

УПРАВЛЕНИЕ  
В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 62–50:534

КВАЗИОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ<sup>1</sup>

© 2022 г. П. С. Воеводин<sup>a,\*</sup>, Ю. М. Заболотнов<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup> Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия

\*e-mail: p.voevodin@inbox.ru

\*\*e-mail: yumz@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.02.2021 г.

После доработки 28.06.2021 г.

Принята к публикации 29.11.2021 г.

Рассматривается задача квазиоптимальной стабилизации малых колебаний механических систем со многими степенями свободы с медленно изменяющимися параметрами и малыми возмущениями. Для синтеза приближенно оптимальных регуляторов используется принцип динамического программирования Беллмана в сочетании с методом усреднения. Метод усреднения применяется для получения асимптотического решения уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана. Предлагаемый алгоритм синтеза позволяет существенно упростить задачу конструирования приближенно оптимальных регуляторов, а для рассматриваемых частных случаев получить аналитическое решение. В качестве примера рассматривается задача стабилизации движения малого космического аппарата относительно направления троса при развертывании космической тросовой системы.

DOI: 10.31857/S0002338822020159

**Введение.** Применение метода усреднения для решения разнообразных задач оптимального управления рассматривалось во многих работах, например [1–5]. Систематическое изложение вопросов, связанных с применением асимптотических методов, в частности метода усреднения, для синтеза управлений представлено в монографиях [2, 4], где особое внимание уделено вопросам стабилизации движений колебательных систем. В этих публикациях разработаны общие алгоритмы применения принципов максимума Понтрягина и динамического программирования Беллмана для синтеза управлений в задачах стабилизации движений колебательных систем. Подробно рассмотрены оптимизация по критериям быстродействия и минимальным затратам на управление [2, 4].

В статье рассматривается задача стабилизации движения колебательной системы со многими степенями свободы при действии малых возмущений. Предлагается процедура расчета оптимального регулятора, основанная на совместном применении принципа динамического программирования Беллмана и метода усреднения. Синтез регулятора осуществляется с помощью квадратичного критерия оптимальности, зависящего от амплитуд колебаний в системе и управления, т.е. используется свертка критериев оптимальности. Метод усреднения применяется для приближенного решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, что позволяет в некоторых случаях получить достаточно простое аналитическое решение задачи. В частности, это относится к случаю медленного изменения параметров системы. Рассматривается пример применения предлагаемой методики для стабилизации угловых колебаний малого космического аппарата (КА) относительно направления троса при развертывании космической тросовой системы. Показано, что, изменяя весовые коэффициенты в критерии оптимальности, характеризующие определенные моды колебаний в системе, можно формировать вид прецессии КА относительно направления троса.

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 21-51-53002.

**1. Уравнения движения и постановка задачи.** Рассматриваются движения колебательной системы с малыми возмущениями и управлением вида

$$\ddot{y} + C(\tau)y = \varepsilon f(y, \dot{y}, \tau) + \varepsilon Nu(t), \quad (1.1)$$

где  $y \in \mathbb{R}^n$  – вектор переменных системы,  $\varepsilon$  – малый положительный параметр,  $C(\tau)$  – симметричная положительно-определенная матрица-функция медленного времени  $\tau = \varepsilon t$ ,  $t$  – время,  $f(y, \dot{y}, \tau)$  – вектор-функция возмущений,  $u(t) \in \mathbb{R}^V$  – вектор управлений,  $N$  – заданная постоянная матрица,  $\dot{y} = dy/dt$ ,  $\ddot{y} = d^2y/dt^2$ .

Предполагается, что система (1.1) удовлетворяет условиям управляемости и наблюдаемости [6].

Невозмущенное решение  $\varepsilon = 0$  систем (1.1), (1.2) характеризуется частотами  $\omega_k(\tau)$  и собственными векторами  $\gamma^{(k)}(\tau)$ , где  $k = \overline{1, n}$ , которые определяются из следующих соотношений:

$$|C(\tau) - \omega^2(\tau)E| = 0, \quad (C(\tau) - \omega_k^2(\tau)E)\gamma^{(k)}(\tau) = 0, \quad (1.2)$$

где  $E$  – единичная матрица.

Тогда, переходя в системе (1.1) к нормальным координатам  $x(t) = \Gamma^{-1}(\varepsilon t)y(t)$ , где  $\Gamma(\varepsilon t)$  – матрица собственных векторов (далее просто  $\Gamma$ ), получим

$$\ddot{x} + \Omega^2(\tau)x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \tau, \varepsilon) + \varepsilon Mu, \quad (1.3)$$

где  $\Omega^2(\tau) = \text{diag}(\omega_1^2(\tau), \dots, \omega_n^2(\tau))$ ,  $M = \Gamma^{-1}N$ ,

$$F(x, \dot{x}, \tau, \varepsilon) = \Gamma^{-1}(f(\Gamma x, \Gamma \dot{x} + \varepsilon \Gamma' x, \tau) - 2\Gamma' \dot{x} - \varepsilon \Gamma'' \dot{x}), \quad \Gamma' = d\Gamma/d\tau, \quad \Gamma'' = d^2\Gamma/d\tau^2.$$

Невозмущенное решение в нормальных координатах имеет вид

$$x_k = A_k \cos \varphi_k(t), \quad \dot{x}_k = -\omega_k(\tau) A_k \sin \varphi_k(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad (1.4)$$

где  $\varphi_k(t) = \omega_k(\tau)t + \alpha_k$  – фазы (далее просто  $\varphi_k$ ),  $A_k$  и  $\alpha_k$  – произвольные постоянные.

Основываясь на виде невозмущенного решения (1.4) и имея в виду использование метода усреднения для построения приближенно оптимального управления, применяется стандартная замена переменных вида  $(x, \dot{x}) \Rightarrow (A, \varphi)$  в системе (1.3), где  $A, \varphi$  – вектора амплитуд и фаз колебаний. Тогда, применяя метод вариации произвольных постоянных (метод медленно меняющихся амплитуд [7]) и рассматривая соотношения (1.4) как замену переменных, получим

$$\dot{A}_k = -\frac{\varepsilon}{\omega_k(\tau)} [\Phi_k(A, \varphi, \tau, \varepsilon) + U_k] \sin \varphi_k, \quad (1.5)$$

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k(\tau) - \frac{\varepsilon}{A_k \omega_k(\tau)} [\Phi_k(A, \varphi, \tau, \varepsilon) + U_k] \cos \varphi_k, \quad (1.6)$$

где  $\Phi_k(A, \varphi, \tau, \varepsilon) = F_k(A, \varphi, \tau, \varepsilon) + \omega'_k(\tau) A_k \sin \varphi_k$ ,  $F_k(A, \varphi, \tau, \varepsilon)$  и  $U_k$  –  $k$ -е компоненты вектор-функций  $F(A, \varphi, \varepsilon)$  и  $U = Mu$ ,  $\omega'_k(\tau) = d\omega_k(\tau)/d\tau$ .

Рассматривается задача о стабилизации движения колебательной системы, обеспечивающая ее динамическую устойчивость (уменьшение амплитуд колебаний) исходя из минимума квадратичного критерия оптимальности:

$$J = \varepsilon \int_0^T W(A, U) dt, \quad (1.7)$$

где

$$W(A, U) = \sum_{k=1}^n (a_k A_k^2 + c U_k^2),$$

$a_k, c > 0$  – весовые коэффициенты, причем обычно полагают

$$c + \sum_{k=1}^n a_k = 1.$$

Движение систем (1.5), (1.6) рассматривается на асимптотически большом интервале времени  $T = L/\varepsilon$ , где  $L < \infty$  – некоторая константа, следовательно, функционал (1.7) изменяется на величину порядка  $O(1)$ .

