ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 5, с. 152–161

РОБОТОТЕХНИКА

УДК 531.36

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ РОБОТА-ЗМЕИ ПРИ НАЛИЧИИ АНИЗОТРОПНОГО СУХОГО ТРЕНИЯ И ЕДИНСТВЕННОГО УПРАВЛЯЮЩЕГО СИГНАЛА[1]

© 2022 г. М. З. Досаев[a], Л. А. Климина[a,*], В. А. Самсонов[a], Ю. Д. Селютский[a]

[a] *НИИ механики МГУ, Москва, Россия*

**e-mail: klimina@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 22.03.2022 г.
После доработки 01.04.2022 г.
Принята к публикации 30.05.2022 г.

Рассматривается робот-змея, перемещающийся по шероховатой плоскости. В точках контакта с опорой действует анизотропное сухое трение. Межзвенные шарниры являются пассивными, но в них установлены спиральные пружины. Проводится сопоставление следующих конфигураций робота: одно-, двух- и трехзвенный. Единственное управляющее воздействие – момент, приложенный к маховику, установленному в головном звене. Строится управление, обеспечивающее установившееся движение робота, при котором центр масс перемещается по змеевидной траектории. Указанные конфигурации при идентичных размерах, массе и одинаковом ограничении на управление сравниваются по средней скорости продвижения центра масс, а также по ширине полосы, необходимой для перемещения.

DOI: 10.31857/S0002338822050067

Введение. Мобильные роботы, перемещающиеся в сопротивляющихся средах за счет движения внутренних масс, активно разрабатываются и исследуются в научной литературе. Такие устройства, в частности, предназначены для функционирования в агрессивных средах. Рассматриваются системы как с переменной, так и с неизменяемой геометрией [1–3]. Большим разнообразием отличаются и конструкции корпуса, и схемы организации перемещения внутренних масс [4]. Исследуется перемещение систем, управляемых движением внутренних тел, по твердой поверхности и в жидкости. При этом используются разнообразные математические модели внешних сил [5–8]. Существенно отличаются случаи движения по прямой, по плоскости и в пространстве [9, 10]. Рассматриваются различные задачи управления: ориентация объекта в пространстве, движение вдоль заданной траектории и др. (в ряде работ дополнительно исследуются задачи оптимизации) [6, 11–13].

Разнообразие направлений развития мобильных роботов с подвижными внутренними телами исключительно велико. В настоящей работе остановимся подробнее на одном из них. Будем рассматривать робот с возможностью изменения геометрии (и отдельно проведем сравнение со случаем твердотельного корпуса). Корпус состоит из n звеньев ($n = 1...3$), соединенных пассивными шарнирами. Аппарат может перемещаться в горизонтальной плоскости. Таким образом, робот относится к змееподобным аппаратам, по конструкции корпуса близким к [14–18], но отличается отсутствием управления в межзвенных шарнирах. Управление осуществляется только посредством одного внутреннего маховика, установленного в головном звене. Ближайшие аналоги – аппараты с двумя/тремя звеньями и одним внутренним маховиком, предложенные и изученные в [19–21]. Подобные однозвенные аппараты исследуются в [22–24].

Модель внешнего воздействия, примененная в работе, принципиально отличается от вышеуказанных статей: рассматривается движение по шероховатой плоскости при наличии анизотропного сухого трения, в то время как в [14, 15] сухое трение изотропно, в [16–20, 22, 23] механическая система является неголономной (по крайней мере, одна из опор представляет собой конек Чаплыгина), в [24] в точке опоры действует анизотропное вязкое трение, а в [21] аппарат

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00303).

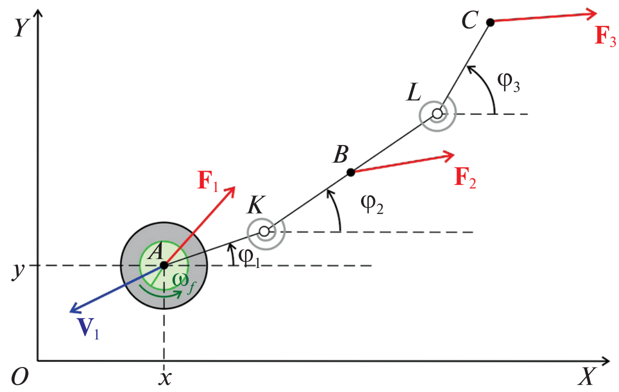

Рис. 1. Схема механической системы

движется в жидкости. Можно отметить, что для реальных змей действительно имеет место анизотропия трения при движении [25].

В работе ставится задача формирования установившегося режима, при котором происходит продвижение корпуса в заданном направлении. Проводится параметрический анализ с целью выбора характеристик конструкции (распределения масс между элементами, длин звеньев, коэффициентов жесткости межзвенных пружин), а также параметров закона управления (при наличии фиксированного ограничения на максимальную величину управляющего момента), обеспечивающих как можно более высокую скорость продвижения. При этом сравниваются три конфигурации: аппарат с корпусом неизменяемой геометрии, двухзвенный робот, трехзвенный робот.

1. Описание системы и постановка задачи. Рассмотрим трехзвенный механизм AK-KBL-LC, расположенный в горизонтальной плоскости (рис. 1). Звенья механизма соединены в точках K и L цилиндрическими шарнирами, $AK = KB = BL = LC = r$. Головное звено AK имеет массу m_1, центральный момент инерции J_1, центр масс звена расположен в точке A. Звено KL имеет массу m_2, считаем, что вся масса сосредоточена в точке B. Звено LC имеет массу m_3, вся масса сосредоточена в точке C. На головном звене AK в точке A установлен маховик, имеющий массу m_0 и центральный момент инерции J_0. Маховик приводится во вращение вокруг вертикальной оси A мотором, статор которого является частью тела AK.

