, 2\pi], \quad \gamma_1 \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right].$$

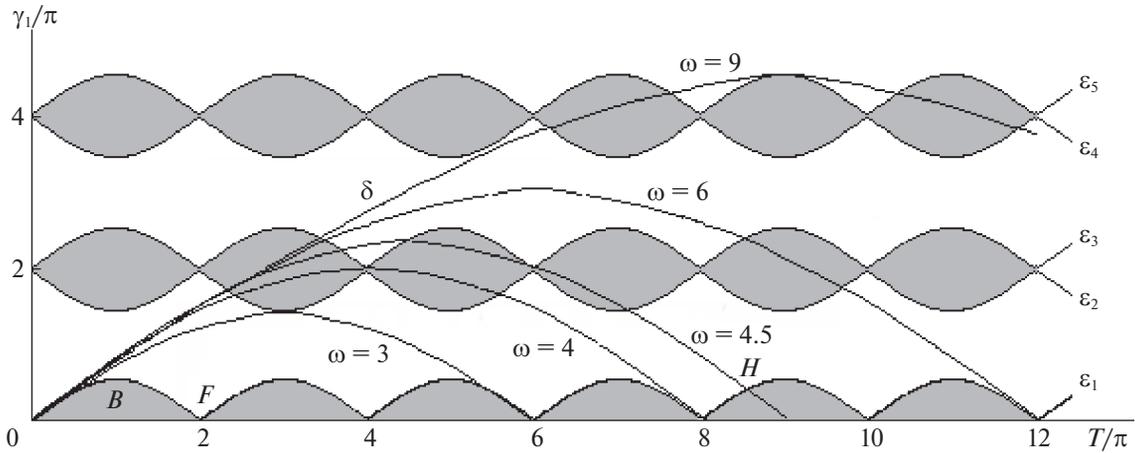


Рис. 4. Графическое решение системы уравнений (3.1)

Ранее эта же дуга встречалась на рис. 2. Она является симметричной относительно оси  $VB$  ( $T = \pi$ ) и выпуклой вверх, так как  $d^2\gamma_1/dT^2 < 0$ . Производная  $d\gamma_1/dT$  в точках  $T = 0, T = \pi, T = 2\pi$  имеет значения соответственно  $\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2$ .

Из всего множества решений уравнения (3.5) условию 1 удовлетворяют только те, которые на рис. 4 изображены несвязным множеством  $\Omega$ , полученным из цепочки  $\varepsilon_1$  путем удаления из нее точек оси  $\gamma_1 = 0$ . Эти корни удовлетворяют неравенству  $0 < \gamma_1 < \pi/2$ , равносильному (3.4).

Для решения системы (3.1) при условии (3.4) достаточно найти такие корни  $T, \gamma_1$  уравнения (3.5), которые удовлетворят ему и при замене на  $\omega T, \omega\gamma_1$ . Графически это соответствует точкам пересечения всей совокупности цепочек  $\varepsilon_i, i \in N$ , и несвязной линии  $\delta$ , полученной из множества  $\Omega$  при растяжении в  $\omega$  раз (т.е. при гомотетии плоскости с коэффициентом  $\omega$  и центром  $O(0, 0)$ ).

Если число  $\omega$  — целое, то линия  $\delta$  (в силу отсутствия у нее точек на оси  $\gamma_1 = 0$ ) не имеет общих точек с множеством  $\varepsilon_1$ . При этом линия  $\delta$  пересечет ближайшую цепочку  $\varepsilon_2$  только при  $\omega \geq 3$  (рис. 4). Отсюда следует, что при  $\omega = 2$  система (3.1) не имеет решений. Если же число  $\omega$  — не целое, то у множеств  $\delta$  и  $\Omega$  всегда имеются пересечения. Тем самым доказано не только утверждение 1, но и его следствие.

**С л е д с т в и е.** Если при некотором  $T$  нашлось значение  $\tau_1$ , удовлетворяющее системе (3.1) и неравенству (3.4), то управление с тремя переключениями в моменты  $\tau_1, T, 2T - \tau_1$  будет удовлетворять необходимым условиям оптимальности.

**4. Контрольная кривая и ее свойства.** Рассматривая функцию оптимального управления (2.4) в смещенном времени  $\tilde{t} = t - T, \tilde{t} \in [-T, T]$ , преобразуем определитель из (2.4) к виду

$$\det Q_3(\tilde{t}) = -\omega\gamma_1\gamma_2\tilde{t} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi(\tilde{t}) & \psi(\gamma_1) & \psi(\gamma_2) \\ \psi(\omega\tilde{t}) & \psi(\omega\gamma_1) & \psi(\omega\gamma_2) \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

где используется ранее введенная функция (3.3).

Определитель (4.1) составлен из трех векторов-столбцов  $\mathbf{p}(\tilde{t}), \mathbf{p}(\gamma_1), \mathbf{p}(\gamma_2)$  с однотипной структурой  $\mathbf{p}(\theta) = (1, \psi(\theta), \psi(\omega\theta))^T$ . Условие  $\det Q_3(\tilde{t}) = 0$  переключения оптимального управления выполняется либо при  $\tilde{t} = 0$ , либо при компланарности трех векторов, что имеет место, в частности, при  $\tilde{t} = \gamma_1$  или  $\tilde{t} = \gamma_2$ . Постоянные векторы  $\mathbf{p}(\gamma_1)$  и  $\mathbf{p}(\gamma_2)$  не коллинеарны, поэтому при откладывании от начала координат в пространстве  $(x, y, z)$  порождают конкретную плоскость. Она пересечет плоскость  $x = 1$  по некоторой прямой, чью проекцию на плоскость  $yOz$  обозначим  $g$ . На эту же плоскость конец переменного вектора  $\mathbf{p}(\tilde{t})$  проецируется в точку  $M$  с координатами

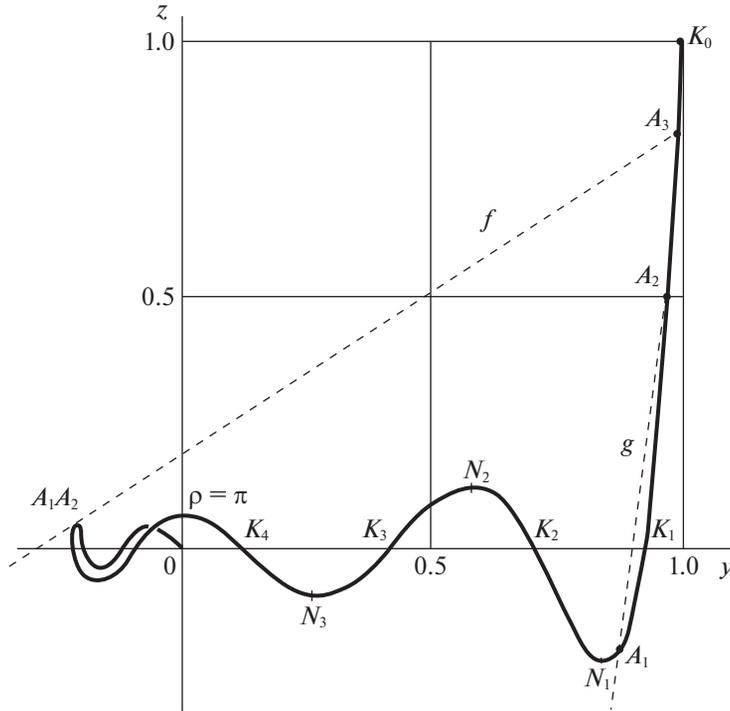


Рис. 5. Контрольная кривая для случая  $\omega = 9/2$

$y = \psi(\tilde{t}), z = \psi(\omega\tilde{t})$ . Линию на плоскости  $yOz$ , по которой точка  $M$  движется с изменением параметра  $\tilde{t} \in [-T, T]$ , назовем *контрольной кривой*. Для рассматриваемого случая (2.3) ввиду свойств 2 и 3 ограничимся рассмотрением диапазона  $T \in (0, T_*/2]$ . Таким образом, контрольную кривую зададим параметрическим уравнением

$$y = \psi(\rho), \quad z = \psi(\omega\rho), \quad \rho \in [0, T_*/2]. \tag{4.2}$$

Форма этой кривой зависит от значения константы  $\omega$ , но всегда кривая начинается в точке  $K_0(1,1)$  (при  $\rho = 0$ ), пересекает ось  $Oz$  при  $\rho = k\pi, k \in N$  и приходит в точку  $O(0,0)$  при  $\rho = T_*/2$ . На рис. 5 показана контрольная кривая для  $\omega = 9/2$  (при  $\rho \in [0, 2\pi]$ ); на рис. 6 – для  $\omega = 5/4$  (при  $\rho \in [0, 4\pi]$ ).