**2. Определение приближенно оптимального управления.** В соответствии с принципом динамического программирования Беллмана оптимальное управление находится из условия

$$\min_U (dV/dt + \varepsilon W(A, U)) = 0, \tag{2.1}$$

где  $V(A, \varphi, \tau)$  – функция Беллмана, полная производная которой определяется в силу систем (1.5), (1.6).

Выделяя в условии (2.1) функцию, зависящую от управления, и учитывая выражение для производной функции  $V(A, \varphi, \tau)$ , получим

$$\min_{U_k} \sum_{k=1}^n \left[ cU_k^2 - \frac{U_k}{\omega_k(\tau)} P_k(V, A_k, \varphi_k) \right] = 0, \tag{2.2}$$

где

$$P_k(V, A_k, \varphi_k) = \frac{\partial V}{\partial A_k} \sin \varphi_k + \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} \frac{\cos \varphi_k}{A_k}.$$

Тогда из необходимого условия минимума (2.2) нетрудно найти выражение для оптимального управления:

$$U_k^o = \frac{1}{2c\omega_k(\tau)} P_k(V, A_k, \varphi_k). \tag{2.3}$$

Подставляя выражение (2.3) в соотношение (2.1), приходим к уравнению в частных производных Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^n \left[ \varepsilon a_k A_k^2 - \varepsilon \frac{\Phi_k(A, \varphi, \tau, \varepsilon) P_k(V, A_k, \varphi_k)}{\omega_k(\tau)} + \right. \\ \left. + \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} \omega_k(\tau) - \varepsilon \frac{P_k(V, A_k, \varphi_k)^2}{4c\omega_k^2(\tau)} \right] = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для определения приближенного решения уравнения (2.4) применяется метод усреднения. В этом случае используется почти тождественная замена переменных [3]

$$A = A^o + \varepsilon \nu_1(A^o, \varphi^o, \tau) + \varepsilon^2 \dots, \quad \varphi = \varphi^o + \varepsilon \mu_1(A^o, \varphi^o, \tau) + \varepsilon^2 \dots, \tag{2.5}$$

где  $A^o, \varphi^o$  – новые переменные метода усреднения,  $\nu_1(A^o, \varphi^o, \tau), \mu_1(A^o, \varphi^o, \tau)$  – периодические функции по каждой из фаз  $\varphi_k, k = \overline{1, n}$ , с периодом  $2\pi$ , удовлетворяющие условиям  $\langle \nu_1(A^o, \varphi^o, \tau) \rangle = \langle \mu_1(A^o, \varphi^o, \tau) \rangle = 0$ . Здесь  $\langle \cdot \rangle$  – стандартный оператор усреднения по фазам  $\varphi_k$ .

Приближенные решения уравнения (2.4) также предлагается определять в виде асимптотического ряда

$$V(A^o, \varphi^o, \tau) = V^o(A^o, \tau) + \varepsilon V_1(A^o, \varphi^o, \tau) + \varepsilon^2 \dots, \tag{2.6}$$

где функция  $V^o(A^o, \tau)$  задается в соответствии с первым приближением метода усреднения, при этом  $\langle V_1(A^o, \varphi^o, \tau) \rangle = 0$ .

Здесь рассматривается нерезонансный случай, т.е. предполагается, что для  $\tau \in [0, T]$  поправки к первому приближению метода усреднения  $\nu_1(A^o, \varphi^o, \tau), \mu_1(A^o, \varphi^o, \tau)$  ограничены.

Подставляя ряды (2.5), (2.6) в уравнение (2.4), получим в первом приближении

$$\frac{\partial V^o}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^n \left[ a_k(A_k^o)^2 - \frac{\Phi_k(A^o, \varphi^o, \tau, 0) P_k^o}{\omega_k(\tau)} + \frac{\partial V_1}{\partial \varphi_k^o} \omega_k(\tau) - \frac{(P_k^o)^2}{4c\omega_k^2(\tau)} \right] = 0. \quad (2.7)$$

Здесь сохранены только члены порядка  $O(\varepsilon)$ , а члены более высокого порядка по малому параметру  $\varepsilon$  опущены. При этом функция  $P_k(V, A_k, \varphi_k)$  представляется в виде  $P_k(V, A_k, \varphi_k) = P_k^o + \varepsilon \dots$ , где  $P_k^o = \sin \varphi_k^o \partial V^o / \partial A_k^o$ .

Проводя процедуру усреднения по фазам уравнения (2.7), получим

$$\frac{\partial V^o}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^n \left[ a_k(A_k^o)^2 - \frac{\langle \Phi_k P_k^o \rangle}{\omega_k(\tau)} - \langle (P_k^o)^2 \rangle / 4c\omega_k^2(\tau) \right] = 0, \quad (2.8)$$

где  $\langle (P_k^o)^2 \rangle = (\partial V^o / \partial A_k^o)^2 / 2$ , при этом учитывается, что  $\langle \partial V_1 / \partial \varphi_k^o \rangle = 0$ .

Проведение усреднения позволило упростить уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (2.8), так как в этом случае количество независимых переменных уравнения в частных производных уменьшилось в 2 раза, так как  $V^o(A^o, \tau)$ . Если из уравнения (2.8) удастся найти положительно определенную функцию  $V^o(A^o, \tau) \geq 0$ , когда  $\tau \in [0, L]$ , то приближенно оптимальное управление найдется из выражения

$$\varepsilon U_k^o = \frac{\varepsilon}{2c\omega_k(\tau)} \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} \sin \varphi_k^o + \varepsilon^2 \dots, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.9)$$

Имея в виду соотношение  $U = \Gamma^{-1} Nu$ , управление в исходных координатах будет иметь вид

$$Nu^o = \Gamma U^o. \quad (2.10)$$

Тогда из условия (2.1) следует

$$dV^o/dt = -\varepsilon W(A^o, U^o). \quad (2.11)$$

В силу вида функции  $W(A, U)$  (1.7) ее усредненный аналог  $W(A^o, U^o)$  есть знакоопределенная по  $A_k^o$  и положительная функция. В этом случае  $dV^o/dt \leq 0$  – знакоопределенная и отрицательная функция, что приводит к монотонному убыванию  $V^o(A^o, \tau)$ . А это в свою очередь ведет к монотонному убыванию нормы вектора амплитуд  $\|A^o\|$ , когда  $t \in [0, L/\varepsilon]$ .

Соответствие свойств устойчивости усредненной и исходной систем уравнений подробно рассмотрено, например, в монографии [8] и следует из общих теорем метода усреднения.

В прикладных задачах после определения приближенно оптимального управления (2.9) можно провести усреднение системы (1.5), (1.6) с учетом найденного управления и исследовать движение системы, например, методами качественной теории дифференциальных уравнений в пространстве переменных  $(A_1^o, \dots, A_n^o)$ . В частности, когда  $n = 2$ , можно использовать метод фазовой плоскости [9].

**3. Случай отсутствия возмущений в усредненной системе.** Если матрица  $C(\tau)$  не зависит от времени  $\tau$ , т.е.  $\omega_k'(\tau) = 0$ ,  $\Gamma'(\tau) = 0$  и выполняется условие ортогональности

$$\left\langle \sum_{k=1}^n F_k P_k^o \right\rangle = 0,$$

то усреднение уравнений (1.5), (1.6) дает  $\dot{A}_k^o = 0$ ,  $\dot{\varphi}_k^o = \omega_k$ .

В этом случае уравнение (2.8) упрощается:

$$\sum_{k=1}^n \left[ a_k(A_k^o)^2 - \left( \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} \right)^2 / 8c\omega_k^2 \right] = 0. \quad (3.1)$$

Тогда решение уравнения (2.8) можно искать в виде

$$V^o(A^o) = \sum_{k=1}^n b_k (A_k^o)^2, \quad (3.2)$$

где  $b_k$  – определяемые коэффициенты.