Положение механической системы на неподвижной плоскости OXY задается шестью обобщенными координатами, в качестве которых выберем координаты x и y точки A, углы φ_i, $i = 1\ldots3$, отклонения звеньев AK, KL, LC от оси OX, угол поворота маховика относительно оси OX (циклическая координата). Здесь и далее индекс i принимает значения 1, 2 и 3, что соответствует первому AK, второму KL и третьему LC звеньям. Обозначим через ω_i угловые скорости звеньев, ω_f – угловую скорость маховика относительно первого звена; $\mathbf{V}_i$ – векторы скоростей точек A, B, C; V_i – их модули.

Кинетическая энергия системы имеет следующий вид:

$$T = 0.5J_1\omega_1^2 + 0.5J_0\left(\omega_1 + \omega_f\right)^2 + 0.5\left(m_1 + m_0\right)V_1^2 + 0.5m_2V_2^2 + 0.5m_3V_3^2,$$

$$\mathbf{V}_1 = \left(\dot{x}, \dot{y}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + \left(-r\omega_1\sin\varphi_1 - r\omega_2\sin\varphi_2, r\omega_1\cos\varphi_1 + r\omega_2\cos\varphi_2\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_2 + \left(-r\omega_2\sin\varphi_2 - r\omega_3\sin\varphi_3, r\omega_2\cos\varphi_2 + r\omega_3\cos\varphi_3\right)^{\mathrm{T}}.$$

В шарнирах K и L установлены спиральные пружины жесткости c_1 и c_2 соответственно. Пружины находятся в ненапряженном состоянии, когда все точки A, K, B, L, C расположены на одной прямой. Установка пружин в шарнирах для роботов, управляемых перемещением внутренних тел, предложена, например, в [20, 26, 27], для мехатронных устройств преобразования энергии – в [28]. Целесообразность использования пружин обсуждается далее при параметрическом анализе системы. Потенциальная энергия имеет вид

$$P = 0.5c_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + 0.5c_2(\varphi_3 - \varphi_2)^2.$$

Звенья робота опираются на горизонтальную плоскость в точках A, B, C. В каждой точке опоры действует анизотропное сухое трение $\mathbf{F}_i$. Анизотропия связана со свойствами опор, а не поверхности, по которой движется робот. Существуют различные подходы к описанию анизотропного трения [29–33], в данном случае используем модель [29–31]. В соответствии с указанным подходом вводится понятие тензора трения, описывающее зависимость коэффициента сухого трения от направления движения. Пусть $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$ – орты главных осей тензора Θ трения. Тогда при движении вдоль $\mathbf{e}_\xi$ сила трения описывается классическим выражением для сухого трения Кулона с некоторым коэффициентом трения μ_ξ аналогично для $\mathbf{e}_\eta$. При движении в произвольном направлении проекции силы трения $\mathbf{F}$ на главные оси тензора трения определяется выражением

$$\begin{pmatrix} F_\xi \\ F_\eta \end{pmatrix} = -\frac{N}{V}\Theta\begin{pmatrix} V_\xi \\ V_\eta \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \mu_\xi & 0 \\ 0 & \mu_\eta \end{pmatrix},$$

где V_ξ, V_η – проекции вектора $\mathbf{V}$ скорости точки контакта на главные оси тензора трения, N – величина нормальной реакции опоры.

Анизотропию трения можно реализовать на практике, например, используя в качестве опоры жесткосоединенное со звеном (заклиненное) колесо, протектор которого имеет специальный рисунок [30]. Далее для краткости опору с анизотропным трением будем называть “колесо”.

Пусть для i-го звена направления вдоль и поперек звена являются главными для тензора трения. Проекции векторов на эти направления будем обозначать индексами ξ и η соответственно, а коэффициенты трения по этим направлениям – $\mu_{i\xi}$ и $\mu_{i\eta} \geq \mu_{i\xi}$. Тогда

$$F_{i\xi} = -\mu_{i\xi}N_iV_{i\xi}/V_i, \quad V_{i\xi} = V_{ix}\cos\varphi_i + V_{iy}\sin\varphi_i, \quad N_1 = (m_1 + m_0)g, \quad N_2 = m_2g, \quad N_3 = m_3g;$$
$$F_{i\eta} = -\mu_{i\eta}N_iV_{i\eta}/V_i, \quad V_{i\eta} = -V_{ix}\sin\varphi_i + V_{iy}\cos\varphi_i;$$
$$F_{ix} = F_{i\xi}\cos\varphi_i - F_{i\eta}\sin\varphi_i;$$
$$F_{iy} = F_{i\xi}\sin\varphi_i + F_{i\eta}\cos\varphi_i.$$

Момент U, формируемый мотором, – единственное управление, присутствующее в системе. Поскольку рассматриваемая система обладает шестью степенями свободы, имеет место существенный дефицит управляющих воздействий [34, 35]. Считаем, что момент U ограничен по абсолютной величине значением $U_{\max}$.

В качестве основной задачи управления будем рассматривать продвижение робота в направлении, противоположном оси OX. Точнее говоря, цель управления – обеспечить наличие притягивающего установившегося движения робота, при котором средняя (по времени на большом промежутке времени) скорость точки A (а следовательно, и любой другой точки) имеет отрицательную проекцию на ось OX, среднее отклонение точки A от оси OX нулевое, и не происходит “залипания” точек контакта, т.е. их скорости не обращаются в ноль.