Наряду с параметром  $\rho$  введем пропорциональный ему параметр

$$\sigma = \frac{\omega\rho}{\pi}. \tag{4.3}$$

Его натуральным значениям соответствуют точки пересечения контрольной кривой с горизонтальной осью  $Oy$ , которые последовательно обозначим через  $K_i$ . В частности, если  $\omega$  – целое, то при  $i = \omega$  точка  $K_i$  совпадает с  $O(0,0)$ .

Экстремумы функций  $z(y)$  и  $\psi(\tilde{t})$  численно равны, а параметры  $\sigma_i = i + 0.5$  точек  $N_i, i = 1, 2, \dots$ , на рис. 5 мало отличаются от соответствующих значений  $\tilde{t}/\pi$ , вычисленных для экстремальных точек  $L_i$  на рис. 3. Можно показать, что внутри каждой дуги  $K_iK_{i+1}, i = 1, 2, \dots$ , контрольной кривой есть единственная точка перегиба  $P_i$ , расположенная ближе к точке  $K_{i+1}$ .

С помощью контрольной кривой можно геометрически интерпретировать необходимые условия оптимальности, выраженные формулами (2.4) и (4.1). Например, сочетание корней  $\tau_1, \tau_2, T$  системы (2.5) будет соответствовать оптимальному управлению с пятью переключениями, согласно замечанию 2, лишь при условии, что определитель (2.4) не обратится в нуль при других значениях времени  $t$ , кроме  $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$ . Это условие соответствует тому, что прямая  $g$ , проведенная через точки  $A_1$  и  $A_2$  (с параметрами  $\rho = \gamma_1$  и  $\rho = \gamma_2$ ), не имеет других общих точек

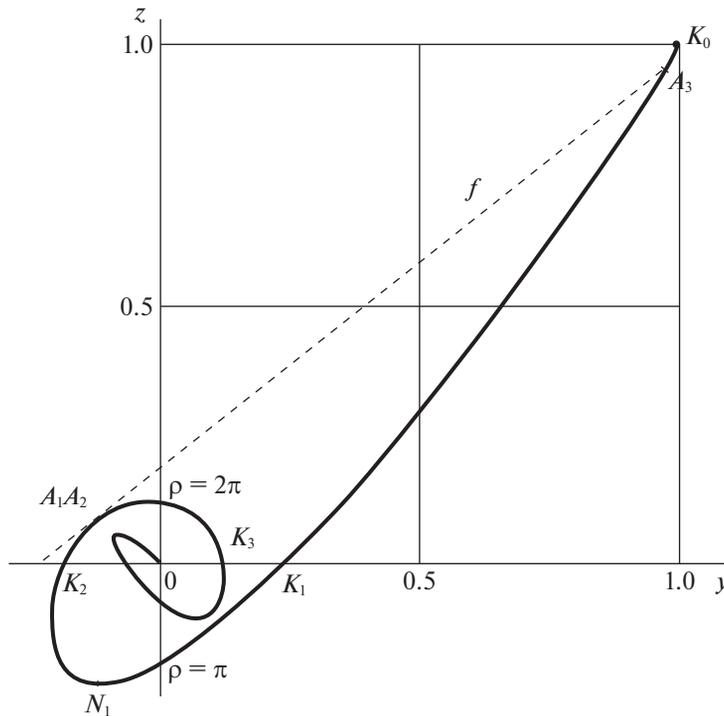


Рис. 6. Контрольная кривая для случая  $\omega = 5/4$

с контрольной кривой (рис. 5). Действительно, если параметру  $\rho = T$  соответствует точка  $W$ , то в смещенном времени  $\tilde{t} \in [-T, T]$  изображающая точка  $M$  с координатами  $(\psi(\tilde{t}), \psi(\omega\tilde{t}))$ , двигаясь по контрольной кривой из  $W$  в  $K_0$  и обратно, дважды пройдет дугу  $WK_0$ . При этом знак управления  $u(\tilde{t})$ , согласно формулам (2.4) и (4.1), меняется последовательно в точках  $A_1, A_2, K_0, A_2$  и  $A_1$ .

На контрольной кривой выявляется оптимальность режимов, упомянутых в замечании 1, так как при  $T \in (0, T_s]$  положения точек  $W$  (с параметрами  $\sigma \in (0, 2]$ ) не выходят за пределы дуги  $K_0K_2$ . В силу неравенств

$$T > \gamma_1 > \gamma_2 > 0 \tag{4.4}$$

точки  $A_1$  и  $A_2$  окажутся внутри вогнутой части этой дуги, поэтому прямая  $g = A_1A_2$  не имеет других пересечений с контрольной кривой.

**5. Эволюция функций оптимального управления в задаче (1.1)–(1.3).** Исследуем изменение функций оптимального управления  $u(t), t \in [0, 2T]$  в задаче (1.1)–(1.3) при непрерывном возрастании дальности перемещения платформы, что равносильно непрерывному увеличению параметра  $T$ . Для определенности ограничимся случаем  $\omega \geq 3$ , когда качественный вид контрольной кривой соответствует рис. 5. К случаю  $1 < \omega < 3$  вернемся позже.

Итак, в диапазоне  $T \in (0, T_s]$  оптимальное управление имеет ровно пять переключений в моменты  $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$ , удовлетворяющие системе (2.5). В обозначениях (2.7) эта система примет вид

$$\begin{aligned} \cos(\gamma_1) - \cos(\gamma_2) &= (\cos T - 1)/2, \\ \cos(\omega\gamma_1) - \cos(\omega\gamma_2) &= (\cos\omega T - 1)/2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Дифференцируя соотношения (5.1) по  $T$ , разрешим полученную систему уравнений относительно производных

$$\frac{d\gamma_1}{dT} = \frac{D_1}{D}, \quad \frac{d\gamma_2}{dT} = \frac{D_2}{D}. \tag{5.2}$$

Здесь

$$D = \det \begin{bmatrix} \sin \gamma_2 & \sin \gamma_1 \\ \sin \omega \gamma_2 & \sin \omega \gamma_1 \end{bmatrix} = \omega \gamma_1 \gamma_2 \det \begin{bmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \omega \gamma_1 \gamma_2 S_{21},$$

где использованы координаты  $y_i = \psi(\gamma_i)$ ,  $z_i = \psi(\omega \gamma_i)$ ,  $i = 1, 2$ , точек  $A_1$  и  $A_2$  на контрольной кривой. Аналогично вычисляются определители

$$D_1 = \frac{1}{2} \omega \gamma_2 T S_{20}, \quad D_2 = \frac{1}{2} \omega \gamma_1 T S_{10}$$

с помощью координат точки  $W$  в виде  $y_0 = \psi(T)$ ,  $z_0 = \psi(\omega T)$  и ориентированных площадей параллелограммов

$$S_{ij} = \det \begin{bmatrix} y_i & z_i \\ y_j & z_j \end{bmatrix}, \quad i, j = \overline{0, 2}, \quad i \neq j, \quad (5.3)$$

построенных на векторах  $\overline{OA_1} = (y_1, z_1)$ ,  $\overline{OA_2} = (y_2, z_2)$ ,  $\overline{OW} = (y_0, z_0)$ .