Подставляя (3.2) в уравнение (3.1) и приравнявая к нулю множители при  $(A_k^o)^2$ , получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $b_k$ :  $-a_k + b_k^2/2c\omega_k^2 = 0, k = \overline{1, n}$ , откуда

$$b_k = \omega_k \sqrt{2ca_k}. \quad (3.3)$$

С учетом (3.3) приближенно оптимальное управление примет вид

$$\varepsilon U_k^o = \varepsilon \sqrt{2a_k/c} A_k^o \sin \varphi_k^o + \varepsilon^2 \dots \quad (3.4)$$

или в нормальных координатах

$$\varepsilon U_k^o = -\frac{\varepsilon}{\omega_k} \dot{x}_k \sqrt{2a_k/c} + \varepsilon^2 \dots, \quad k = \overline{1, n}. \quad (3.5)$$

Для получения управления в исходных координатах необходимо учесть, что  $\dot{x} = \Gamma^{-1} \dot{y} + \varepsilon \dots$  и использовать соотношение (2.10).

Подставив управление (3.5) в системы (1.5), (1.6) и проводя стандартную процедуру усреднения, получим уравнения для амплитуд

$$\dot{A}_k^o = -\frac{\varepsilon}{2\omega_k} A_k^o \sqrt{2a_k/c}, \quad (3.6)$$

вид которых подтверждает динамическую устойчивость усредненной системы.

**4. Случай медленного изменения частот системы.** Если выполняется условие ортогональности

$$\left\langle \sum_{k=1}^n F_k P_k^o \right\rangle = 0$$

(или когда возмущения  $f(y, \dot{y}, \tau) = 0$ ), то усреднение уравнений (1.5), (1.6) при отсутствии управления дает

$$\dot{A}_k^o = -\varepsilon B_k(\tau) A_k^o, \quad \dot{\varphi}_k = \omega_k(\tau), \quad (4.1)$$

где  $B_k(\tau) = \omega_k'(\tau)/2\omega_k(\tau) + E_k(\tau)$ ,  $E_k(\tau)$  –  $k$ -я диагональная компонента матрицы  $\Gamma^{-1}\Gamma'$ .

В этом случае уравнение (2.8) принимает вид

$$\frac{\partial V^o}{\partial \tau} = -\sum_{k=1}^n \left[ a_k (A_k^o)^2 - B_k(\tau) A_k^o \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} - \left( \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} \right)^2 / 8c\omega_k^2(\tau) \right]. \quad (4.2)$$

Решение уравнения (2.8) ищется как

$$V^o(A^o, \tau) = \sum_{k=1}^n b_k(\tau) (A_k^o)^2. \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в уравнение (4.2) и приравнявая к нулю коэффициенты при  $(A_k^o)^2$ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $b_k(\tau)$ :

$$db_k/d\tau = -a_k + 2B_k(\tau) b_k + b_k^2/2c\omega_k^2(\tau), \quad k = \overline{1, n}. \quad (4.4)$$

Во многих аналогичных задачах при аналитическом конструировании оптимальных регуляторов (АКОР), например [10, 11], часто используется установившееся или квазистатическое решение матричного уравнения Риккати. Аналогично можно рассмотреть квазистатическое решение системы (4.4). Тогда, приравнявая правые части (4.4) к нулю, получим

$$-a_k + 2B_k(\tau) b_k + b_k^2/2c\omega_k^2(\tau) = 0. \quad (4.5)$$

Положительное решение квадратного уравнения (4.4) имеет вид

$$b_k = c\omega_k(\tau)(-2B_k(\tau)\omega_k(\tau) + \sqrt{4B_k^2(\tau)\omega_k^2(\tau) + 2a_k/c}). \quad (4.6)$$

Тогда приближенно оптимальное управление (2.8), учитывая (4.6), запишем как

$$U_k^o = (-2B_k(\tau)\omega_k(\tau) + \sqrt{4B_k^2(\tau)\omega_k^2(\tau) + 2a_k/c})A_k^o \sin \phi_k^o + \varepsilon \dots \quad (4.7)$$

Аналогично предыдущему случаю управление (4.7) может быть выражено через исходные координаты системы (1.1), используя  $\dot{x} = \Gamma^{-1}\dot{y} + \varepsilon \dots$  и выражения (1.4), (2.10).

Подставляя управление (4.7) в уравнения (1.5) и усредняя по фазам, получим в первом приближении для амплитуд колебаний

$$\dot{A}_k^o = -\varepsilon \frac{A_k^o}{\omega_k(\tau)} \sqrt{B_k^2(\tau)\omega_k^2(\tau) + a_k/2c}. \quad (4.8)$$

Систему (4.4) можно приближенно решить, используя прием обратного интегрирования, предложенный в [10]. В прикладных задачах во многих случаях можно конкретно указать отрезок  $\tau \in [0, T]$ , на котором рассматривается движение системы. Тогда, задавая граничное условие на коэффициенты в виде  $b_k(T) = 0$  и численно интегрируя систему (4.4) с отрицательным шагом от  $T$  до нуля, получим зависимость  $b_k(\tau)$ .

Здесь необходимо отметить, что при интегрировании системы (3.3) в этом случае имеем  $b_k(\tau) > 0$ , когда  $\tau \in [0, T)$ . Интегрирование с отрицательным шагом означает формальное изменение знака правых частей уравнений (3.3), которые становятся положительными, так как  $a_k > 0$ . Тогда функция (3.2) является положительно-определенной для каждого  $\tau \in [0, T)$ , что приводит к динамической устойчивости колебательной системы.

Данный прием имеет обоснование и в общем случае, так как известно, что решение матричного уравнения Риккати (уравнение (4.4) есть частный случай матричного уравнения) равномерно стремится к положительно-определенной матрице [11] при соответствующем задании начальных условий, если  $t_0 = -\infty$ , где  $t_0$  — начальное время.

**5. Учет линейных возмущений.** Рассматриваются линейные возмущения вида

$$f(y, \dot{y}, \tau) = R_1(\tau)y + R_2(\tau)\dot{y}, \quad (5.1)$$

где  $R_1(\tau), R_2(\tau)$  — известные квадратные матрицы.

Для простоты возмущения, связанные с медленным изменением частот системы, в этом разделе сначала не будут записываться, так как рассматриваемые оба типа возмущений с точки зрения применения метода усреднения аддитивны и, следовательно, в усредненных уравнениях соответствующие члены просто суммируются.

После перехода к нормальным координатам в уравнении (1.3) имеем

$$F(x, \dot{x}, \tau) = \Gamma^{-1}[R^{(1)}(\tau)\Gamma x + R^{(2)}(\tau)(\Gamma\dot{x} + \varepsilon\Gamma'x)]. \quad (5.2)$$

Тогда в уравнении (2.8) выражения  $\langle \Phi_k P_k^o \rangle$ , учитывающие возмущения в усредненной системе, примут вид

$$\langle \Phi_k P_k^o \rangle = \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} \langle F_k \sin \phi_k \rangle, \quad (5.3)$$

где  $F_k$  —  $k$ -я компонента вектор-функции (5.2).

Учитывая замену переменных (1.4) и свойство ортогональности тригонометрических функций, получим

$$\langle \Phi_k P_k^o \rangle = -\frac{1}{2} A_k^o \omega_k \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} r_k. \quad (5.4)$$

Тогда уравнение (2.8) принимает вид

$$\frac{\partial V^o}{\partial \tau} = -\sum_{k=1}^n \left[ a_k (A_k^o)^2 + r_k(\tau) A_k^o \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} / 2 - \left( \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} \right)^2 / 8c\omega_k^2 \right], \quad (5.5)$$

где  $r_k(\tau)$  –  $k$ -я диагональная компонента матрицы  $r(\tau) = \Gamma^{-1} R^{(2)}(\tau) \Gamma$ .