2. Уравнения движения. Уравнения, описывающие перемещение аппарата в предположении, что скорости точек опоры ненулевые, запишем в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \omega_i}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \dfrac{\partial P}{\partial \varphi_i} = Q_i, \quad i = 1\ldots3, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \omega_f}\right) = U. \end{cases} \tag{2.1}$$

Выражения для кинетической и потенциальной энергий, а также для компонент сил трения приведены выше. Обобщенные силы Q_i, соответствующие угловым координатам φ_i, имеют вид

$$Q_1 = r(F_{2y} + F_{3y})\cos\varphi_1 - r\left(F_{2x} + F_{3x}\right)\sin\varphi_1,$$
$$Q_2 = r(F_{2y} + 2F_{3y})\cos\varphi_2 - r\left(F_{2x} + 2F_{3x}\right)\sin\varphi_2,$$
$$Q_3 = r\left(F_{3y}\cos\varphi_3 - F_{3x}\sin\varphi_3\right).$$

Управление будем строить следующим образом:

$$U = \begin{cases} U_p, & \left|U_p\right| \le U_{\max}, \\ U_{\max}\operatorname{sign}(U_p), & \left|U_p\right| > U_{\max}, \end{cases}$$
$$U_p = -\left(U_{\max}\operatorname{sign}\left(\sin(2\pi w_0 t)\right) - k_0 y - k_1\varphi_1\right).$$

Здесь w_0 – частота вынуждающего воздействия, k_0 и k_1 – коэффициенты обратной связи, которые введены для того, чтобы обеспечить нулевое значение среднего отклонения курса от направления против оси OX.

3. Дополнительные предположения и методы решения задачи. В ходе исследования будем считать, что общие габариты робота, параметры маховика и характеристики двигателя фиксированы. Пусть полная масса робота 0.5 кг, масса маховика $m_0 = 0.05$ кг, момент инерции маховика $J_0 = 0.0005$ кгм^2, масса первого звена $m_1 \ge 0.05$ кг, момент инерции первого звена $J_1 = 0.002$ кгм^2, суммарная длина звеньев составляет $4r = 0.2$ м, максимальный модуль управляющего момента $U_{\max} = 0.1$ Н.

Найдем значения коэффициентов w_0, k_0, k_1 закона управления, а также параметры m_1, m_2, c_1, c_2 конструкции робота, которые обеспечивают формирование установившегося направленного движения. Проанализируем влияние указанных параметров на среднюю скорость центра масс на таком режиме. При этом будем рассматривать три конфигурации: одно-, двух- и трехзвенный робот. Отметим, что варьирование величин c_1, c_2 возможно не во всех конфигурациях.

Все описанные далее результаты параметрического анализа получены путем прямого численного интегрирования уравнений движения с различными параметрами и начальными условиями. Поиск аттрактора системы (2.1) выполнялся методом установления. Среди направлений дальнейшего исследования можно выделить применение в данной задаче численно-аналитических методов поиска установившихся решений и исследования их устойчивости, например [36–40].

4. Случай однозвенного робота. В [22] рассмотрено движение саней Чаплыгина с установленным на них управляемым внутренним маховиком и продемонстрировано наличие периодического режима движения, безреверсного по отношению к основному направлению перемещения (т.е. знак проекции скорости центра масс на заданное направление не меняется). Естественно ожидать, что подобный периодический режим существует и для аппарата, в котором конек Чаплыгина заменен на опору с анизотропным трением. В предложенной выше модели такой случай реализуется при следующих условиях на параметры: $c_1 = c_2 \to \infty$, $m_2 = 0$, $\mu_{1\xi} = \mu_{1\eta} = \mu_{3\xi} = \varepsilon \ll 1$, $\mu_{3\eta} \approx 1$. Иными словами, робот представляет собой одно твердое тело, опирающееся на плоскость в точках A и C, причем в точке A трение изотропно, а в точке C – нет. Предположим, что реализуются следующие значения коэффициентов трения: $\varepsilon = 0.025$ (при скольжении стали по льду или некоторым видам пластика), $\mu_{3\eta} = 0.9$ (за счет нанесения на опору микронасечек).

Обозначим модуль средней скорости центра масс на установившемся движении вдоль оси абсцисс через $\left|V_{aver}\right|$. На рис. 2 приведены значения $\left|V_{aver}\right|$ в зависимости от массы m_1 первого звена при различных значениях частоты w_0 вынуждающего воздействия. Все значения получены при коэффициентах обратной связи $k_0 = -0.1$ Н, $k_1 = 0.1$ Нм. При значениях параметров $m_1 \approx 0.15$ кг, $w_0 \approx 0.6$ с$^{-1}$, на которых достигается максимум $\left|V_{aver}^{\max}\right| \approx 0.34$ м/с, увеличение/уменьшение коэффициентов k_0, k_1, вплоть до двукратного, практически не меняет среднюю скорость перемещения аппарата.

Пример траектории точки A в процессе выхода на установившийся режим при $m_1 = 0.15$ кг, $w_0 = 0.6$ с$^{-1}$, $k_0 = -0.1$ Н, $k_1 = 0.1$ Нм приведен на рис. 3, *а*, начальные значения всех переменных нулевые, кроме $\dot{x}(0)$, $\dot{x}(0) = -0.02$ м/с. Стрелкой на рисунке показано направление движения.