Эволюции режимов с пятью переключениями управления (при увеличении параметра  $T \in (0, T_s]$ ) соответствует перемещение точек  $W$ ,  $A_1$  и  $A_2$  по контрольной кривой (рис. 5) с соблюдением порядка следования (4.4). При всех положениях точки  $W$  на дуге  $K_0 N_1$  повороты векторов  $\overline{OA_1} \rightarrow \overline{OW}$ ,  $\overline{OA_2} \rightarrow \overline{OW}$ ,  $\overline{OA_2} \rightarrow \overline{OA_1}$  осуществляются по часовой стрелке, поэтому  $S_{10} < 0$ ,  $S_{20} < 0$ ,  $S_{21} < 0$ . В силу (5.2) имеем  $\dot{\gamma}_1 > 0$ ,  $\dot{\gamma}_2 > 0$ , т.е. монотонный рост  $\gamma_1(T)$ ,  $\gamma_2(T)$ . При дальнейшем продвижении (до состояния  $K_2$ ) точка  $W$  пройдет через некоторое положение, при котором  $\overline{OW} \parallel \overline{OA_1}$ . Это следует из того, что в состоянии  $K_2$  (при  $T = T_s$ ) точка  $W$  окажется выше точки  $A_1$ , для которой  $\gamma_1 > T_s/2$  [14], т.е.  $\sigma > 1$ . В состоянии, когда  $\overline{OW} \parallel \overline{OA_1}$ , определитель  $S_{10}$  (а значит, и  $D_2$ ) меняет знак, т.е. функция  $\gamma_2(T)$  достигает максимума. Далее с ростом  $T$  получим  $S_{10} > 0$ ,  $S_{20} < 0$ ,  $S_{21} < 0$ , т.е.  $\dot{\gamma}_1 > 0$ ,  $\dot{\gamma}_2 < 0$ , что на контрольной кривой соответствует росту параметра  $\gamma_1(T)$  точки  $A_1$  и убыванию  $\gamma_2(T)$ , т.е. движению “вспять” точки  $A_2$ . Эти неравенства, порожденные направлениями вращения векторов  $\overline{OW}$ ,  $\overline{OA_1}$ ,  $\overline{OA_2}$ , сохранят свой смысл вплоть до достижения точкой  $A_2$  положения  $K_0$  (рис. 5) при  $\gamma_2 = 0$ , когда  $u(t)$  вырождается в функцию с тремя моментами переключения  $\tau_1$ ,  $T$ ,  $2T - \tau_1$ . Ее параметры  $T = T_1$ ,  $\tau_1 = T - \lambda_1$  соответствуют (рис. 4) координатам  $(\omega T_1, \omega \lambda_1)$  точки, в которой линия  $\delta$  пересекла цепочку  $\varepsilon_2$ , входя в закрашенную область. Обозначим через  $(\omega T_2, \omega \lambda_2)$  координаты на выходе (где  $\delta$  пересекает  $\varepsilon_3$ ).

**З а м е ч а н и е 5.** При всех значениях  $T \in (0, T_1)$  прямая  $g$  не имеет других общих точек с контрольной кривой, кроме  $A_1$  и  $A_2$ , поскольку они расположены на вогнутой части дуги  $K_0 K_2$  (рис. 5). Следовательно, при  $T \in (0, T_1)$  функция оптимального управления будет иметь ровно пять моментов переключения.

Можно показать, что на контрольной кривой при  $T = T_1$  у точки  $A_1$  параметр  $\gamma_1 = \lambda_1$  будет меньше, чем у точки  $P_1$  перегиба, т.е.  $A_1$  останется на вогнутой части дуги  $K_1 K_2$ . При  $T = T_1 + \Delta T$  (где  $\Delta T$  – мало) продолжение режимов с пятью переключениями неосуществимо в силу  $\gamma_2 = 0$ ,  $\dot{\gamma}_2 < 0$ . Далее непрерывная эволюция оптимальной функции  $u(t)$  возможна лишь путем добавления двух новых сколь угодно близких моментов переключения, что на графике соответствует “игольчатой вариации” (рис. 7). В этом состоянии на контрольной кривой прямая  $g$  должна пройти через точку  $A_1$ , но не должна быть секущей к этой кривой, иначе в графике  $u(t)$  возникли бы скачкообразные изменения. Поэтому через точку с параметром  $\lambda_1$  прямая  $g$  пройдет как касательная  $l$  к дуге  $P_1 N_2$  (на рис. 8,  $a$  показан такой случай для  $\omega = 4$ ). Точка касания получит статус “сдвоенной”  $A_1 = A_2$  (с параметрами  $\gamma_1 = \gamma_2$ ), а прежняя точка  $A_1$  переименуется в  $A_3$  (с параметром  $\gamma_3 = \lambda_1$ ). На рис. 7 эта же ситуация показана на графике функции  $u(t)$  при  $\omega = 4$ , где  $T = T_1 \approx 2.01371$ ,  $\tau_1 \approx \tau_2 \approx 0.45324$ ,  $\tau_3 \approx 0.73266$ , т.е.  $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx 1.56047$ ,  $\gamma_3 = \lambda_1 \approx 1.28104$ .

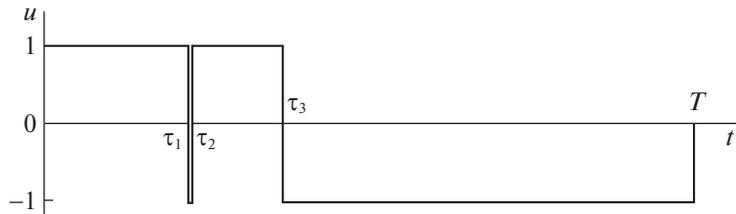


Рис. 7. Эволюция функции управления при  $T = T_1$

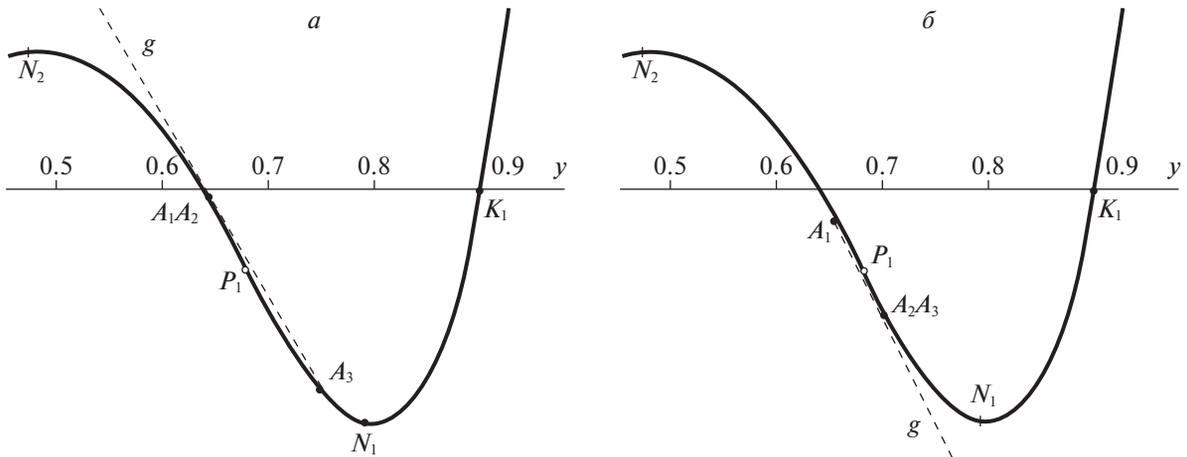


Рис. 8. Начало (а) и конец (б) режима с семью переключениями при  $\omega = 4$

Значения  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  будут корнями системы (2.2) при  $j = 4$ :

$$\begin{aligned} -1 - \cos T + 2\cos(\gamma_1) - 2\cos(\gamma_2) + 2\cos(\gamma_3) &= 0, \\ -1 - \cos\omega T + 2\cos(\omega\gamma_1) - 2\cos(\omega\gamma_2) + 2\cos(\omega\gamma_3) &= 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