Уравнение (5.5) отличается от уравнения для предыдущего случая формальной заменой  $B_k(\tau) \Rightarrow -r_k(\tau)/2$ . Поэтому, повторяя выкладки предыдущего случая, для решения (4.3) получим

$$db_k/d\tau = -a_k - r_k(\tau) b_k + b_k^2/2c\omega_k^2. \quad (5.6)$$

Для квазистатического решения уравнения (5.6) квазиоптимальное управление принимает вид

$$\varepsilon U_k^o = \varepsilon(r_k(\tau) + \sqrt{r_k(\tau)^2 + 2a_k/c\omega_k^2})\omega_k A_k^o \sin \varphi_k^o + \varepsilon^2 \dots, \quad (5.7)$$

что соответствует усредненной системе

$$\dot{A}_k^o = -\frac{\varepsilon}{2} A_k^o \sqrt{r_k(\tau)^2 + 2a_k/c\omega_k^2}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.8)$$

Так как рассматриваемые возмущения аддитивны, то общее решение для приближенно оптимального управления запишем как

$$\varepsilon U_k^o = \varepsilon(\delta_k(\tau) + \sqrt{\delta_k(\tau)^2 + 2a_k/c\omega_k(\tau)^2})\omega_k(\tau) A_k^o \sin \varphi_k^o + \varepsilon^2 \dots, \quad (5.9)$$

где  $k = \overline{1, n}$ ,  $\delta_k(\tau) = r_k(\tau) - 2B_k(\tau)$ .

Подставляя управление (5.9) в уравнение и проводя процедуру усреднения, получим для амплитуд колебаний

$$\dot{A}_k^o = -\frac{\varepsilon}{2} A_k^o \sqrt{\delta_k(\tau)^2 + 2a_k/c\omega_k(\tau)^2}. \quad (5.10)$$

Из (5.10) следует монотонное убывание амплитуд колебаний для усредненной системы для рассматриваемых возмущений.

**6. Пример определения квазиоптимального управления для системы с двумя степенями свободы.**

Для иллюстрации применения описанного подхода к определению приближенно оптимального управления рассматривается колебательная система с двумя степенями свободы ( $n = 2$ ) и с медленными изменяющимися параметрами. Все элементы матриц колебательной системы  $C(\tau)$ ,  $R_{1,2}(\tau)$  медленно изменяются. Для оценки “медленности” изменения некоторого параметра  $p$  можно использовать величину  $\dot{p}/p$  [12] (размерность  $s^{-1}$ ), которая сравнивается к частотами системы  $\omega_{1,2}$ , т.е. за характерные величины принимаются безразмерные параметры  $\mu_{1,2} = |\dot{p}/p\omega_{1,2}|$ . Неустойчивость колебаний в системе в примере обусловлена в основном соответствующим заданием матрицы возмущений  $R^{(2)}(\tau)$ , для элементов которой максимальное значение  $\mu_{1,2}$  приблизительно равно 0.15. Изменение элементов матриц  $C(\tau)$ ,  $R^{(2)}(\tau)$  показано на рис. 1. Матрица возмущений  $R^{(2)}(\tau)$  взята кососимметричной, что характерно для гироскопических систем. Последнее обстоятельство связано с тем, что (как показали численные расчеты) это приводит к наибольшим колебаниям переменных исходной системы относительно своих средних значений. Изменение нормальных координат для исходной системы в случае отсутствия управления приведено на рис. 2. Там же штриховыми линиями показано изменение амплитудных характеристик, определенных в силу усредненной системы. При введении управления в соответствии с критерием (1.7) с равными весами  $a_1 = a_2 = c$  получаем зависимости для амплитуд колебаний с приблизительно равными временами переходных процессов (рис. 3, а, где штриховые линии соответствуют усредненной системе). Изменяя вес  $c$  перед управлением, нетрудно обеспечить заданное время переходных процессов в системе естественно с учетом ограничений на управление, если они известны. Изменяя соотношения весов  $a_{1,2}$ , можно вводить управление с приоритетным гашением колебаний, соответствующим определенной частоте. В качестве примера на рис. 3, б показаны переходные процессы в случае, когда отношение весов  $a_1/a_2 = 20$ . Во всех

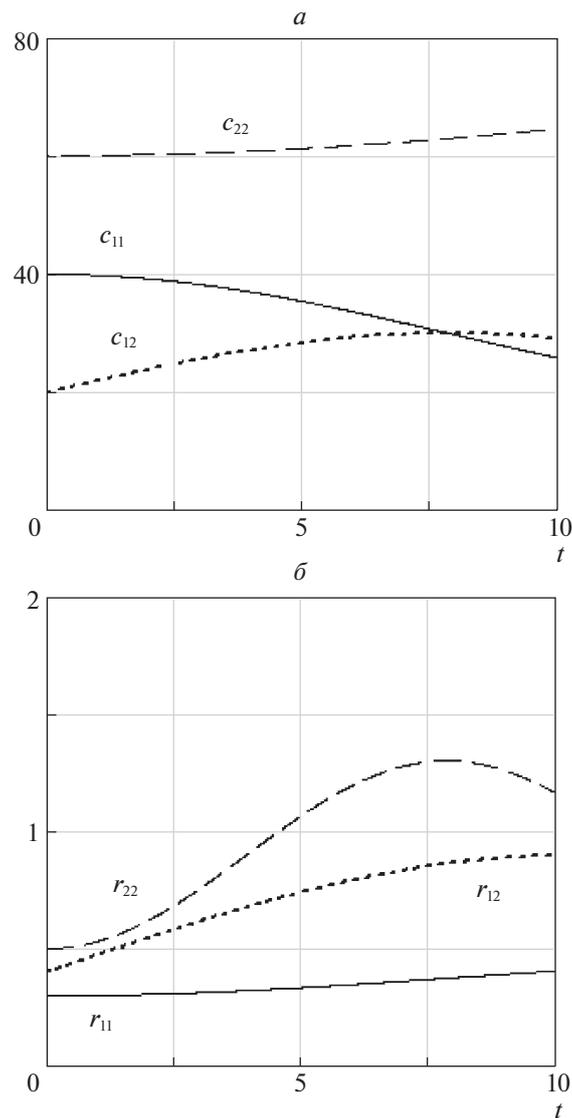


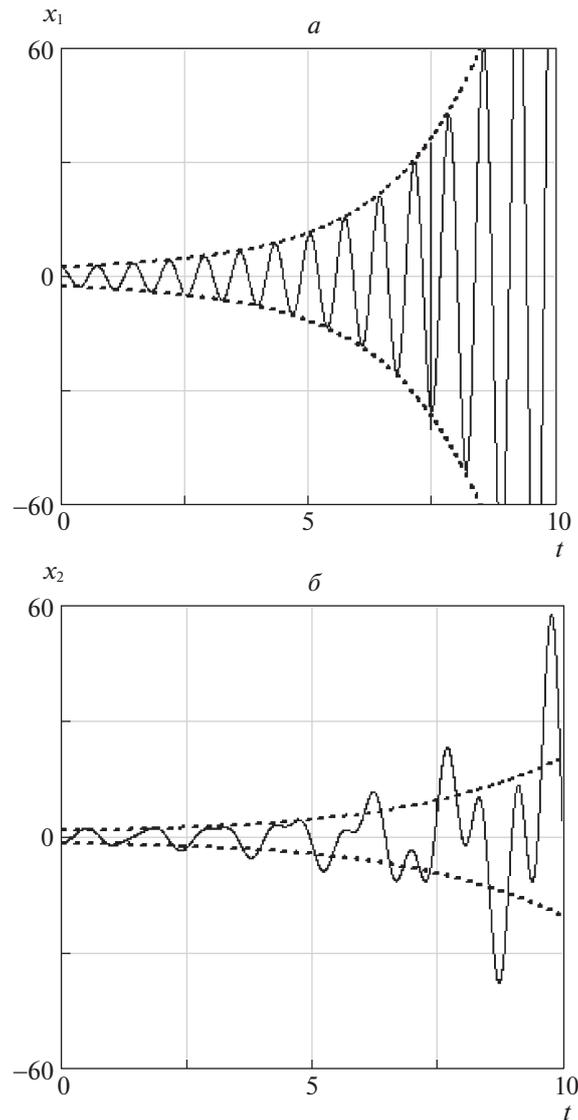
Рис. 1. Изменение элементов матриц  $C(\tau)$ ,  $R^{(2)}(\tau)$  в системе с двумя степенями свободы (модельный пример)

случаях, что соответствует аналитическим выражениям для управления, например (5.9), управляемые движения системы определяются только величинами отношений  $a_{1,2}/c$  и не зависят от абсолютных величин весовых коэффициентов.