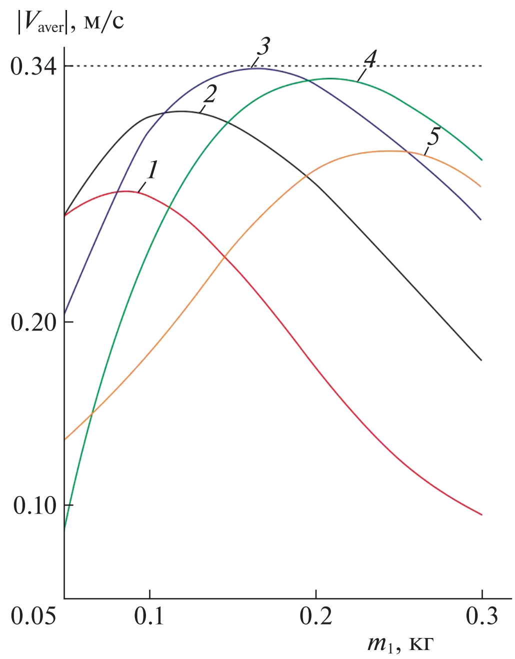

Рис. 2. Средняя скорость центра масс однозвенного робота на установившемся движении в зависимости от массы первого звена при разных значениях частоты возбуждения: *1* – $w_0 = 0.8$ с$^{-1}$, *2* – $w_0 = 0.7$ с$^{-1}$, *3* – $w_0 = 0.6$ с$^{-1}$, *4* – $w_0 = 0.5$ с$^{-1}$, *5* – $w_0 = 0.4$ с$^{-1}$

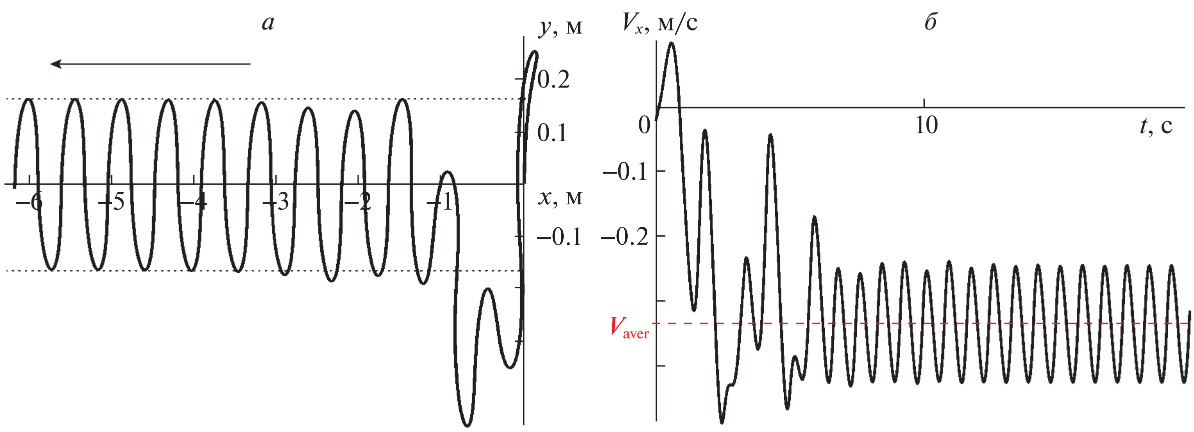

Рис. 3. Пример выхода на установившийся режим движения для случая однозвенного аппарата: *а* – траектория точки *A*; *б* – изменение скорости центра масс

На установившемся режиме знак проекции на ось *OX* скорости V_x центра масс не меняется, т.е. движение безреверсное (рис. 3, *б*).

Ширина полосы, необходимой при вышеуказанных параметрах для реализации установившегося движения робота (отрезка *AC*), составляет около 0.33 м.

В случае, когда в точке *A* вместо опоры с небольшим изотропным трением установлено “колесо”, аналогичное *C* (т.е. $\mu_{1\eta} = 0.9$), не удалось найти значения параметров, при которых возможно установившееся направленное продвижение однозвенного робота. В связи с этим отметим, что в “предельном” случае двух коньков Чаплыгина, ориентированных вдоль звена *AC*, корпус совершает только прямолинейное движение, исключены повороты аппарата, и тем самым нивелируется возможность применения внутреннего маховика для управления.

5. Случай двухзвенного робота. Пусть $c_2 \to \infty$, $m_2 = 0$. Это соответствует двухзвенному роботу, в котором шарнир (с пружиной) имеется только в точке K. В случае, когда "колесо" установлено только в точке C, а в точке A – опора с небольшим изотропным трением ($\mu_{1\xi} = \mu_{1\eta} = \mu_{3\xi} = 0.025$, $\mu_{3\eta} = 0.9$), за счет выбора коэффициента c_1 не удалось увеличить максимальную скорость $|V_{aver}|$ по сравнению со значением $|V_{aver}^{\max}| \approx 0.34$ м/с, полученным для однозвенного робота.

Рассмотрим подробно случай, когда каждая опора (A и C) двухзвенного аппарата представляет собой "колесо", характеризующееся следующими коэффициентами трения: $\mu_{1\xi} = \mu_{3\xi} = 0.025$, $\mu_{1\eta} = \mu_{3\eta} = 0.9$. В отличие от однозвенного аппарата, для двухзвенного, благодаря наличию дополнительной степени свободы, такой выбор опор, вообще говоря, не является препятствием к направленному перемещению.

