

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ  
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.7

**ВИРТУАЛЬНЫЕ ДАТЧИКИ В ЗАДАЧЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО  
ДИАГНОСТИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>**

© 2022 г. А. Н. Жирабок<sup>a,b,\*</sup>, Ким Чхун Ир<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Дальневосточный федеральный ун-т, Владивосток, Россия

<sup>b</sup> Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток, Россия

\*e-mail: zhirabok@mail.ru

Поступила в редакцию 04.07.2021 г.

После доработки 20.08.2021 г.

Принята к публикации 27.09.2021 г.

Рассматривается задача построения виртуальных датчиков в технических системах, описываемых нелинейными моделями, для решения задач функционального диагностирования. Приводятся соотношения, позволяющие построить датчик минимальной сложности, оценивающий заданную компоненту вектора состояния. Теоретические результаты иллюстрируются примером.

DOI: 10.31857/S0002338822010139

**Введение.** Проблема функционального диагностирования (ФД) к настоящему времени уже достаточно хорошо изучена, задачи обнаружения, поиска и идентификации дефектов решены для широкого класса динамических систем [1–4]. Одним из препятствий на пути реализации методов ФД может быть недостаточное число датчиков, которыми оснащена диагностируемая система. Введение дополнительных датчиков приводит к дополнительным затратам и не всегда реализуемо на практике. Более перспективным является использование так называемых виртуальных датчиков [3, 4], которые строятся на основе наблюдателей Люенбергера и в работах [3, 4] имеют размерность, совпадающую с размерностью исходной системы. В статье ставится и решается задача построения виртуальных датчиков минимальной размерности, оценивающих заданные компоненты вектора состояния нелинейной системы.

Для решения этой задачи предлагается использовать так называемый логико-динамический (ЛД) подход, который был успешно применен как для решения задачи ФД [5], так и анализа наблюдаемости и управляемости нелинейных систем [6]. ЛД-подход характерен тем, что он не гарантирует достижения оптимального решения задачи в смысле размерности получаемых в результате решения систем, но оперирует только линейными методами даже для систем с недифференцируемыми нелинейностями.

**1. Основные модели.** Рассмотрим стационарную систему, описанную нелинейной моделью

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  и  $y(t) \in R^l$  – векторы состояния, управления и выхода;  $F$ ,  $G$  и  $H$  – матрицы соответствующих размеров;  $C$  – матрица размера  $n \times p$ ,  $L$  – известная матрица размера  $n \times q$ ,  $\rho(t) \in R^q$  – неизвестная функция времени, описывающая возмущения на систему. Нелинейный член  $\Psi(x(t), u(t))$  имеет вид

$$\Psi(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1 x(t), u(t)) \\ \dots \\ \varphi_p(A_p x(t), u(t)) \end{pmatrix},$$

$A_1, \dots, A_p$  – матрицы-строки;  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  – нелинейные (возможно, недифференцируемые) функции.

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 22-19-00028).

Требуется построить виртуальный датчик, оценивающий переменную  $y_v(t) = H_v x(t)$  с известной матрицей  $H_v$ . Способ ее нахождения определяется рассматриваемой задачей диагностирования. В частности, наиболее благоприятной для реализации процедуры ФД является ситуация, когда все компоненты вектора состояния системы могут быть измерены. В этом случае матрица  $H_v$  должна удовлетворять условию

$$\text{rank} \begin{pmatrix} H \\ H_v \end{pmatrix} = n.$$

В дальнейшем для простоты будем предполагать, что  $H_v$  – матрица-строка. Если эта матрица содержит более одной строки, предлагаемое решение распространяется и на этот случай. Другие варианты задания матрицы  $H_v$  приведены в [7], где было получено решение задачи в линейном случае.

Решение рассматриваемой задачи состоит в построении нелинейного наблюдателя, оценивающего переменную  $y_v(t)$  и, таким образом, выполняющего функцию виртуального датчика. Уравнение искомого наблюдателя имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_v(t) &= F_* x_v(t) + J_* y_0(t) + G_* u(t) + C_* \Psi(x_v(t), y_0(t), u(t)) + J_v r(t), \\ y_*(t) &= H_* x_v(t), \\ y_v(t) &= H_{*v} x_v(t) + Q y(t), \\ r(t) &= R_* y(t) - y_*(t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $x_v(t) \in R^k$  – вектор состояния наблюдателя,  $k$  – размерность наблюдателя,  $F_*$ ,  $J_*$ ,  $J_v$ ,  $G_*$ ,  $C_*$ ,  $R_*$ ,  $H_*$ ,  $H_{*v}$ ,  $Q$  – матрицы, подлежащие определению,  $C_* \Psi(x_v, y_0, u)$  – нелинейная составляющая,

$$y_0(t) = H_0 x(t) = \begin{pmatrix} H \\ H_v \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_v(t) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что переменная  $y_*(t)$  в (1.2) необходима для формирования невязки  $r(t)$ , используемой в цепи обратной связи для обеспечения устойчивости наблюдателя.