и будут меняться с увеличением параметра  $T$ . Скорости  $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$  можно выразить, дифференцируя по  $T$  как соотношения (5.4), так и равенство

$$H = \det \begin{bmatrix} \gamma_3 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \sin\gamma_3 & \sin\gamma_1 & \sin\gamma_2 \\ \sin\omega\gamma_3 & \sin\omega\gamma_1 & \sin\omega\gamma_2 \end{bmatrix} = 0, \tag{5.5}$$

вытекающее из необходимого условия оптимальности (2.4). Разрешив полученную систему трех уравнений относительно производных, получим

$$\frac{d\gamma_i}{dT} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,3}. \tag{5.6}$$

Использованные здесь определители приводятся к виду

$$\begin{aligned} \Delta &= \omega(\gamma_3\gamma_2 S_{32}H_1 + \gamma_3\gamma_1 S_{31}H_2 + \gamma_2\gamma_1 S_{21}H_3), \\ \Delta_1 &= \eta_3 H_2 + \eta_2 H_3, \quad \Delta_2 = -\eta_3 H_1 + \eta_1 H_3, \quad \Delta_3 = -\eta_2 H_1 - \eta_1 H_2, \\ H_i &= \frac{\partial H}{\partial \gamma_i}, \quad \eta_i = \frac{1}{2}\omega T \gamma_i S_{i0}, \quad i = \overline{1,3}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

где обозначения  $S_{ij}$ ,  $i, j = \overline{0,3}$ ,  $i \neq j$ , имеют прежний смысл (5.3), а частные производные  $H_2$ ,  $H_3$  получаются из записи

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial \gamma_1} = \omega \gamma_2 \gamma_3 [S_{23} + (z_2 - z_3) \cos \gamma_1 - (y_2 - y_3) \cos \omega \gamma_1] \quad (5.8)$$

круговой перестановкой индексов.

Можно показать, что совпадавшие при  $T = T_1$  значения  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  в силу (5.6) “расходятся”, т.е. далее начинается эволюция режимов с семью переключениями управления в моменты  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ ,  $T$ ,  $2T - \tau_3$ ,  $2T - \tau_2$ ,  $2T - \tau_1$ .

**З а м е ч а н и е 6.** При всех значениях  $T \in (T_1, T_2)$  прямая  $g$ , проходящая через  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , не может иметь еще одну общую точку с контрольной кривой.

Для доказательства покажем, что точки  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  при всех  $T \in (T_1, T_2)$  не могут выйти за пределы дуги  $N_1 N_2$ . Если бы точка  $A_1$  совместились с  $N_2$ , то получили бы  $\cos(\omega \gamma_1) = 0$  и отрицательность левой части уравнения (5.4) в силу  $\cos(\omega \gamma_3) < \cos(\omega \gamma_2)$ . Это неравенство выполнялось бы при расположении точки  $A_2$  как на дуге  $K_2 N_1$  (ввиду  $\pi < \omega \gamma_3 < \omega \gamma_2 < 2\pi$ ), так и на дуге  $K_2 N_2$ , где  $\cos(\omega \gamma_2) > 0$ . В последнем случае  $\cos(\omega \gamma_3) < 0$ , поскольку точка  $A_3$  лежала бы на дуге  $K_1 N_1$  выше, чем точка пересечения прямой  $K_2 N_2$  и контрольной кривой. Расчеты показывают, что параметр  $\sigma$  этой точки пересечения монотонно убывает при  $\omega \in (3, \infty)$  от  $\sigma \approx 1.25884$  до  $\sigma \approx 1.18418$ . Аналогично доказывается невозможность совмещения точек  $A_3$  и  $N_1$ , так как из условия  $\cos(\omega \gamma_3) = 0$  следует отрицательность левой части уравнения (5.4) в силу  $\cos(\omega \gamma_1) < \cos(\omega \gamma_2)$ . Это неравенство выполнится как в случае  $A_2 \in K_2 N_2$  (когда  $2\pi < \omega \gamma_2 < \omega \gamma_1 < 3\pi$ ), так и в случае  $A_2 \in K_2 N_1$  (где  $\cos(\omega \gamma_2) > 0$ , причем  $\cos(\omega \gamma_3) < 0$  ввиду  $A_1 \in K_3 N_2$ ).

Эволюция режимов с семью переключениями управления завершится при  $T = T_2$ , когда из трех общих точек  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  прямой  $g$  и контрольной кривой две совместятся в виде точки касания (и “исчезнут”). В зависимости от значения  $\omega$  совместятся

- 1) либо точки  $A_1$ ,  $A_2$ , если  $3 < \omega < \omega_*$ ,
- 2) либо точки  $A_2$ ,  $A_3$ , если  $\omega > \omega_*$ .

Критическим является значение  $\omega_* \approx 3.73$ , при котором параметр  $\lambda_2$  соответствует точке  $P_1$  перегиба на дуге  $N_1 N_2$  контрольной кривой. В случае 1) оставшаяся третья точка  $A_3$ , лежащая ниже  $P_1$ , переименуется в точку  $A_1$  с параметром  $\gamma_1 = \lambda_2$ . В случае 2) останется точка  $A_1$ , лежащая выше  $P_1$  (рис. 8, б). Итак, при  $T = T_2$  совпадут моменты переключения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  (случай 1) либо  $\tau_2$  и  $\tau_3$  (случай 2) на графике функции  $u(t)$ , так что она вновь станет функцией с тремя моментами переключения.

Из следствия и замечаний 5, 6 следует утверждение.

**У т в е р ж д е н и е 2.** Для любого  $\omega \geq 3$  в задаче оптимального быстродействия (1.1)–(1.3) функция  $u(t)$ ,  $t \in [0, 2T]$  имеет:

- а) пять переключений при  $T \in (0, T_1)$ ;
- б) три переключения при  $T = T_1$ ;
- в) семь переключений при  $T \in (T_1, T_2)$ ;
- г) три переключения при  $T = T_2$ .

Заметим, что перечисленный список сценариев а)–г) окажется завершающим в диапазоне  $T \in (0, T_*/2]$  для случая  $\omega = 4$ , так как для него  $T_2 = \pi$ . На рис. 9 для  $\omega = 4$  показана лишь правая часть диаграммы функций оптимального управления (ее левая часть – зеркальная, но с переменной местами белого и серого цветов). В каждом слое диаграммы цифрой указано соответствующее количество переключений.

На рис. 10, а–в сравниваются фрагменты из горизонтального слоя диаграммы при  $T \in (T_1, T_2)$  для значений  $\omega = 4$ ,  $\omega = \omega_*$  и  $\omega = 3.5$ .