На рис. 4 проиллюстрировано влияние на скорость $|V_{aver}|$ коэффициента c_1 жесткости пружины при $m_1 = 0.15$ кг, $k_0 = -0.1$ Н, $k_1 = 0.1$ Нм и при различных значениях частоты w_0 вынуждающего воздействия. При этом удалось реализовать скорость $|V_{aver}| \approx 0.43$ м/с. Таким образом, добавление пассивного шарнира, оснащенного пружиной, позволяет увеличить скорость продвижения аппарата более чем на 25%. При этом предпочтительные (с позиций максимизации средней скорости) распределение масс, частота вынуждающего воздействия и тип передней опоры отличаются от случая однозвенного робота.

Крестиками на рис. 4 отмечены точки, соответствующие значениям параметров, при которых периодическая траектория системы (2.1) разрушается из-за того, что скорость одной из опор в некоторой точке траектории обращается в нуль. Кружочками обозначены точки, где притягивающее периодическое решение перестает существовать, но скорости опор при этом отделены от нуля: возможно, в этом случае притягивающая траектория разрушается, выходя на некоторое неустойчивое многообразие.

При больших значениях коэффициента жесткости периодические решения системы (2.1) с ненулевым значением $|V_{aver}|$ не обнаружены. Этого следовало ожидать с учетом описанного выше случая однозвенного робота с двумя "колесами". Интересно отметить, что при относительно малых значениях c_1 режим направленного продвижения также не выявлен. В некотором диапазоне параметров, отвечающих за распределение масс и управление, наблюдается более одного локального максимума скорости $|V_{aver}|$ в зависимости от коэффициента жесткости.

Интересно, что при некоторых значениях параметров существуют единовременно как минимум два притягивающих периодических решения системы (2.1). Границы соответствующих интервалов по параметру c_1 отмечены на рис. 4 пунктирными линиями. Не исключено наличие

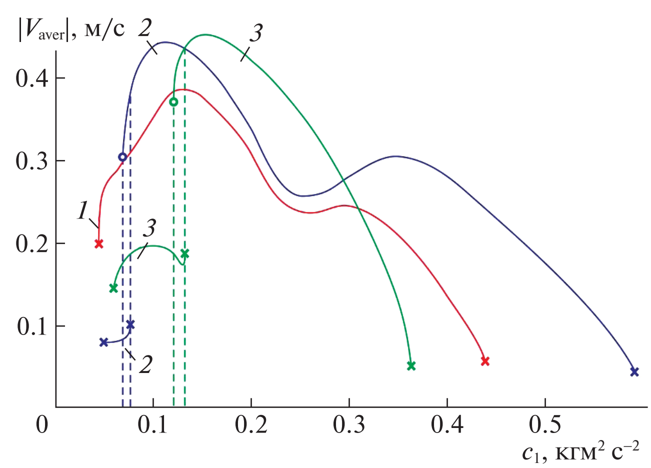

Рис. 4. Средняя скорость центра масс двухзвенного робота на установившемся движении в зависимости от коэффициента жесткости межзвенной пружины при разных значениях частоты возбуждения: *1* – $w_0 = 0.6$ с$^{-1}$, *2* – $w_0 = 1.1$ с$^{-1}$, *3* – $w_0 = 1.6$ с$^{-1}$

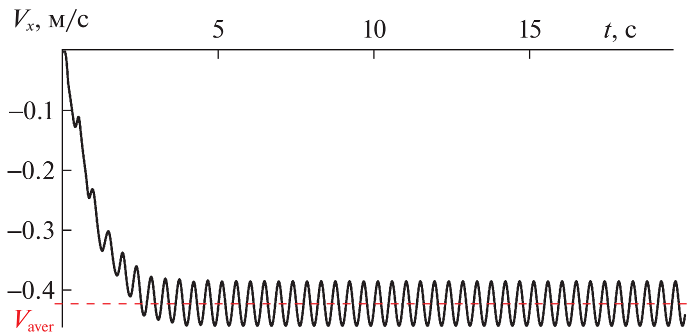

Рис. 5. Пример изменения скорости центра масс при выходе на установившийся режим: случай двухзвенного робота

большего числа ветвей бифуркационной диаграммы $V_{aver}(c_1)$, которые не были обнаружены в ходе прямого численного интегрирования системы (2.1) ввиду узких областей притяжения или неустойчивости соответствующих траекторий.

Пример изменения скорости центра масс при переходе на установившийся режим для набора параметров $m_1 = 0.15$ кг, $w_0 = 1.1$ с$^{-1}$, $c_1 = 0.1$ кгм^2 с$^{-2}$, $k_0 = -0.1$ Н, $k_1 = 0.1$ Нм приведен на рис. 5 (начальные значения всех переменных нулевые, кроме $\dot{x}(0) = -0.01$ м/с). Средняя скорость на режиме составила $|V_{aver}| \approx 0.42$ м/с.

На рис. 6, *а* показаны положения звеньев робота на полученном установившемся режиме в моменты времени, интервалы между которыми составляют 0.1 с. Масштабы по осям абсцисс и ординат одинаковы. Стрелкой показано направление перемещения.

Отметим, что для двухзвенного робота ширина полосы, необходимой для продвижения в заданном направлении, равна около 0.18 м (что на 45% меньше, чем для однозвенного при максимуме $|V_{aver}|$). Затраты мощности на управление при этом составляют примерно 0.22 Вт (вычисляются как произведение управляющего момента U и относительной угловой скорости маховика ω_f, осредненное по времени на периоде).