В соответствии с ЛД-подходом решение задачи осуществляется в три этапа. На первом этапе строится линейная модель, не чувствительная к возмущениям:

$$\begin{aligned} \dot{x}_v(t) &= F_* x_v(t) + J_* y_0(t) + G_* u(t), \\ y_*(t) &= H_* x_v(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Далее проверяется возможность введения в нее нелинейной составляющей  $C_* \Psi(x_v, y_0, u)$  и возможность оценки переменной  $y_v(t)$  на основе условия

$$y_v(t) = H_{*v} x_v(t) + Q y(t). \quad (1.4)$$

На последнем этапе ищется матрица  $J_v$ , обеспечивающая устойчивость наблюдателя.

**2. Построение модели.** Для получения решения на первом этапе матрицы  $F_*$  и  $H_*$  ищутся в каноническом виде:

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_* = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0). \quad (2.1)$$

Предполагается, что после окончания переходного процесса векторы  $x(t)$  и  $x_v(t)$  связаны матрицей  $\Phi$ :

$$x_v(t) = \Phi x(t).$$

Известно, что матрицы, описывающие модель, удовлетворяют следующим уравнениям [5, 6]:

$$R_*H = H_*\Phi, \quad \Phi F = F_*\Phi + J_*H_0, \quad G_* = \Phi G, \tag{2.2}$$

$$C_* = \Phi C, \quad A' = A_* \begin{pmatrix} \Phi \\ H_0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Последнее соотношение эквивалентно ранговому равенству

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H_0 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H_0 \\ A' \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где матрица  $A'$  строится из тех строк матрицы  $A$ , номера  $j_1, j_2, \dots, j_d$  которых совпадают с номерами ненулевых столбцов произведения  $\Phi C$ .

Решение задачи на первом этапе осуществляется на основе уравнения [5, 6]

$$(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k})(V^{(k)} \ L^{(k)}) = 0, \tag{2.5}$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} HF^k \\ H_0F^{k-1} \\ \vdots \\ H_0 \end{pmatrix}, \quad L^{(k)} = \begin{pmatrix} HL \ HFL \ \dots \ HF^{k-1}L \\ 0 \ H_0L \ \dots \ H_0F^{k-2}L \\ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

матрица  $V^{(k)}$  обеспечивает построение модели (1.3),  $L^{(k)}$  – нечувствительность ее к возмущениям. Уравнение (2.5) имеет нетривиальное решение, если

$$\text{rank}(V^{(k)} \ L^{(k)}) < l + (l + 1)k. \tag{2.6}$$

Для построения модели из (2.6) определяется минимальное  $k$  и из (2.5) – строка  $(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k})$ , затем на основе соотношений

$$R_*H = \Phi_1, \quad \Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i}H_0, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad \Phi_k F = J_k H_0,$$

полученных из (2.1) и (2.2), строится матрица  $\Phi$ , на чем заканчивается первый этап.

Для реализации второго этапа представим уравнение (1.4) в виде

$$H_v x(t) = H_{*v} \Phi x(t) + QHx(t),$$

откуда следует

$$H_v = H_{*v} \Phi + QH = (H_{*v} \ Q) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

что эквивалентно равенству

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ H_v \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Выполнение условия (2.8) означает, что матрица-строка  $H_v$  может быть выражена через матрицу  $(\Phi^T \ H^T)^T$  и построенная линейная модель будет оценивать заданную компоненту  $y_v = H_v x$ ; матрицы  $H_{*v}$  и  $Q$  определяются из алгебраического уравнения (2.7).