**7. Пример определения квазиоптимального управления в одной прикладной задаче.** Рассматривается стабилизация углового движения малого КА на тросе при разворачивании тросовой системы (ТС) на околоземной орбите. Особенностью данной задачи является то, что слагаемые, характеризующие гироскопические эффекты, включаются в невозмущенную систему, что не ограничивает их величину при определении приближенно оптимального управления. В этом случае система дифференциальных уравнений, описывающая угловое движение КА относительно направления троса, близка к системе уравнений классической задачи движения волчка Лагранжа вокруг неподвижной точки [13].

Стабилизация осуществляется относительно направления троса и характеризуется углом нутации  $\theta$ . Уравнения для малых углов нутации в этом случае в комплексной форме имеют вид [14]

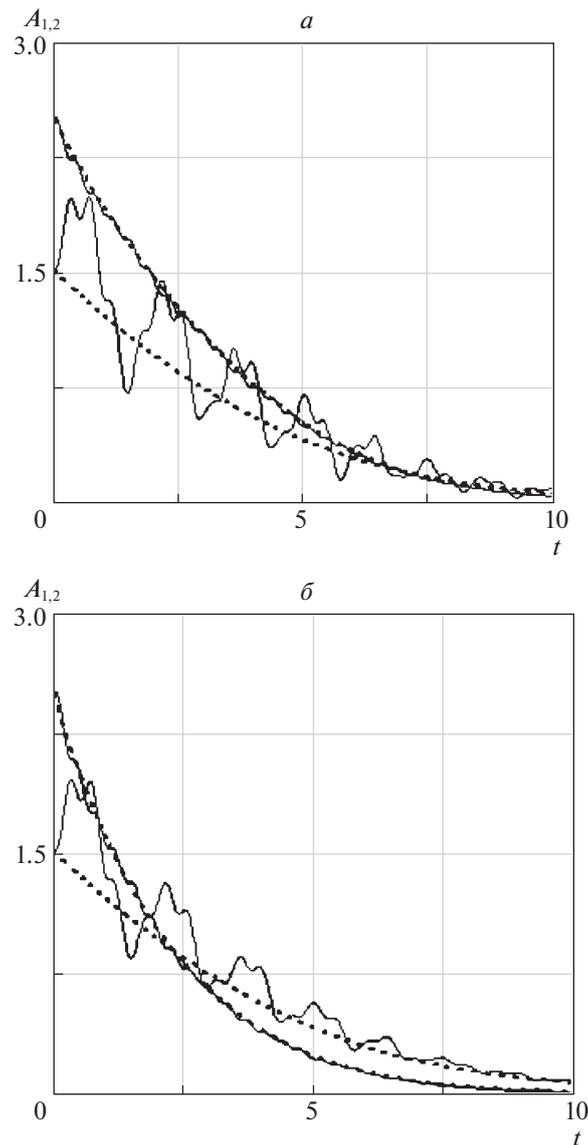
$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - i \bar{J}_x \omega_x \frac{d \xi}{dt} + \omega_p^2 \xi = 0, \quad (6.1)$$



**Рис. 2.** Изменение нормальных координат в системе с двумя степенями свободы при отсутствии управления (модельный пример)

где  $i^2 = -1$ ,  $\xi = \beta + i\alpha$  – комплексный угол нутации,  $|\xi| = \theta = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}$ ,  $\omega_x$  – угловая скорость вращения КА относительно своей продольной оси  $Ox$ ,  $\bar{J}_x = J_x/J$ ,  $J = J_y = J_z$ ,  $J_x, J_y, J_z$  – моменты инерции КА в связанной с ним системе координат  $Oxyz$ ,  $\alpha, \beta$  – “самолетные” углы атаки и скольжения,  $\omega_p = \sqrt{\Delta x F_t / J}$ ,  $\Delta x$  – расстояние между точкой крепления троса и центром масс КА,  $F_t$  – сила натяжения троса.

Для иллюстрации методики рассматривается простой случай статически и динамически симметричного КА, когда точка крепления троса и центр масс КА лежат на его оси динамической симметрии  $Ox$ , а система координат  $Oxyz$  является главной и центральной. В этом случае угловая скорость  $\omega_x = \text{const}$  и определяется начальными условиями при отделении малого КА от базового КА. Если  $\omega_x = 0$ , то уравнение (6.1) описывает плоские колебания КА относительно направления троса с частотой  $\omega_p$ . Если  $\omega_x \neq 0$ , то имеем пространственное движение твердого тела относительно точки крепления троса, близкое к случаю Лагранжа, при действии момента от силы натяжения троса. В этом случае предполагается, что для исключения кручения троса используются специальные шарниры.



**Рис. 3.** Переходные процессы в системе с двумя степенями свободы при наличии управления: *a* – равные весовые коэффициенты в критерии оптимальности  $a_1 = a_2 = c$ ; *б* – приоритетное гашение колебаний по нормальной координате  $x_1$  (амплитуда  $A_1$ ,  $a_1/a_2 = 20$ )

Возмущение, действующее на КА, связано с медленным изменением силы натяжения троса  $F_t$ , которое изменяется в силу заданной программы разворачивания системы (номинальный закон управления) и является фактически медленно изменяющимся параметром системы.

Тогда, вводя управление в уравнение (6.1), получим

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - i\bar{J}_x\omega_x \frac{d\xi}{dt} + \omega_p^2\xi = \varepsilon u, \quad (6.2)$$

где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр, характеризующий величину управления. Предполагается, что величина управления соответствует уровню возмущений, которые также считаются малыми. Управление в уравнении (6.2) задается в виде  $u = u_\beta + iu_\alpha$ , где компоненты  $u_\beta$ ,  $u_\alpha$  фактически представляют собой моменты сил от управляющих воздействий, отнесенные моменту инерции  $J$ . Управляющие моменты действуют во взаимно перпендикулярных плоскостях относительно направления троса.

Невозмущенное уравнение, соответствующее (6.2), имеет вид (6.1) при условии  $\omega_p = \text{const}$ . Решение невозмущенного уравнения записывается в виде [14]

$$\xi = A_1 \exp(i\varphi_1) + A_2 \exp(i\varphi_2), \quad \dot{\xi} = iA_1\omega_1 \exp(i\varphi_1) + iA_2\omega_2 \exp(i\varphi_2), \quad (6.3)$$

где  $\varphi_{1,2} = \omega_{1,2} t + \psi_{1,2}$  – фазы,  $A_{1,2}$  и  $\psi_{1,2}$  – произвольные постоянные (вещественные величины),  $\omega_{1,2} = \bar{J}_x \omega_x / 2 \pm \omega_a$  – частоты,  $\omega_a = (\bar{J}_x \omega_x / 2 + \omega_p^2)^{0.5}$ .