6. Трехзвенный робот. Перейдем к исследованию трехзвенного робота. Параметрический анализ системы показывает, что добавление второго шарнира не приводит к существенному увеличению скорости аппарата на установившемся режиме, однако позволяет уменьшить амплитуды отклонений точек корпуса от прямой OX. Для примера рассмотрим случай трехзвенного робота со следующими значениями параметров: $m_1 = 0.2$ кг, $m_3 = 0.25$ кг, $m_2 = 0$, $c_1 = c_2 = 0.15$ кгм^2 с$^{-2}$, $w_0 = 1.2$ с$^{-1}$, $k_0 = -0.1$ Н, $k_1 = 0.1$ Нм, $\mu_{1\xi} = \mu_{3\xi} = 0.025$, $\mu_{1\eta} = \mu_{3\eta} = 0.9$. Средняя скорость установившегося движения составляет 0.43 м/с. На рис. 6, *б* приведены положения робота на плоскости в процессе движения по установившейся траектории. Интервалы между моментами времени равны 0.1 с, масштаб тот же, что и на рис. 6, *а*. Полоса на плоскости, необходимая для продвижения трехзвенного робота, имеет ширину около 0.12 м, т.е. примерно на 30% уже, чем в случае двухзвенного аппарата (рис. 6, *а*).

Затраты мощности на управление на установившемся режиме – примерно 0.21 Вт.

На рис. 7 проиллюстрировано влияние распределения масс на $|V_{aver}|$ при приведенных выше значениях прочих параметров. Наибольшая средняя скорость получена в случае, когда масса промежуточного звена KL нулевая, а масса третьего звена LC равна массе первого звена вместе с маховиком (на рис. 7 – это пересечение кривой 4 с осью ординат).

Отметим, что средняя скорость достаточно чувствительна к изменению коэффициента трения $\mu_{1\xi} = \mu_{3\xi} = \varepsilon$ в направлении вдоль звена. Так, при увеличении ε до 0.05 средняя скорость снижается до 0.27 м/с, при $\varepsilon = 0.06$ она составляет 0.16 м/с, а при $\varepsilon \geq 0.07$ режим направленного продвижения не удалось обнаружить.

7. Основные результаты. Рассмотрено движение одно-, двух- и трехзвенного робота при наличии сухого анизотропного трения: коэффициент трения вдоль звена меньше, чем поперек звена.

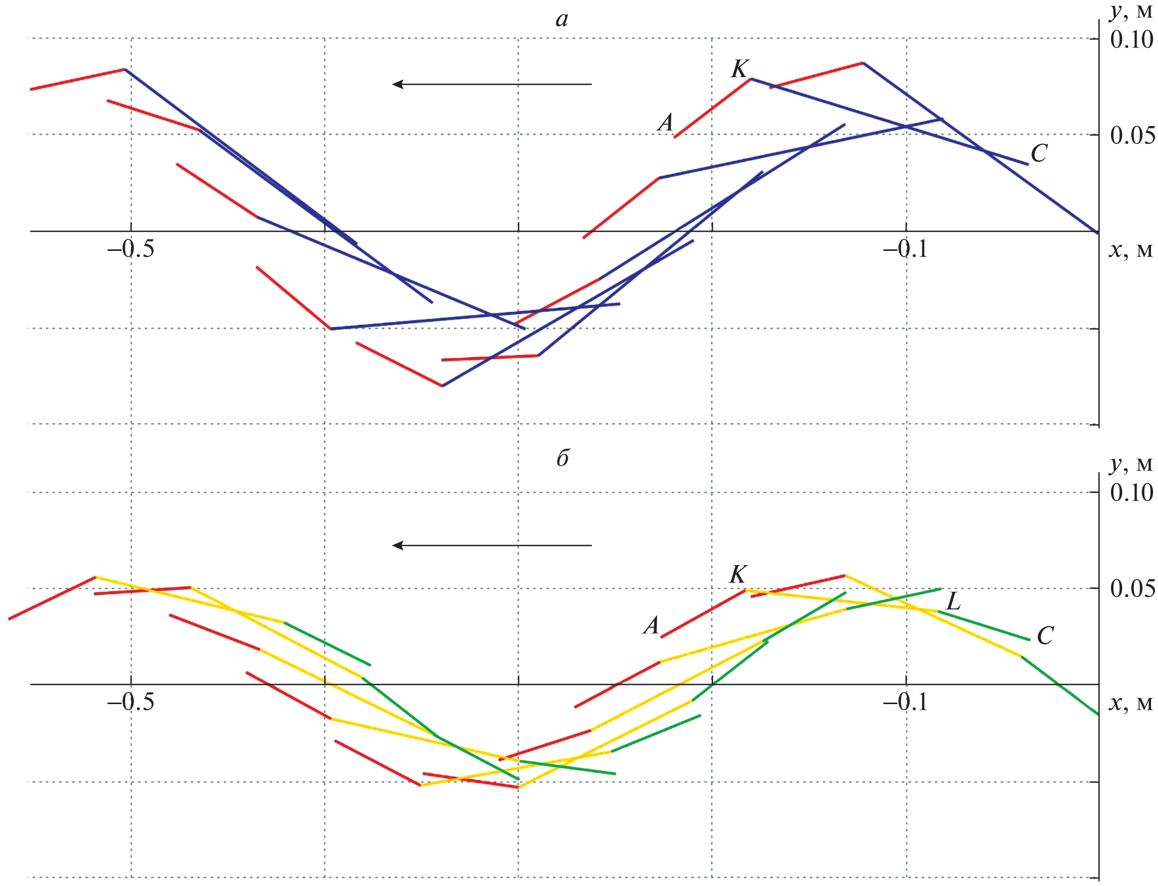

Рис. 6. Положения звеньев корпуса в моменты времени с интервалом 0.1 с на установившемся режиме движения: *а* – для двухзвенного робота, *б* – для трехзвенного