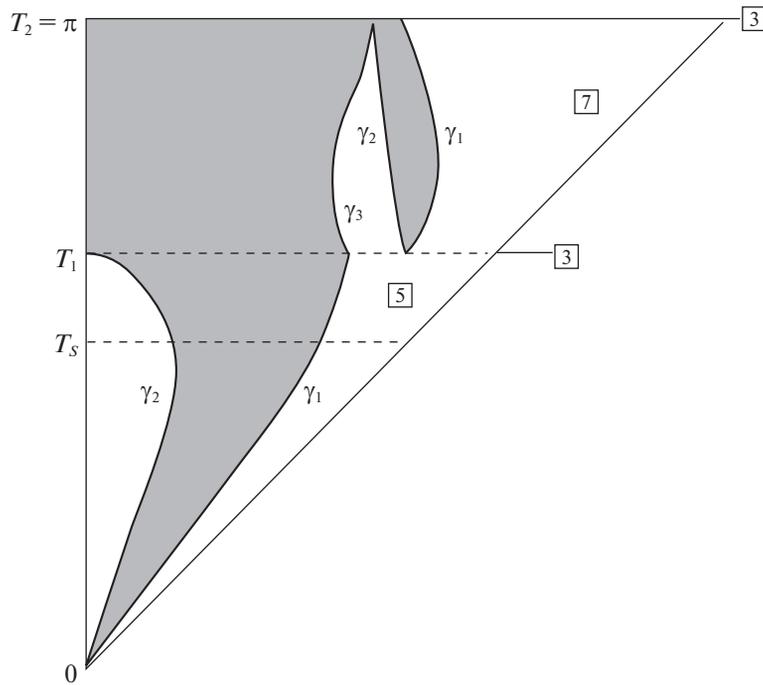


Рис. 9. Правая (“зеркальная”) часть диаграммы при  $\omega = 4$

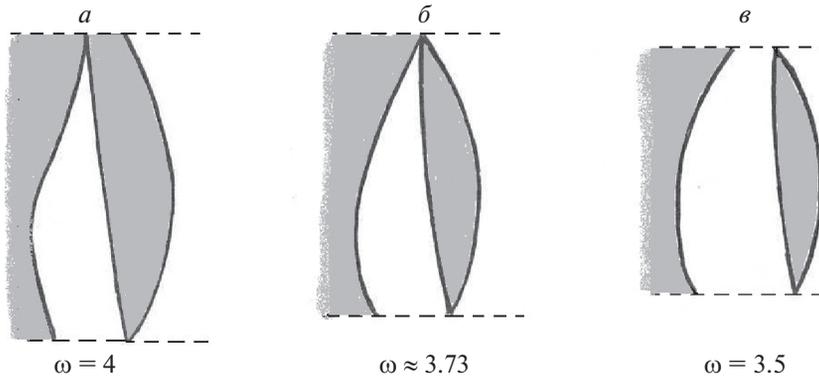


Рис. 10. Фрагмент диаграммы при  $T \in (T_1, T_2)$  для разных значений  $\omega$

**З а м е ч а н и е 7.** Для всех случаев  $\omega \geq 3, \omega \neq 4$  найдется  $\Delta T$ , такое, что при каждом значении  $T \in (T_2, T_2 + \Delta T]$  в задаче (1.1)–(1.3) оптимальное управление будет кусочно-постоянным с пятью моментами переключения.

Такой режим последует непосредственно за сценариями в), г). После “исчезновения” двух совместившихся при  $T = T_2$  точек на контрольной кривой, прямая  $g$  может быть проведена лишь через оставшуюся точку, наделяемую ролью  $A_1$ , и новую  $A_2$ , начинающую движение из состояния  $K_0$  при  $T > T_2$ . В начальном (при  $T = T_2$ ) положении  $K_0A_1$  прямая  $g$  не имеет других общих точек с дугой  $K_3K_4$  контрольной кривой, поскольку этой дуги не задевает даже проходящая выше прямая  $K_0N_2$ . Можно показать, что при  $\omega \geq 3$  ее угловой коэффициент превосходит угловой коэффициент касательной, проведенной из  $N_2$  к дуге  $K_3K_4$  (в пределе при  $\omega \rightarrow \infty$  отношение этих угловых коэффициентов монотонно убывает и стремится к значению  $\approx 1.943215$ ).

Упомянутому в замечании 7 диапазону параметров  $T$  соответствует такое расположение векторов, что повороты  $\overline{OA_1} \rightarrow \overline{OW}, \overline{OA_2} \rightarrow \overline{OW}, \overline{OA_2} \rightarrow \overline{OA_1}$  осуществляются по часовой стрелке,

поэтому  $S_{10} < 0$ ,  $S_{20} < 0$ ,  $S_{21} < 0$ , т.е.  $\dot{\gamma}_1 > 0$ ,  $\dot{\gamma}_2 > 0$ . С ростом параметра  $\gamma_1(T)$  точка  $A_1$ , пройдя положение  $N_2$ , попадет в зону, где прямая  $A_1A_2$  может коснуться дуги  $K_3N_3$ . Из точки касания выйдут “новые”  $A_1$  и  $A_2$ , а прежние точки  $A_1$  и  $A_2$  переименуются в  $A_3$  и  $A_4$ . Тогда начнется режим с девятью переключениями в моменты  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, T, 2T - \tau_4, 2T - \tau_3, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$ . В обозначениях (2.7) параметры  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  будут корнями системы (2.2) при  $j = 5$ :

$$\begin{aligned} 1 + 2\cos(\gamma_1) - 2\cos(\gamma_2) + 2\cos(\gamma_3) - 2\cos(\gamma_4) &= \cos T, \\ 1 + 2\cos(\omega\gamma_1) - 2\cos(\omega\gamma_2) + 2\cos(\omega\gamma_3) - 2\cos(\omega\gamma_4) &= \cos\omega T. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Кроме необходимого условия оптимальности (5.5), они также должны удовлетворить аналогичному уравнению:

$$R = \det \begin{bmatrix} \gamma_4 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \sin\gamma_4 & \sin\gamma_1 & \sin\gamma_2 \\ \sin\omega\gamma_4 & \sin\omega\gamma_1 & \sin\omega\gamma_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (5.10)$$

Дифференцируя по  $T$  соотношения (5.5), (5.9), (5.10), разрешим полученную систему уравнений относительно производных:

$$\frac{d\gamma_i}{dT} = \frac{\tilde{\Delta}_i}{\tilde{\Delta}}, \quad i = \overline{1,4}. \quad (5.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= -R_1(V_{43}H_2 + V_{42}H_3) + R_2(V_{43}H_1 - V_{41}H_3) + R_4(V_{32}H_1 + V_{31}H_2 + V_{21}H_3), \\ \tilde{\Delta}_1 &= \eta_2 R_4 H_3 + \eta_3 R_4 H_2 - \eta_4 R_2 H_3, \quad \tilde{\Delta}_2 = \eta_1 R_4 H_3 - \eta_3 R_4 H_1 + \eta_4 R_1 H_3, \\ \tilde{\Delta}_3 &= \eta_4 R_2 H_1 - \eta_4 R_1 H_2 - \eta_2 R_4 H_1 - \eta_1 R_4 H_2, \\ \tilde{\Delta}_4 &= \eta_3 R_2 H_1 - \eta_3 R_1 H_2 - \eta_2 R_1 H_3 - \eta_1 R_2 H_3, \end{aligned}$$

где  $V_{ij} = \omega\gamma_i\gamma_j S_{ij}$ , обозначения  $S_{ij}$ ,  $i, j = \overline{0,4}$ ,  $i \neq j$ , имеют прежний смысл (5.3), выражения  $\eta_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , вычисляются по формулам (5.7), а частные производные  $R_i = \partial R / \partial \gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 4$ , получаются из  $H_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , (5.8) формальной заменой индексов 3 на 4.

Уравнения (5.11) описывают эволюцию корней  $\gamma_i(T)$  системы (5.9), определяющих при каждом значении  $T$  моменты  $\tau_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , переключения управления. На контрольной кривой этой эволюции соответствует перемещение коллинеарных точек  $A_1, A_2, A_3, A_4$ .

**З а м е ч а н и е 8.** В режиме с девятью переключениями управления, начатом при расположении точек  $A_1, A_2, A_3$  внутри дуги  $N_2N_3$  (и точки  $A_4$  внутри  $K_0K_1$ ), прямая  $g$  не может иметь еще одну общую точку с контрольной кривой.