При определении решения (6.3) частоты системы находятся из уравнения

$$\omega^2 - \bar{J}_x \omega_x \omega - \omega_p^2 = 0. \quad (6.4)$$

Рассматривая соотношения (6.3) как замену переменных  $(\xi, \dot{\xi}) \Rightarrow (A_{1,2}, \varphi_{1,2})$  и применяя метод вариации произвольных постоянных для уравнения (6.2), получим дифференциальные уравнения для новых переменных:

$$\dot{A}_{1,2} = \mp [A_{1,2} \dot{\omega}_{1,2} + A_{2,1} \dot{\omega}_{2,1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + u_\beta \sin \varphi_{1,2} - u_\alpha \cos \varphi_{1,2}] / 2\omega_a, \quad (6.5)$$

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \omega_{1,2} + [A_{2,1} \dot{\omega}_{2,1} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \mp u_\beta \cos \varphi_{1,2} \mp u_\alpha \sin \varphi_{1,2}] / 2A_{1,2} \omega_a. \quad (6.6)$$

В этом случае усредненное уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (4.2) принимает вид

$$\frac{\partial V^o}{\partial \tau} = - \sum_{k=1}^2 \left[ a_k (A_k^o)^2 - \omega'_k(\tau) A_k^o \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} / 2\omega_a(\tau) - \left( \frac{\partial V^o}{\partial A_k^o} \right)^2 / 16c\omega_a^2(\tau) \right], \quad (6.7)$$

где  $\omega'_{1,2}(\tau) = \pm \omega_p(\tau) \omega'_p(\tau) / \omega_a(\tau)$ ,  $\omega'_p(\tau) = \Delta x F'_t(\tau) / 2J\omega_p(\tau)$ . Причем зависимость  $F'_t(\tau)$  соответствует номинальной программой развертывания ТС  $F_t(\tau)$ .

Тогда, определяя решение уравнения (6.7) в виде (4.3), получаем уравнения для коэффициентов  $b_k(\tau)$ :

$$db_k/d\tau = -a_k + (-1)^k \omega'_k(\tau) b_k / \omega_a(\tau) + b_k^2 / 4c\omega_a(\tau)^2, \quad k = 1, 2. \quad (6.8)$$

Квазистатические решения уравнений (6.8) записывается как

$$b_k = 2c\omega_a(\tau) [(-1)^k \omega'_k(\tau) + \sqrt{\omega'_k(\tau)^2 + a_k/c}], \quad k = 1, 2. \quad (6.9)$$

Решениям (6.9) соответствуют управления

$$u_\beta = (b_1 A_1^o \sin \varphi_1 - b_2 A_2^o \sin \varphi_2) / 2c\omega_a, \quad (6.10)$$

$$u_\alpha = (b_2 A_2^o \cos \varphi_2 - b_1 A_1^o \cos \varphi_1) / 2c\omega_a. \quad (6.11)$$

Управления (6.10), (6.11) в переменных  $(\beta, \alpha)$  примут вид

$$u_\beta = p_\alpha \alpha + p_\beta \beta', \quad u_\alpha = p_\beta \beta + p_\alpha \alpha', \quad (6.12)$$

где  $p_{\beta,\alpha} = \mp (b_1 \omega_2 + b_2 \omega_1) / 4c\omega_a^2$ ,  $p_{\beta',\alpha'} = -(b_1 + b_2) / 4c\omega_a^2$ .

Усредненные уравнения для амплитуд колебаний  $A_{1,2}^o$  с учетом полученных управлений (6.12) запишем как

$$\frac{dA_{1,2}^o}{d\tau} = - \frac{A_{1,2}^o}{2\omega_a} \sqrt{\omega'_{1,2}(\tau)^2 + a_{1,2}/c}. \quad (6.13)$$

В качестве примера стабилизации движения малого КА в составе космической ТС рассматривается процесс формирования ТС, предназначенной для возвращения малогабаритной спускаемой капсулы (СК) на Землю. Используемый при этом закон изменения силы натяжения троса близок к зависимости, которая использовалась в реальном тросовом эксперименте YES2 [15]. Процесс формирования ТС имеет два этапа: “медленное” и “быстрое” развертывание троса. Система состоит из базового КА, на котором расположен механизм для управления развертыванием ТС, и троса с концевой массой (капсулой). На первом этапе используется программа “медленного” развертывания и трос с капсулой по окончании этапа приводится в положение, близкое к местной вертикали (длина троса около 3 км). На втором этапе полная длина троса по

окончанию развертывания ТС будет около 30 км, причем в конечном положении трос с капсулой составляет с вертикалью некоторый заданный угол. На этом этапе используется близкая к релейной программа, которая состоит из участков разгона и торможения троса с капсулой. Конечное отклоненное положение троса с капсулой позволяет обеспечить дополнительный импульс торможения капсулы при ее отделении от троса вблизи вертикали за счет относительной скорости колебательного движения ТС вокруг своего центра масс.

Номинальная программа развертывания ТС обеспечивается механизмом управления выпуском троса [15], который работает в соответствии с принципом обратной связи по измерениям длины и скорости выпуска троса. Для вычисления номинальных зависимостей длины и скорости троса используется простая модель развертывания ТС [16]:

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} = -2\frac{l'}{l}(\psi' + 1) - \frac{3}{2}\sin 2\psi, \quad (6.14)$$

$$\frac{d^2l}{d\tau^2} = l[(\psi' + 1)^2 + 3\cos^2\psi - 1] - F_t/m_c\Omega_o^2, \quad (6.15)$$

где  $\psi$  – угол отклонения троса от вертикали,  $l$  – длина троса,  $\tau = \Omega_o t$  – безразмерное медленное время,  $\Omega_o$  – угловая скорость центра масс системы по круговой орбите,  $m_c$  – масса капсулы,  $F_t$  – номинальная сила натяжения троса,  $l' = dl/d\tau$ ,  $\psi' = d\psi/d\tau$ .

Уравнения (6.14), (6.15) записаны в предположении, что масса базового КА много больше массы капсулы, а трос невесом.

Номинальная зависимость силы натяжения троса от времени задается следующей программой [14]:

$$F_t(\tau, l, l') = \begin{cases} m_c\Omega_o^2[\eta_1(l - l_1) + \eta_2l' + 3l_1] & \text{if } 0 \leq \tau \leq \tau_1, \\ F_1 + (F_{\min} - F_1)\sin^2(\tau - \tau_1) & \text{if } \tau_1 < \tau \leq \tau_2, \\ F_{\min} & \text{if } \tau_2 < \tau \leq \tau_3, \\ F_{\min} + (F_{\max} - F_{\min})\sin^2(\tau - \tau_3) & \text{if } \tau_3 < \tau \leq \tau_4, \\ F_{\max} & \text{if } \tau_4 < \tau \leq \tau_k, \end{cases} \quad (6.16)$$

где  $l_1$  и  $F_1$  – длина и сила натяжения троса в конце первого этапа развертывания ТС,  $\tau_k$  – время формирования системы,  $\tau_{1,2} = \tau_{k1} \mp \pi/4\chi_{1,1}$ ,  $\tau_{3,4} = \tau_r \mp \pi/4\chi_{2,2}$ ,  $\tau_{k1}$  – время окончания первого этапа,  $\tau_r$  – время переключения для релейной программы второго этапа,  $F_{\min}$  и  $F_{\max}$  – минимальная и максимальная значения силы натяжения на втором этапе,  $\eta_{1,2,3}$  – параметры закона управления на первом этапе,  $\chi_{1,2}$  – коэффициенты, обеспечивающие гладкое сопряжение участков с различными значениями силы натяжения троса.

Пример изменения номинальной силы натяжения троса от времени приводится на рис. 4. Используются следующие исходные данные: высота круговой орбиты 270 км,  $l_1 = 3000$  м,  $\eta_1 = 4$ ,  $\eta_2 = 3.5$ ,  $F_1 = 0.224$  Н,  $F_{\min} = 0.02$  Н,  $F_{\max} = 2.1$  Н,  $\tau_k = 9.55$ ,  $\tau_{k1} = 7$ ,  $\tau_r = 9.13$ ,  $\chi_{1,2} = 0.004$ . Начальные условия при отделении капсулы от базового КА  $\psi = \psi' = 0$ ,  $l = 1$  м,  $l'\Omega_o = 2.5$  м/с.