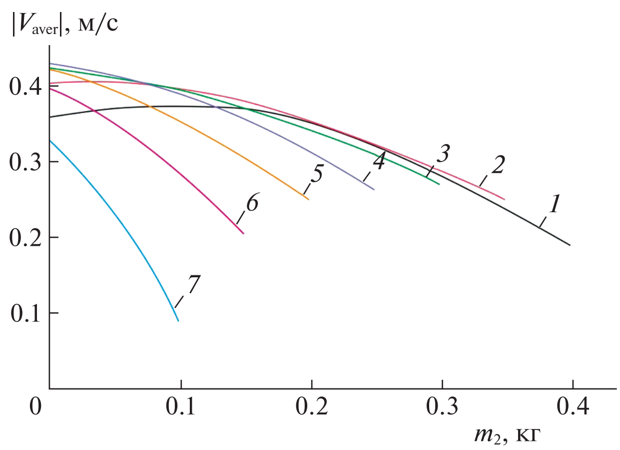

Рис. 7. Средняя скорость центра масс трехзвенного робота на установившемся движении при различном распределении масс между звеньями: *1* – $m_1 = 0.05$ кг, *2* – $m_1 = 0.10$ кг, *3* – $m_1 = 0.15$ кг, *4* – $m_1 = 0.20$ кг, *5* – $m_1 = 0.25$ кг, *6* – $m_1 = 0.30$ кг, *7* – $m_1 = 0.35$ кг

Построено управление внутренним маховиком, обеспечивающее продвижение в заданном направлении.

Показано, что в рамках предложенной модели добавление дополнительных степеней свободы, а именно увеличение числа звеньев при наличии пружин в соединительных шарнирах, позволяет увеличить скорость направленного продвижения робота и уменьшить амплитуды колебаний точек корпуса. В случае, когда корпус не является одним твердым телом, наличие анизотропного трения в передней опорной точке (точнее, увеличение коэффициента трения в направлении поперек звена) способствует значительному увеличению средней скорости движения на установившемся режиме.

Для двухзвенного робота обнаружены диапазоны значений параметров, при которых в системе (2.1) одновременно существуют два аттрактора, соответствующие продвижению аппарата в заданном направлении. Установлено, что для трехзвенного робота в широком диапазоне параметров максимальные значения средней скорости установившегося движения достигаются при нулевой массе промежуточного звена и одинаковых массах первого звена с маховиком и последнего звена.

Заключение. Построена и исследована модель робота-змеи, управляемого движением одного внутреннего маховика, в предположении, что в точках опоры действует сухое анизотропное трение: коэффициент трения поперек звена больше, чем вдоль звена. Построено управление, обеспечивающее продвижение центра масс аппарата, безреверсное по отношению к определенной прямой. Проведено сравнение трех конфигураций – с одним, двумя и тремя звеньями – по критериям максимальной средней скорости установившегося движения и ширины полосы, необходимой для продвижения в заданном направлении. По указанным показателям наиболее предпочтительной оказалась конфигурация с тремя звеньями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 33–44.
2. *Козлов В.В., Рамоданов С.М.* О движении в идеальной жидкости тела с жесткой оболочкой и меняющейся геометрией масс // ДАН. 2002. Т. 382. № 4. С. 478–481.
3. *Childress S., Spagnolie S.E., Tokieda T.* A Bug on a Raft: Recoil Locomotion in a Viscous Fluid // J. Fluid Mechanics. 2011. V. 669. P. 527–556.
4. *Chernousko F.L.* Locomotion of Multibody Robotic Systems: Dynamics and Optimization // Theoretical and Applied Mechanics. 2018. V. 45. № 1. P. 17–33.
5. *Волкова Л.Ю., Яцун С.Ф.* Управление движением трехмассового робота, перемещающегося в жидкой среде // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 4. С. 845–857.
6. *Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // ПММ. 2012. Т. 76. № 1. С. 3–22.
7. *Fairchild M.J., Hassing P.M., Kelly S.D., Pujari P., Tallapragada P.* Single-Input Planar Navigation via Proportional Heading Control Exploiting Nonholonomic Mechanics or Vortex Shedding // Dynamic Systems and Control Conf. Arlington, Virginia. USA, 2011. V. 54754. P. 345–352.
8. *Килин А.А., Кленов А.И., Тененев В.А.* Управление движением тела с помощью внутренних масс в вязкой жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10. № 4. С. 445–460.
9. *Болотник Н.Н., Губко П.А., Фигурина Т.Ю.* О возможности безреверсного периодического прямолинейного движения системы двух тел на шероховатой плоскости // ПММ. 2018. Т. 82. №. 2. С. 138–148.
10. *Chernousko F.L.* Two- and Three-Dimensional Motions of a Body Controlled by an Internal Movable Mass // Nonlinear Dynamics. 2020. V. 99. № 1. P. 793–802.
11. *Фигурина Т.Ю.* Оптимальное управление системой материальных точек на прямой с сухим трением // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 3–9.
12. *Черноусько Ф.Л.* Плоские движения тела, управляемого при помощи подвижной массы // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 494. № 1. С. 69–74.
13. *Кугушев Е.И., Попова Т.В., Сазонов С.В.* О движении системы с перемещающимся внутренним элементом при наличии внешнего вязкого трения // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2020. № 5. С. 50–56.
14. *Chernousko F.L.* Locomotion of Multibody Robotic Systems: Dynamics and Optimization // Theoretical and Applied Mechanics. 2018. V. 45. № 1. P. 17–33.
15. *Черноусько Ф.Л.* Управление движением многозвенников на шероховатой плоскости // Тр. ИММ УрО РАН. 2000. Т. 6. № 1. С. 277–287.
16. *Kuleshov A.S.* Further Development of the Mathematical Model of a Snakeboard // Regular and Chaotic Dynamics. 2007. V. 12. № 3. P. 321–334.
17. *Derammelaere S., Copot C., Haemers M., Verbelen F., Vervisch B., Ionescu C., Stockman K.* Realtime Locomotion Control of a Snakeboard Robot Based on a Novel Model, Enabling Better Physical Insights // European J. Control. 2019. V. 45. P. 57–64.