Для проверки возможности преобразования построенной линейной модели в нелинейную рассчитывается матрица  $C_* = \Phi C$ , определяются номера  $j_1, j_2, \dots, j_d$  ненулевых ее столбцов и по

описанному выше правилу строится матрица  $A'$ . Далее проверяется условие (2.4) и при его выполнении строится нелинейная составляющая:

$$\Psi(x_v, y_0, u) = \begin{pmatrix} \Phi_{j_1}(A_{*j_1} x_v, y_0, u) \\ \dots \\ \Phi_{j_d}(A_{*j_d} x_v, y_0, u) \end{pmatrix},$$

где матрицы-строки  $A_{*j_1}, A_{*j_2}, \dots, A_{*j_d}$  определяются из линейных алгебраических уравнений

$$A_j = A_{*j} \begin{pmatrix} \Phi \\ H_0 \end{pmatrix}, \quad j = j_1, j_2, \dots, j_d.$$

Если хотя бы одно из условий (2.4) и (2.8) не верно, нужно найти другое решение уравнения (2.5) при прежней или увеличенной размерности  $k$ .

Полагая, что условия (2.4) и (2.8) выполняются, примем  $G_* = \Phi G$ , на чем заканчивается процедура построения нелинейной модели (второй этап).

Соотношение (2.7) предлагается использовать для получения критерия возможности построения виртуального датчика, не чувствительного к возмущениям. Для этого введем матрицу максимального ранга  $L_*$ , такую, что  $L_* L = 0$ . Тогда  $\Phi = KL_*$  для некоторой матрицы  $K$ . Заменим в (2.7)  $\Phi$  на  $KL_*$  и преобразуем полученное выражение:

$$H_v = (H_{*v} \quad Q) \begin{pmatrix} KL_* \\ H \end{pmatrix} = (KH_{*v} \quad Q) \begin{pmatrix} L_* \\ H \end{pmatrix}.$$

Из последнего уравнения ясно, что оно имеет решение в том случае, когда

$$\text{rank} \begin{pmatrix} L_* \\ H \\ H_v \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} L_* \\ H \\ H_v \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Приведенное ранговое равенство и является искомым критерием: если оно выполняется, виртуальный датчик может быть построен, в противном случае решение не существует. Отметим, что условие (2.9) дополняет условия существования решения, не чувствительного к возмущениям, найденные в [5].

**3. Обеспечение устойчивости.** На третьем этапе для определения матрицы  $J_v$ , обеспечивающей устойчивость наблюдателя, введем ошибку по состоянию  $e(t) = \Phi x(t) - x_v(t)$  и с учетом (1.1), (1.2) и (2.2) запишем и преобразуем уравнение для  $\dot{e}(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \Phi Fx(t) + \Phi Gu(t) + \Phi C\Psi(x(t), u(t)) - (F_* x_v(t) + J_* y_0(t) + G_* u(t) + C_* \Psi(x_v, y_0, u) + \\ &+ J_v(R_* y(t) - y_*(t))) = F_* \Phi x(t) - F_* x_v(t) - J_v R_* Hx(t) + J_v H_* x_v(t) + \Delta\Psi(t) = F_* \Phi x(t) - J_v H_* \Phi x(t) - \\ &- F_* x_v(t) + J_v H_* x_v(t) + \Delta\Psi(t) = (F_* - J_v H_*) \Phi x(t) - (F_* - J_v H_*) x_v(t) + \Delta\Psi(t) = (F_* - J_v H_*) e(t) + \Delta\Psi(t), \end{aligned}$$

где

$$\Delta\Psi(t) = C_* \Psi(x(t), u(t)) - C_* \Psi(x_v(t), y_0(t), u(t)) = C_* \Psi(\Phi x(t), y_0(t), u(t)) - C_* \Psi(x_v(t), y_0(t), u(t)).$$

Рассмотрим два подхода к выбору матрицы  $J_v$ . В первом из них предполагается, что функция  $\Psi(x, u)$  удовлетворяет условию Липшица по аргументу  $x$ , т.е.

$$\|\Psi(x, u) - \Psi(x', u)\| \leq N \|x - x'\|, \quad (3.1)$$

$N > 0$  – некоторая константа. Тогда функция  $\Delta\Psi(t)$  также удовлетворяет этому условию с некоторой константой  $N_* > 0$ , т.е.

$$\|\Delta\Psi(t)\| \leq N_* \|e(t)\|. \quad (3.2)$$

Известно, что если пара  $(F_*, H_*)$  наблюдаема, то существует такая матрица  $J_v$ , что  $F_{**} = (F_* - J_v H_*)$  устойчива. Из канонической формы (2.1) с очевидностью следует наблюдаемость пары  $(F_*, H_*)$  и, следовательно, существование матрицы  $J_v$ , обеспечивающей устойчи-