Выбором параметров  $\eta_{1,2}$  обеспечивается асимптотическая устойчивость вертикального конечного положения равновесия на первом этапе развертывания ТС [17] в силу уравнений (6.14), (6.15) для  $l = l_1$ . А параметры  $F_{\min}$ ,  $F_{\max}$ ,  $\tau_k$ ,  $\tau_r$  подбираются исходя из заданных конечных краевых условий движения ТС:  $l' = \psi' = 0$ ,  $l = 3 \times 10^4$  м,  $\psi = 56^\circ$ .

Капсула здесь представляет собой сферу радиусом 0.2 м массой  $m_c = 20$  кг.

Решения уравнений (6.14), (6.15) в данной постановке не зависят от углового движения капсулы относительно направления троса. Поэтому силу натяжения троса в данной задаче можно рассматривать как медленно изменяющийся параметр. Для оценки скорости изменения медленно изменяющегося параметра рассматривается величина  $F_t'/F_t$ , которая сравнивается с характерными частотами колебательной системы. В качестве характерной частоты колебаний в данной задаче (при малых угловых скоростях  $\omega_x$ ) можно рассматривать частоту  $\omega_p$ . Тогда безразмерный параметр  $\mu = |F_t'/F_t\omega_p|$  будет характеризовать относительную скорость изменения силы натяжения

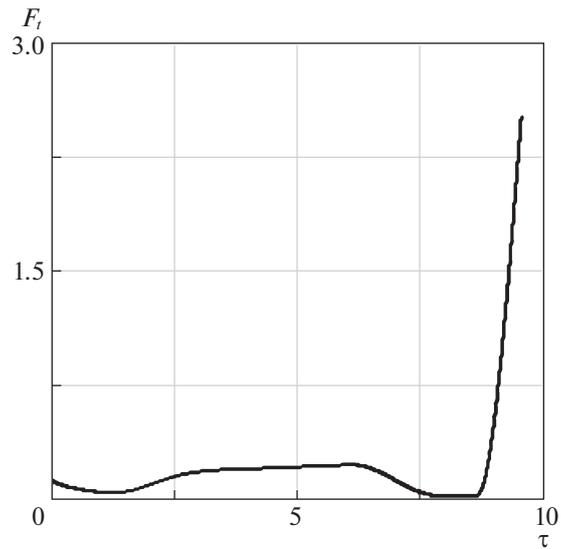


Рис. 4. Изменение силы натяжения троса при разворачивании космической ТС

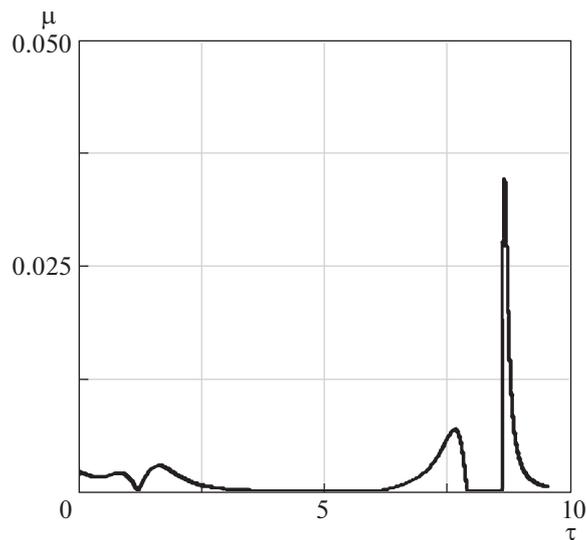
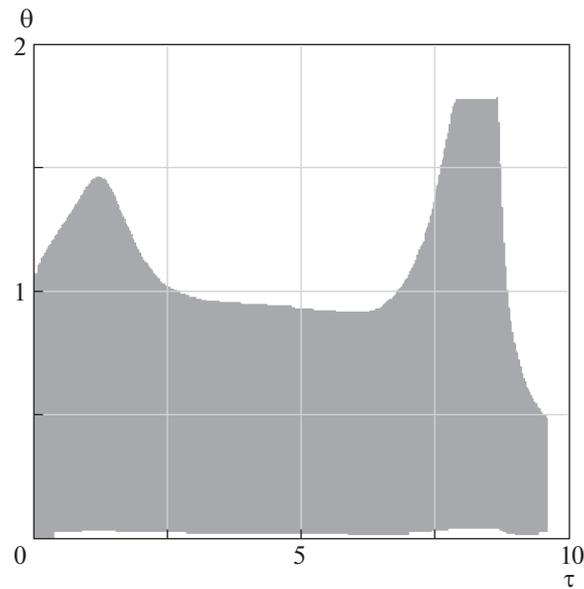


Рис. 5. Изменение параметра  $\mu$ , характеризующего скорость изменения силы натяжения троса

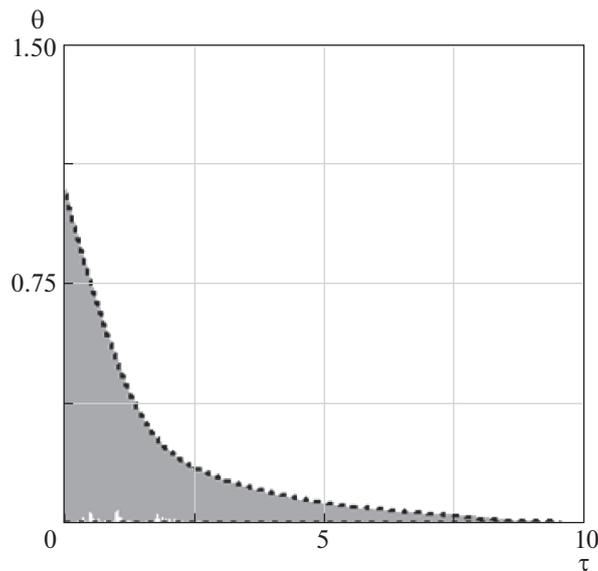
троса, т.е. будет пропорционален малому параметру задачи  $\varepsilon$ . На рис. 5 приводится зависимость параметра  $\mu$  от безразмерного времени  $\tau$  для исходных данных, представленных выше. Наибольшие значения параметр  $\mu$  принимает при переходе на второй этап разворачивания ТС  $\tau_{k1} \approx 7.7$  и в момент  $\tau_r \approx 8.7$ , когда имеет место переход от участка ускоренного движения троса к участку его торможения.

Отделение СК от базового КА имеет случайный характер. Так, например, угловые скорости капсулы  $\omega_{x,y,z}$  в связанной с ней системе координат  $Oxuz$  при отделении обычно распределены по нормальному закону [18]. Тогда возможна реализация неблагоприятных случаев движения СК относительно троса, когда угол нутации капсулы будет превышать  $\pi/2$ . Это может привести к запутыванию и ослаблению троса и, как следствие, к потере управляемости при работе системы регулирования разворачиванием ТС.

На рис. 6 приводится пример, когда угол нутации капсулы на некоторых участках движения превышает  $\pi/2$ . Вычисления проведены при следующих начальных условиях отделения:  $\omega_x = 0.01 \text{ c}^{-1}$ ,  $\omega_y = 0$ ,  $\omega_z = 0.13 \text{ c}^{-1}$ ,  $\theta = \pi/3$ .