18. *Yona T., Or Y.* The Wheeled Three-Link Snake Model: Singularities in Nonholonomic Constraints and Stick–Slip Hybrid Dynamics Induced by Coulomb Friction // Nonlinear Dynamics. 2019. V. 95. № 3. P. 2307–2324.

19. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S.* Exotic Dynamics of Nonholonomic Roller Racer with Periodic Control // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. V. 23. № 7. P. 983–994.

20. *Fedonyuk V., Tallapragada P.* The Dynamics of a Chaplygin Sleigh with an Elastic Internal Rotor // Regular and Chaotic Dynamics. 2019. V. 24. № 1. P. 114–126.

21. *Pollard B., Tallapragada P.* Passive Appendages Improve the Maneuverability of Fishlike Robots // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2019. V. 24. № 4. P. 1586–1596.

22. *Kelly S.D., Fairchild M.J., Hassing P.M., Tallapragada P.* Proportional Heading Control for Planar Navigation: The Chaplygin Beanie and Fishlike Robotic Swimming // American Control Conf. (ACC). IEEE. Montreal, QC. Canada, 2012. P. 4885–4890.

23. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S.* Dynamics of a Chaplygin Sleigh with an Unbalanced Rotor: Regular and Chaotic Motions // Nonlinear Dynamics. 2019. V. 98. № 3. P. 2277–2291.

24. *Borisov A.V., Kuznetsov S.P.* Comparing Dynamics Initiated by an Attached Oscillating Particle for the Nonholonomic Model of a Chaplygin Sleigh and for a Model with Strong Transverse and Weak Longitudinal Viscous Friction Applied at a Fixed Point on the Body // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. V. 23. № 7. P. 803–820.

25. *Transeth A.A., Pettersen K.Y., Liljebäck P.* A Survey on Snake Robot Modeling and Locomotion // Robotica. 2009. V. 27. № 7. P. 999–1015.

26. *Tallapragada P., Gandra C.* A Mobile Mathieu Oscillator Model for Vibrational Locomotion of a Bristlebot // J. Mechanisms and Robotics. 2021. V. 13. № 5. P. 054501.

27. *Досаев М.З., Самсонов В.А.* Особенности динамики систем с упругими элементами и сухим трением // ПММ. 2021. Т. 85. № 4. С. 426–435.

28. *Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z.* Elastically Mounted Double Aerodynamic Pendulum // Intern. J. Structural Stability and Dynamics. 2019. V. 19. № 05. P. 1941007.

29. *Zmitrowicz A.* Mathematical Descriptions of Anisotropic Friction // Intern. J. Solids and Structures. 1989. V. 25. № 8. P. 837–862.

30. *Вильке В.Г.* Об анизотропном сухом трении и неудерживающих неголономных связях // ПММ. 2008. Т. 72. № 1. С. 3–12.

31. *Козлов В.В.* Лагранжева механика и сухое трение // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 4. С. 855–868.

32. *Карапетян А.В., Шишков А.А.* Динамика конька Чаплыгина на горизонтальной плоскости с сухим анизотропным трением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2020. № 2. С. 61–63.

33. *Steindl A., Edelmann J., Plöchl M.* Limit Cycles at Oversteer Vehicle // Nonlinear Dynamics. 2020. V. 99. № 1. P. 313–321.

34. *Spong M.W.* Underactuated Mechanical Systems // Control Problems in Robotics and Automation. Berlin, Heidelberg: Springer, 1998. P. 135–150.

35. *Formalskii A.M.* Stabilization and Motion Control of Unstable Objects. Berlin/Boston: Walter de Gruyter, 2015.

36. *Parker T.S., Chua L.O.* Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. N. Y.: Springer-Verlag, 1989.

37. *Kamiyama K., Komuro M., Endo T.* Bifurcation of Quasi-Periodic Oscillations in Mutually Coupled Hard-Type Oscillators: Demonstration of Unstable Quasi-Periodic Orbits // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2012. V. 22. № 6. P. 1230022.

38. *Климина Л.А.* Метод формирования авторотаций в управляемой механической системе с двумя степенями свободы // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 6. С. 1–11.

39. *Климина Л.А.* Метод формирования асинхронных автоколебаний в механической системе с двумя степенями свободы // ПММ. 2021. Т. 85. № 2. С. 152–171.

40. *Aleksandrov A.Y., Tikhonov A.A.* Averaging Technique in the Problem of Lorentz Attitude Stabilization of an Earth-Pointing Satellite // Aerospace Science and Technology. 2020. V. 104. P. 105963.