вость матрицы  $F_{**}$ . Из устойчивости этой матрицы также вытекает, что существуют симметрические положительно-определенные матрицы  $P$  и  $W$ , такие, что

$$F_{**}^T P + P F_{**} = -W. \tag{3.3}$$

Рассмотрим функцию Ляпунова  $V(t) = e^T(t) P e(t)$  и найдем ее производную с учетом (3.1) и (3.2):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (F_{**} e(t) + \Delta\Psi(t))^T P e(t) + e^T(t) P (F_{**} e(t) + \Delta\Psi(t)) = e^T(t) (F_{**}^T P + P F_{**}) e(t) + \\ &+ 2e^T(t) P \Delta\Psi(t) = -e^T(t) W e(t) + 2e^T(t) P \Delta\Psi(t) \leq -\|e(t)\|^2 \lambda_{\min}(W) + 2\|e^T(t) P \Delta\Psi(t)\| \leq \\ &\leq -\|e(t)\|^2 \lambda_{\min}(W) + 2\|e(t)\|^2 \lambda_{\max}(P) N_*, \end{aligned}$$

где  $\lambda_{\min}(W)$  и  $\lambda_{\max}(P)$  – минимальное и максимальное собственные числа матриц  $W$  и  $P$  соответственно. Из последнего выражения ясно, что если

$$N_* < \frac{\lambda_{\min}(W)}{2\lambda_{\max}(P)}, \tag{3.4}$$

то  $\dot{V}(t) < 0$ , т.е. наблюдатель устойчив. Отметим, что такой подход был рассмотрен в [8].

Будем искать  $J_v$  в виде  $J_v = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k)^T$ . Тогда

$$F_* - J_v H_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} - J_v (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -a_k & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_k$  связаны с собственными числами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  матрицы  $F_* - J_v H_*$  известными соотношениями:

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k), \quad a_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{k-1} \lambda_k, \dots, \quad a_k = (-1)^k \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k,$$

Исходя из заданных требований к качеству переходного процесса, можно выбрать собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  и определить коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Отметим, что из-за наличия слагаемого  $J_* y_0(t)$  в модели (1.2) может появиться обратная связь по переменной  $y_v(t) = H_{*v} x_v(t) + Q y(t)$ , что приведет к матрице  $F_*$ , отличной от канонического вида (2.1). В этом случае выбор коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_k$  должен быть осуществлен так, чтобы собственные числа матрицы  $F_* - J_v H_*$  удовлетворяли требованию устойчивости. Сделать это можно, если выразить в общем виде собственные числа матрицы  $F_* - J_v H_*$  через коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , выбрав числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  и найдя из полученных уравнений искомые коэффициенты.

Рассмотренный подход накладывает довольно жесткие ограничения на класс функций  $\Psi(x, u)$ , которые диктуются условием (3.4) на константу  $N_*$  – как правило, она должна быть меньше единицы. Только при  $k = 1$  из (3.3) следует  $\lambda_{\min}(W) = 2PJ_v$  и  $N_* < J_v$ , т.е. коэффициент  $J_v$  всегда может быть выбран так, чтобы соблюсти условие  $N_* < J_v$  для произвольной функции, удовлетворяющей условию Липшица.

Отметим, что условие Липшица (3.1) носит глобальный характер и выполняется далеко не всегда, однако любая дифференцируемая функция локально удовлетворяет этому условию, поскольку верно приближенное равенство

$$\Psi(x, u) - \Psi(x', u) \approx \frac{\partial \Psi(x, u)}{\partial x} (x - x').$$

Это положено в основу второго подхода, где предполагается, что функция  $\Psi(x, u)$  дифференцируема, ошибка  $e(t)$  мала и функция  $\Delta\Psi(t)$  может быть разложена в ряд Тейлора относительно текущего значения.