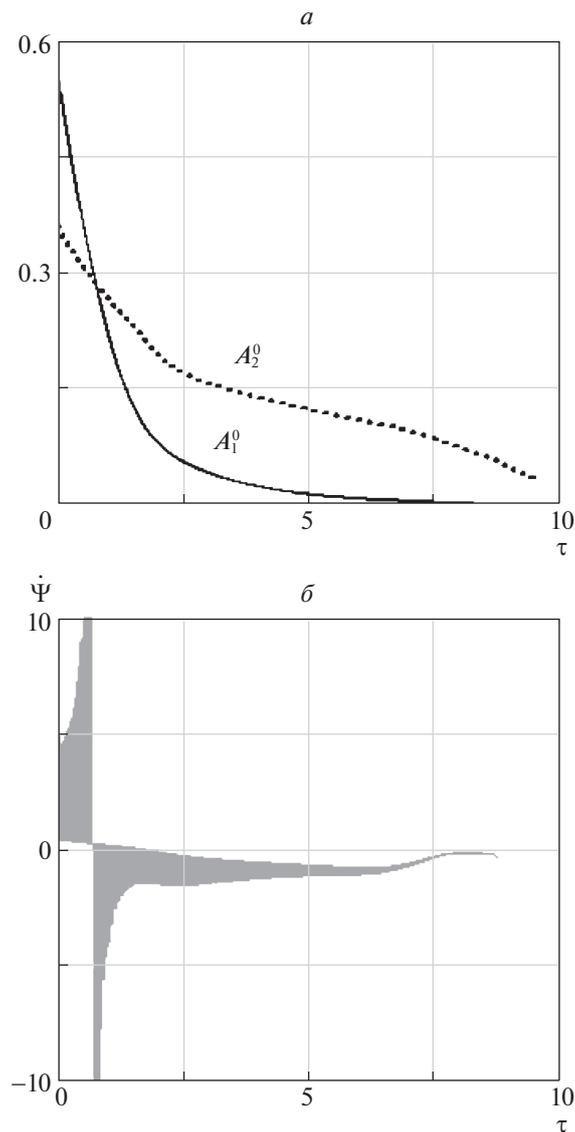
**Рис. 6.** Изменение угла нутации капсулы, определенного относительно направления троса, при отсутствии управления



**Рис. 7.** Переходный процесс по углу нутации капсулы при наличии управления: равные весовые коэффициенты  $a_1 = a_2 = c$  в критерии оптимальности

Здесь также необходимо отметить, что в данном примере рассматривается идеальный вариант статически и динамически симметричного твердого тела (капсулы). Влияние малой асимметрии капсулы может привести к возникновению резонансных режимов ее движения [14], что создает еще большие возмущения при движении капсулы вокруг своего центра масс.

На рис. 7 показаны зависимости, которые характеризуют переходный процесс в системе при использовании приближенно оптимального управления (6.12) с критерием оптимальности (1.7) и с весовыми коэффициентами  $a_{1,2} = c = 1/3$ . На рис. 7 штриховой линией показана огибающая  $\theta_{\max}(\tau)$  зависимости  $\theta(\tau)$ , определенная в соответствии с усредненными уравнениями (6.13):  $\theta_{\max}(\tau) = A_1^o(\tau) + A_2^o(\tau)$ .



**Рис. 8.** Пример изменения вида прецессии капсулы относительно направления троса с помощью изменения весовых коэффициентов в критерии оптимальности ( $a_1/a_2 = 20$ )

Увеличение весового коэффициента  $c$  позволяет обеспечить управление с уменьшенными затратами (в данном случае модуль управляющего воздействия не превышает  $3.6 \times 10^{-3} \text{ с}^{-2}$ ), однако, с другой стороны, увеличивает время переходного процесса.

Изменяя соотношение между весовыми коэффициентами  $a_{1,2}$ , которые определяют уровень ошибок управления по амплитудам  $A_1^o, A_2^o$ , можно сформировать заданный вид прецессии СК относительно направления троса. Формируя заданный вид прецессии, можно избежать реализации длительных резонансных режимов движения, которые могут привести к потере устойчивости углового движения СК при наличии у нее малой асимметрии. Так, например, если известно направление угловой скорости вращения капсулы относительно продольной оси  $\omega_x > 0$  после отделения от базового КА, то определяющую роль в возрастании амплитуд колебаний по углу ну-тации при проходе через резонанс играет амплитуда  $A_1^o$  [19], которая соответствует “прямой” прецессии СК. При реализации “прямой” прецессии направление прецессии тела относительно направления троса совпадает с направлением его вращения вокруг своей продольной оси  $x$ .

Поэтому гашение колебаний по этой амплитуде приведет к меньшим возмущениям в угловом движении СК при проходе через резонанс. Возможность смены вида прецессии иллюстрируется рис. 8, где момент изменения вида прецессии соответствует условию  $A_1^o = A_2^o$  (рис. 8, *a*, где  $A_1^o$  – сплошная линия). На рис. 8, *б* показано, как изменяется производная угла прецессии  $\dot{\Psi}$ , вычисленная по исходным уравнениям углового движения СК (6.2). В данном случае при отделении от базового КА имеет место “прямая” прецессия  $\dot{\Psi} > 0$  СК (рис. 8, *a*), при выполнении условия  $A_1^o = A_2^o$  происходит переход на “обратную” прецессию ( $\dot{\Psi} < 0$ ,  $\omega_x > 0$ ). Для изменения вида прецессии в критерии оптимальности (1.7) были использовано отношение весовых коэффициентов  $a_1/a_2 = 20$ .

**Заключение.** Разработана методика синтеза приближенно оптимального регулятора для стабилизации движения колебательных систем со многими степенями свободы. Рассматриваемый подход позволяет определить уравнения для регуляторов в аналитическом виде. Методика основана на приближенном методе решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, основанном на представлении функции Беллмана в виде ряда по малому параметру задачи. Ряд представляет собой сумму непериодического слагаемого, зависящего от медленной переменной системы, и поправок, имеющих нулевое среднее. Существование положительно-определенной в силу усредненной системы функции Беллмана–Ляпунова обеспечивает динамическую устойчивость колебательной системы на асимптотически большом интервале времени. Эффективность методики подтверждается двумя примерами: иллюстративным для стандартной системы с двумя степенями свободы и для прикладной задачи стабилизации углового движения малого КА относительно направления троса при разворачивании протяженной космической системы (длина троса 30 км). Использование данного подхода к более сложным случаям нелинейных возмущений требует дополнительных исследований и связано с возможностью определения приближенных решений уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев В.Н.* Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 108 с.
2. *Чернусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
3. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1986. 378 с.
4. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
5. *Салмин В.В., Ишков С.А., Старинова О.Л.* Методы решения вариационных задач механики космического полета с малой тягой. Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2006. 162 с.
6. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
7. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 410 с.
8. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986. 192 с.
9. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 918 с.
10. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.
11. *Дмитриевский А.А., Иванов Н.М., Лысенко Л.Н., Богодистов С.С.* Баллистика и навигация ракет. М.: Машиностроение, 1985. 310 с.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.
13. *Заболотнов Ю.М., Лобанков А.А.* Синтез регулятора для стабилизации движения твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 3. С. 59–71.
14. *Заболотнов Ю.М., Наумов О.Н.* Движение спускаемой капсулы относительно центра масс при разворачивании орбитальной тросовой системы // Космич. исслед. 2012. Т. 50. № 2. С. 183–193.
15. *Kruiff, M.* Tethers in Space. Oisterwijk: Uitgeverij BOX Press, 2011. 423 p.
16. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
17. *Заболотнов Ю.М.* Управление разворачиванием орбитальной тросовой системы в вертикальное положение с малым грузом // ПММ. 2015. Т. 79. № 1. С. 37–47.
18. *Заболотнов Ю.М.* Статистический анализ движения относительно центра масс легкой капсулы при входе в атмосферу // Космич. исслед. 2013. Т. 51. № 3. С. 228–239.
19. *Ярошевский В.А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.