Для доказательства покажем, что в этом режиме точки  $A_1, A_2, A_3$  останутся внутри дуги  $N_2N_3$ . Если бы точка  $A_1$  совпала с  $N_3$ , то получили бы  $\cos(\omega\gamma_1) = 0$  и противоречие во втором уравнении (5.9), где выражение в левой части превзошло бы значение 1, а в правой – нет. Во-первых, потому, что  $\cos(\omega\gamma_2) < \cos(\omega\gamma_3)$  как в случае  $A_2 \in K_3N_2$  (где  $2\pi < \omega\gamma_3 < \omega\gamma_2 < 3\pi$ ), так и в случае  $A_2 \in K_3N_3$  (где  $\cos(\omega\gamma_2) < 0$ , причем  $\cos(\omega\gamma_3) > 0$ , ибо  $A_3 \in K_2N_2$ , поскольку точка  $N_2$  лежит выше прямой  $K_3N_3$ ). Во-вторых, потому, что  $\cos(\omega\gamma_4) < 0$ , так как точка  $A_4$  на дуге  $K_0K_1$  была бы ниже, чем точка  $E$  пересечения дуги  $K_0K_1$  с касательной, проведенной из  $N_3$  к дуге  $K_3N_2$  (расчеты показывают, что параметр  $\sigma$  этой точки  $E$  на промежутке  $\omega \in (4, \infty)$  монотонно растет от  $\sigma \approx 0.60873$  до  $\sigma \approx 0.71015$ ). Аналогичное противоречие возникло бы при совмещении точек  $A_3$  и  $N_2$ , когда  $\cos(\omega\gamma_3) = 0$  и  $\cos(\omega\gamma_2) < \cos(\omega\gamma_1)$ , поскольку обе точки  $A_1$  и  $A_2$  оказались бы на дуге  $K_3N_3$  (где  $3\pi < \omega\gamma_2 < \omega\gamma_1 < 3.5\pi$ ). При этом  $\cos(\omega\gamma_4) < 0$ , так как точка  $A_4$  на дуге  $K_0K_1$  была бы ниже, чем точка  $G$  пересечения дуги  $K_0K_1$  с касательной, проведенной из  $N_2$  к дуге  $K_3N_3$  (параметр точки  $G$  на промежутке  $\omega \in (4, \infty)$  монотонно растет от  $\sigma \approx 0.59170$  до  $\sigma \approx 0.67535$ ).

В силу замечания 8 упомянутый в нем режим с девятью переключениями управления удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. При совпадении на контрольной кривой точек

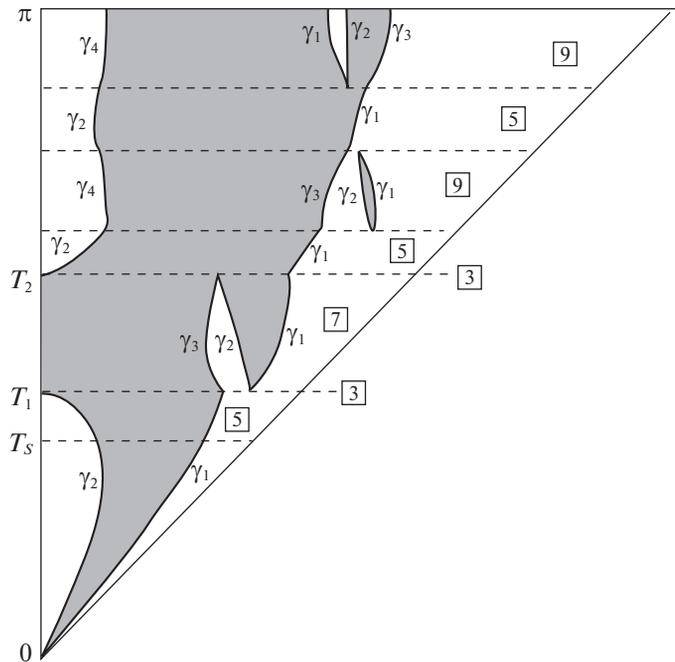


Рис. 11. Правая (“зеркальная”) часть диаграммы при  $\omega = 6$

$A_1$  и  $A_2$  (либо  $A_2$  и  $A_3$ ) этот режим может трансформироваться в режим с пятью переключениями управления, вновь описываемый соотношениями (5.2).

**6. Построение диаграммы функций оптимального управления в задаче (1.1)–(1.3).** На рис. 11 для случая  $\omega = 6$  показана правая (зеркальная) часть диаграммы функций оптимального управления в диапазоне  $T \in (0, \pi]$ . Перечисленным в утверждении 2 сценариям б) и г) здесь соответствуют значения  $T_1 \approx 1.29464$ ,  $T_2 \approx 1.86017$ . При  $T \in (0, T_1)$  (сценарий а) функции  $\gamma_i(T)$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , являются решениями системы (5.2), а при  $T \in (T_1, T_2)$  (сценарий в) функции  $\gamma_i(T)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , – решения системы (5.6). На горизонтали  $T = T_1$  (рис. 11) точкам  $A_3$  ( $\gamma_3 = \lambda_1 \approx 0.88107$ ) и  $A_1$ ,  $A_2$  ( $\gamma_1 = \gamma_2 \approx 1.01064$ ) соответствует случай (рис. 8, а) касательной из точки  $A_3$  к дуге  $P_1N_2$  контрольной кривой, после чего начинается режим с семью переключениями. Он завершается на горизонтали  $T = T_2$  (рис. 11) в момент совмещения точек  $A_3$  и  $A_2$  – случай касательной из точки  $A_1$  ( $\gamma_1 = \lambda_2 \approx 1.20540$ ) к дуге  $P_1N_1$ . При  $T > T_2$ , согласно замечанию 7, начинаются режимы с пятью переключениями, сменяемые режимами с девятью переключениями при  $T \in (2.070, 2.452)$  и при  $T \in (2.753, \pi]$  (в соответствии с поведением прямой  $g$  на контрольной кривой).

На диаграмме (рис. 11) можно выделить три слоя, отделяемые горизонталями  $T = T_1$  и  $T = T_2$ . В общем случае таких слоев может быть больше. Их количество (внутри диапазона  $T \in (0, T_*/2]$ ,  $T_* = 2m\pi$ , отвечающего несократимой дроби  $\omega = l/m$ ) определяется числом пересечений первых  $m$  фрагментов линии  $\delta$  (рис. 4) с семейством цепочек  $\varepsilon_j$ ,  $j \in N$ . С ростом значений  $\omega$  и  $m$  количество слоев растет.

На рис. 4 пронумеруем координаты  $(\omega T_i, \omega \lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , упомянутых точек пересечения в порядке возрастания  $T_i$ , так что нечетным значениям  $i$  будут соответствовать точки “входа” линии  $\delta$  в закрашенные области (рис. 4), а четным значениям  $i$  – точки “выхода”. В случае прохождения линии  $\delta$  через “узловую точку” цепочки (или касания с ней) положим  $T_i = T_{i+1}$ .

Из вышеизложенного следует, что при  $T \in (T_i, T_{i+1})$  ( $i$  – нечетные) реализуются режимы с семью переключениями оптимального управления. В начале и в конце диапазонов  $T \in (T_i, T_{i+1})$  ( $i$  – четные) – режимы с пятью переключениями, между которыми возможны (если прямая  $g$  заденет еще одну дугу контрольной кривой) режимы с девятью переключениями. В результате диаграмма

функций оптимального управления вдоль вертикальной оси  $T \in (0, T_*/2]$  составится из чередующихся слоев, отделяемых горизонталями  $T = T_i$ , символизирующими режимы с тремя переключениями управления. При этом для каждого слоя справедливы следующие обобщения замечаний 6 либо 8.

**З а м е ч а н и е 9.** Прямая  $g$ , пересекающая контрольную кривую в правой полуплоскости ( $y > 0$ ) в точках  $A_1, A_2, A_3$  при  $T \in (T_i, T_{i+1})$  ( $i$  – нечетное), не может иметь еще одну общую точку с контрольной кривой.

Доказательство аналогично обоснованию замечания 6: точки  $A_1, A_2, A_3$  на контрольной кривой не могут выйти за пределы дуги  $N_i N_{i+1}$  ( $i$  – нечетное), внутри которой они появились в начале диапазона  $T \in (T_i, T_{i+1})$ . Можно показать, что в таких положениях прямая  $g$  не задевает ближайшей дуги  $K_{i-1} N_{i-2}$ .