Более детально рассмотрим это вначале для случая, когда система содержит одну нелинейность и  $\Psi(x(t), u(t)) = \varphi(Ax(t), u(t))$ . Поскольку  $A = A_* \begin{pmatrix} \Phi \\ H_0 \end{pmatrix}$  и  $e = \Phi x - x_v$ , то

$$Ax = A_* \begin{pmatrix} \Phi \\ H_0 \end{pmatrix} x = A_*^1 \Phi x + A_*^2 H_0 x = A_*^1 (x_v + e) + A_*^2 y_0$$

и разность  $\Delta\Psi(t)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta\Psi(t) &= C_*(\varphi(Ax(t), u(t)) - \varphi(A_*^1 x_v(t) + A_*^2 y_0(t), u(t))) = C_*(\varphi(A_*^1 x_v(t) + A_*^2 y_0(t) + \\ &+ A_*^1 e(t), u(t)) - \varphi(A_*^1 x_v(t) + A_*^2 y_0(t), u(t))) \approx \Phi C \frac{\partial \varphi(x_v, y_0, u)}{\partial x_v} A_*^1 e(t). \end{aligned}$$

В результате получаем окончательное уравнение для ошибки  $e(t)$ :

$$\dot{e}(t) = \left( F_* - J_v H_* + \Phi C \frac{\partial \varphi(x_v, y_0, u)}{\partial x_v} A_*^1 \right) e(t) = F_e(J_v, x_v, y_0, u) e(t), \quad (3.5)$$

из которого следует, что элементы матрицы обратной связи  $J_v$  в этом случае будут зависеть от компонент вектора состояния  $x_v$ , управления  $u$  и переменной  $y_0$ . Для определения этих элементов необходимо выполнить следующие операции:

найти характеристический полином матрицы  $F_e(J_v, x_v, y_0, u)$  в виде

$$\det(F_e(J_v, x_v, y_0, u) - \lambda E) = \lambda^k + a_1(J_v, x_v, y_0, u) \lambda^{k-1} + \dots + a_k(J_v, x_v, y_0, u);$$

для обеспечения требуемой динамики наблюдателя задать значения собственных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ; составить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_1(J_v, x_v, y_0, u) &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k), \\ a_2(J_v, x_v, y_0, u) &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{k-1} \lambda_k, \\ &\dots, \\ a_k(J_v, x_v, y_0, u) &= (-1)^k \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k; \end{aligned}$$

найти из этой системы элементы матрицы  $J_v$ .

При наличии в системе нескольких нелинейностей получаем

$$F_e(J_v, x_v, y_0, u) = F_* - J_v H_* + \Phi C \begin{pmatrix} (\partial \varphi_1(x_v, y_0, u) / \partial x_v) A_*^1 \\ \dots \\ (\partial \varphi_p(x_v, y_0, u) / \partial x_v) A_*^p \end{pmatrix}.$$

На практике рассмотренный метод может быть использован для наблюдателя размерности не более 3–4, поскольку приводит к громоздким выражениям при вычислении определителя  $\det(F_e(J_v, x_v, y_0, u) - \lambda E)$ . Его преимущество по сравнению с методами, изложенными в [8], состоит в том, что он не приводит к производным в управляющих и выходных сигналах.

**4. Пример.** Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_1(t) / \vartheta_1 - b_1 \sqrt{x_1(t) - x_2(t)}, \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t) / \vartheta_2 + b_1 \sqrt{x_1(t) - x_2(t)} - b_2 \sqrt{x_2(t) - x_3(t)}, \\ \dot{x}_3(t) &= b_2 \sqrt{x_2(t) - x_3(t)} - b_3 \sqrt{x_3(t) - \vartheta_3} + \rho(t), \\ y_1(t) &= x_2(t), \quad y_2(t) = x_3(t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Уравнения (4.1) описывают так называемую трехтанковую систему (см. рисунок), состоящую из трех резервуаров, соединенных между собой трубами. Жидкость поступает в первый и второй танки и выливается из третьего танка. Уровни жидкости в танках обозначены  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ ;  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$ ,  $\vartheta_3$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  – коэффициенты, значения которых определяются геометрическими размерами системы.