**З а м е ч а н и е 10.** В режиме с девятью переключениями управления, начатом при  $A_4 \in K_0 K_1$  с точками  $A_1, A_2, A_3$  внутри дуги  $N_i N_{i+1}$  ( $i$  – четное,  $i < \omega/2$ ), прямая  $g$  не может иметь еще одну общую точку с контрольной кривой.

Доказательство аналогично обоснованию замечания 8: точки  $A_1, A_2, A_3$  на контрольной кривой не могут выйти за пределы этой дуги  $N_i N_{i+1}$ .

Отметим, в частности, что при  $3 < \omega < 4$  линия  $\delta$  (рис. 4) целиком лежит в диапазоне значений  $\sigma < 2$ , что соответствует таким завершениям режимов с семью переключениями, когда точка  $A_1$  на контрольной кривой находится внутри дуги  $K_1 K_2$ . По этой причине при  $3 < \omega < 4$  режимы с девятью переключениями оптимального управления невозможны.

Алгоритм построения диаграммы функций оптимального управления начинается с определения корней системы (3.1) и изображения горизонталей  $T = T_i, i = 1, 2, \dots$ , отделяющих слои. Затем внутри каждого слоя строятся графики функций  $\gamma_k(T), k = 1, 2, \dots$ , путем интегрирования соответствующих уравнений. Система (5.6) – для режимов с семью переключениями при  $T \in (T_i, T_{i+1})$  ( $i$  – нечетное). Система (5.2) – для режимов с пятью переключениями в начале и в конце диапазонов при  $T \in (T_i, T_{i+1})$  ( $i$  – четное). На каждом шаге интегрирования системы (5.2) проверяется, нет ли касания прямой  $A_1 A_2$  с контрольной кривой, чтобы в таком случае перейти к уравнениям (5.11) – с девятью переключениями.

В начале и в конце промежутков интегрирования в формулах (5.2), (5.6) возникает неопределенность вида “0/0”, но она преодолевается вычислением соответствующих пределов (подробности опускаем).

На рис. 12 показана правая (зеркальная) часть диаграммы функций оптимального управления для случая  $\omega = 9$  при  $T \in (0, T_*/2]$ . Здесь корни системы (3.1)  $T_1 \approx 0.852783, T_2 \approx 1.204395, T_3 \approx 2.163081, T_4 \approx 2.628611$ . Последний корень  $T_5 = \pi$  совпадает (ввиду целочисленности  $\omega$ ) с  $T_*/2$  и задает граничную горизонталь.

Оба замечания 9 и 10 относились к случаям, когда упоминаемые в них дуги  $N_i N_{i+1}$  контрольной кривой при  $\omega \geq 3$  располагались в правой полуплоскости  $y > 0$ , отвечающей диапазону параметров  $0 < T < \pi$ . В частности, для целых значений  $\omega > 1$  имеем  $T_*/2 = \pi$ . Поскольку при  $\omega = 2$  оптимальное управление имеет [14] либо одно переключение (если  $T$  кратно  $2\pi$ ), либо пять (в остальных случаях), то справедливо следующее утверждение.

**У т в е р ж д е н и е 3.** Для любого целого значения  $\omega > 1$  в задаче оптимального быстрогодействия (1.1)–(1.3) функция  $u(t), t \in [0, 2T]$  не может иметь другого количества переключений, кроме 1, 3, 5, 7, 9.

При этом свойства контрольной кривой гарантируют также следующие симметрии, порождаемые свойствами 2 и 3.

**У т в е р ж д е н и е 4.** Для любого целого значения  $\omega > 1$  в задаче оптимального быстрогодействия (1.1)–(1.3) если функция управления с моментами переключения  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, T$  при  $T < T_*/2$  удовлетворяет необходимым условиям оптимальности, то им также удовлетворят функции управления:

- 1) с моментами переключения  $\tau_1 + \Delta, \tau_2 + \Delta, \dots, \tau_{j-1} + \Delta, T + \Delta$  (где  $\Delta = T_* - 2T$ );
- 2) с моментами переключения  $\tau_1 + T_*, \tau_2 + T_*, \dots, \tau_{j-1} + T_*, T + T_*$ .

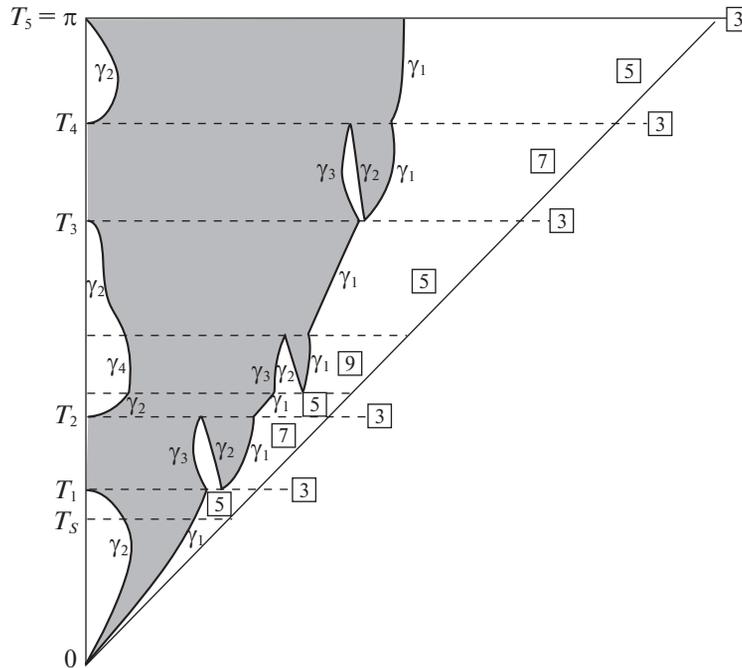


Рис. 12. Правая (“зеркальная”) часть диаграммы при  $\omega = 9$

Доказательство следует из того, что при одинаковом увеличении всех значений  $T$  и  $\tau_k$ ,  $k = 1, j - 1$ , останутся неизменными все параметры  $\gamma_k$  (2.7) и положения соответствующих точек  $A_k$ ,  $k = 1, j - 1$ , на контрольной кривой. Она содержит точку  $O(0, 0)$  с параметром  $\rho = \pi$ , т.е. расположена в правой полуплоскости  $y > 0$  для всех значений  $0 < T < \pi$ . Относя, как и прежде, точку  $W$  параметр  $T$ , обозначим через  $W_2$  и  $W_1$  точки с параметрами  $(T + T_*)$  и  $(T + \Delta)$  (где  $\Delta = T_* - 2T$ ). Ввиду соотношений  $\overline{OW_1} = \mu_1 \overline{OW}$ ,  $\mu_1 = T / (T - 2\pi)$  и  $\overline{OW_2} = \mu_2 \overline{OW}$ ,  $\mu_2 = T / (T + 2\pi)$  имеем коллинеарность векторов. Поэтому приведенные выше обоснования замечаний 5–10, гарантировавших отсутствие дополнительных общих точек прямой  $g$  и контрольной кривой, сохранят свой смысл, если вместо точки  $W$  взять  $W_1$  либо  $W_2$ .

Из п. 1) и 2) утверждения 4 вытекают свойства симметрии диаграмм функций оптимального управления при целых значениях  $\omega > 1$ . На рис. 9, 11, 12 изображенная правая (зеркальная) часть диаграммы дополнялась неизображенной левой (с заменой знаков управления на противоположные). Согласно п. 1), внутренность объединенного треугольника продолжится симметрично, отразившись относительно горизонтали  $T = \pi$ . Сдвоенная таким образом фигура (внутренность квадрата) затем будет периодически повторяться, согласно п. 2), с увеличением вертикальной координаты  $T$  до бесконечности.

В отличие от целочисленных  $\omega$ , для случая несократимой дроби  $\omega = l/m$  возникает дополнительный сценарий, отвечающий пересечению линии  $\delta$  с цепочкой  $\epsilon_1$  при  $(l - 1)\pi < \omega T < (l + 1)\pi$ . На рис. 4 для  $\omega = 9/2$  эта точка пересечения обозначена  $H$ . Ей соответствует начало такого режима с семью переключениями управления, когда из точки, расположенной в верхней части дуги  $K_0K_1$ , строится касательная  $f$  к крайней слева дуге контрольной кривой (рис. 5). Возможность (или невозможность) пересечения прямой  $f$  еще одной дуги контрольной кривой (в левой полуплоскости) требует дополнительного исследования. По крайней мере, диапазон значений  $T$  для точек, предшествующих точке  $H$  вдоль линии  $\delta$  (рис. 4), включает промежуток

$$0 < T < 2\pi - \frac{\pi}{\omega\sqrt{2}}. \tag{6.1}$$

В этом промежутке функция оптимального управления не может иметь более девяти переключений.

Для случаев  $1 < \omega < 2$  свойства контрольной кривой отличаются тем, что точки  $K_2$  и  $K_1$  лежат по разные стороны от оси  $Oz$ , которую контрольная кривая пересекает последовательно в точках с параметрами  $\rho = k\pi$ ,  $k = \overline{1, m}$ . На рис. 6 для  $\omega = 5/4$  показан сценарий касания прямой  $f$  к крайней слева дуге контрольной кривой при  $T_1 \approx 5.65644$ ,  $\gamma_3 = \lambda_1 \approx 0.43949$ . Этому сценарию предшествовали, согласно свойству 4, режимы с пятью переключениями управления, когда функции  $\gamma_i(T)$ ,  $i = 1, 2$ , были решениями системы (5.2) при  $T \in (0, T_s]$ . Значению  $T_s = 2\pi/\omega$  (т.е.  $\sigma = 2$ ) соответствует совмещение точки  $W$  с точкой  $K_2$ . При движении точки  $W$  по контрольной кривой (рис. 6) в диапазоне  $\pi < T < T_s$  последовательно осуществляется коллинеарность сначала векторов  $\overline{OW}$  и  $\overline{OA_2}$  (меняющая знаки  $S_{20}$  и  $\dot{\gamma}_1$ ), затем векторов  $\overline{OW}$  и  $\overline{OA_1}$  (со сменой знаков  $S_{10}$  и  $\dot{\gamma}_2$ ). После этого обе точки  $A_1$  и  $A_2$  будут двигаться вверх по дуге  $K_0K_1$  вплоть до совмещения  $A_2$  и  $K_0$ , причем у прямой  $A_1A_2$  и контрольной кривой не появится новых общих точек. Прямая  $f$  коснется дуги  $K_2K_3$  (рис. 6) раньше, чем точка  $W$  достигнет положения с параметром  $T = 2\pi$ . Поэтому в диапазоне  $T \in (0, 2\pi]$  для случаев  $1 < \omega < 2$  возможны лишь режимы с пятью или семью переключениями управления.

Для случаев  $2 < \omega < 3$  дуга  $K_2K_3$  контрольной кривой лежит выше оси  $Oy$ , но пересекается осью  $Oz$ . Здесь для режимов с пятью переключениями, начатых при  $T \in (0, T_s]$ , точки  $W$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  будут смещаться по кривой так, что (в отличие от случаев  $1 < \omega < 2$ ) сначала осуществится коллинеарность векторов  $\overline{OW}$  и  $\overline{OA_1}$  (меняющая знак  $\dot{\gamma}_2$ ), затем векторов  $\overline{OW}$  и  $\overline{OA_2}$  (со сменой знака  $\dot{\gamma}_1$ ), после чего точка  $A_1$  будет двигаться “вспять” (в отличие от сценария а) случаев  $\omega \geq 3$ ). Поэтому в момент совмещения  $A_2$  и  $K_0$  точка  $A_1$  окажется выше оси  $Oy$ , касательная из нее к контрольной кривой может строиться лишь к “крайней слева” дуге (аналогично прямой  $f$  на рис. 6). В этот момент параметры  $T_1$  и  $\lambda_1$  точек  $W$  и  $A_1$  будут соответствовать на рис. 4 пересечению линии  $\delta$  с цепочкой  $\varepsilon_1$ . Таким образом, для случаев  $2 < \omega < 3$  режиму (при  $T = T_1$ ) с тремя переключениями предшествуют только режимы с пятью переключениями, в том числе в диапазоне (6.1).

Вышеизложенное можно обобщить для любых  $\omega$  в следующем виде.

**Утверждение 5.** В задаче оптимального быстродействия (1.1)–(1.3) функция  $u(t)$ ,  $t \in [0, 2T]$  в диапазоне (6.1) не может иметь другого количества переключений, кроме 3, 5, 7, 9.

**Заключение.** Рассмотрена задача оптимального по быстродействию перемещения (на заданное расстояние) платформы с двумя осцилляторами из одного состояния покоя в другое. На основе свойств [14] функций оптимального управления введено графическое представление (в виде контрольной кривой), позволившее исследовать эволюцию таких функций в зависимости от дальности перемещения. Предложен наглядный образ этой зависимости в виде диаграммы, для построения которой указан алгоритм.

Наиболее простыми для исследования оказались случаи, когда значения  $\omega$  – целые. Им соответствуют не только простейшая форма (всего из одной арки) линии  $\delta$  на рис. 4, но и актуальность лишь части контрольной кривой, лежащей в правой полуплоскости, а также наименьший период для функций  $\gamma_k(T)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , чьи графики порождают контуры диаграммы. В частности, показано, что при целочисленных  $\omega$  в задаче быстродействия (1.1)–(1.3) оптимальное управление не может иметь другого количества переключений, кроме 1, 3, 5, 7 или 9.

Заметим, что с увеличением значения  $\omega$  растет количество корней системы (3.1), демонстрируемых точками пересечения линий на рис. 4 и отвечающих режимам с тремя переключениями управления. При этом на диаграмме функций оптимального управления становится все больше горизонтальных слоев и уменьшаются их толщины. Поскольку эти же корни являются координатами точек и на дуге  $OBf$  (рис. 2), то в среднем фигура на диаграмме для платформы с двумя осцилляторами приближается к виду диаграммы для платформы с одним осциллятором, отличаясь от нее все меньшими амплитудами флуктуаций. Это соответствует асимптотическому поведению системы (1.1), в которой при  $\omega \rightarrow \infty$  третье уравнение вырождается.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Каюмов О.Р. О глобальной управляемости некоторых лагранжевых систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 16–23.

3. *Овсеевич А.И., Федоров А.К.* Асимптотически оптимальное управление в форме синтеза для системы линейных осцилляторов // ДАН. 2013. Т. 452. № 3. С. 266–270.
4. *Гончарова Е.В., Овсеевич А.И.* Асимптотика множеств достижимости линейных динамических систем с импульсным управлением // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 1. С. 51–59.
5. *Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И.* Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // ДАН. 2010. Т. 434. № 3. С. 319–323.
6. *Ovseevich A.A.* Local Feedback Control Bringing a Linear System to Equilibrium // JOTA. 2015. V. 165. № 2. P. 532–544.
7. *Овсеевич А.И., Федоров А.К.* Движение системы осцилляторов под действием управления в виде обобщенного сухого трения // А и Т. 2015. № 5. С. 121–129.
8. *Овсеевич А.И., Федоров А.К.* Управление в форме синтеза для успокоения системы осцилляторов // А и Т. 2015. № 11. С. 3–17.
9. *Ананьевский И.М., Ишиханян Т.А.* Управление твердым телом, несущим диссипативные осцилляторы, в присутствии возмущений // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 42–51.
10. *Ананьевский И.М.* Управляемое перемещение платформы, несущей упругое звено с неизвестным фазовым состоянием // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 35–42.
11. *Ананьевский И.М., Овсеевич А.И.* Управляемое перемещение линейной цепочки осцилляторов // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 5. С. 18–26.
12. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
13. *Мамалыга В.М.* Об оптимальном управлении одной колебательной системой // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 8–17.
14. *Каюмов О.Р.* Оптимальное по быстродействию перемещение платформы с осцилляторами // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 699–718.