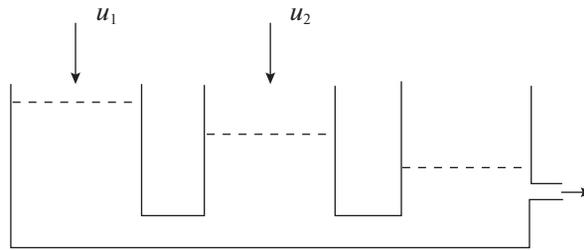


Рисунок. Трехтанковая система

Поскольку неизмеряемой является компонента  $x_1(t)$ , примем  $y_v(t) = x_1(t)$ ,  $H_v = (1 \ 0 \ 0)$  и построим соответствующий виртуальный наблюдатель. Для простоты зададим  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1$ ,  $\vartheta_3 = 0$ ,  $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ . Поскольку уравнения (4.1) содержат только нелинейные члены, для них  $F = 0$  и решение задачи описанным методом невозможно. Для устранения этого недостатка, согласно ЛД-подходу, добавим в первое уравнение формальный член  $-(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)$ , первый элемент которого отнесем к линейной части, второй – к нелинейной. Аналогично во второе уравнение добавим член  $x_1 - x_2 - (x_2 - x_3) - (x_1 - x_2 - (x_2 - x_3))$ , в третье – член  $(x_2 - x_3 - x_3) - (x_2 - x_3 - x_3)$ . В результате получим следующее описание системы:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(x, u) = \begin{pmatrix} -\sqrt{A_1}x + A_1x \\ \sqrt{A_1}x - \sqrt{A_2}x - (A_1x - A_2x) \\ \sqrt{A_2}x - \sqrt{A_3}x - (A_2x - A_3x) \end{pmatrix},$$

$$A_1 = (1 \ -1 \ 0), \quad A_2 = (0 \ 1 \ -1), \quad A_3 = (0 \ 0 \ 1).$$

Нетрудно проверить, что условие (2.6) выполняется при  $k = 1$ , однако при этом не верно условие (2.8), поэтому принимаем  $k = 2$ . Составная матрица  $(V^{(2)} \ L^{(2)})$  имеет вид

$$(V^{(2)} \ L^{(2)}) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что с матрицей  $(V^{(2)} \ L^{(2)})$  уравнение (2.5) имеет два решения:

$$(R_* \ -J_{*1} \ -J_{*2}) = (1 \ 0 \ 2 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1), \quad \Phi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(R_* \ -J_{*1} \ -J_{*2}) = (1 \ 0 \ 3 \ -1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0), \quad \Phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим первое из них. Так как

$$\Phi^{(1)}C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то  $j_1 = 2$ ,  $j_2 = 1$  и

$$A' = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что условие (2.4) выполняется и нелинейная составляющая может быть добавлена в линейную модель. Уравнение (2.3) принимает вид

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A_* \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

одно из возможных решений которого представлено строками

$$A_{*1} = (0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0), \quad A_{*2} = (0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0).$$

В результате получаем модель:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{v1} &= x_{v2} - 2y_1 + y_2 + u_2 + \sqrt{x_{v2} - y_1} - \sqrt{y_1 - y_2} - (x_{v2} - y_1 - (y_1 - y_2)) = u_2 + \sqrt{x_{v2} - y_1} - \sqrt{y_1 - y_2}, \\ \dot{x}_{v2} &= -y_v + y_1 - \sqrt{x_{v2} - y_1} + x_{v2} - y_1 = -x_{v2} + y_1 + u_1 - \sqrt{x_{v2} - y_1} + x_{v2} - y_1 = u_1 - \sqrt{x_{v2} - y_1}, \\ y_* &= x_{v1}, \quad y_v = x_{v2}. \end{aligned}$$

Уравнение (3.5) для ошибки  $e(t)$  принимает вид

$$\dot{e}(t) = \begin{pmatrix} -J_{v1} & 0 \\ -J_{v2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} \end{pmatrix} e(t) = \begin{pmatrix} -J_{v1} & \frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} \\ -J_{v2} & -\frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} \end{pmatrix} e(t).$$

Запишем характеристический полином матрицы этого уравнения:

$$(J_{v1} + \lambda) \left( \frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} + \lambda \right) + \frac{J_{v2}}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} = \lambda^2 + \lambda \left( J_{v1} + \frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} \right) + \frac{J_{v1} + J_{v2}}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} = 0.$$

Примем  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ , тогда

$$J_{v1} + \frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} = 2, \quad \frac{J_{v1} + J_{v2}}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} = 1,$$

откуда

$$J_{v1} = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}}, \quad J_{v2} = 2\sqrt{x_{v2} - y_1} + \frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} - 2.$$

Приведем описание наблюдателя:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{v1}(t) &= u_2(t) + \sqrt{x_{v2}(t) - y_1(t)} - \sqrt{y_1(t) - y_2(t)} + J_{v1}r(t), \\ \dot{x}_{v2}(t) &= u_1(t) - \sqrt{x_{v2}(t) - y_1(t)} + J_{v2}r(t), \\ y_*(t) &= x_{v1}(t), \\ y_v(t) &= x_{v2}(t), \\ r(t) &= y_1(t) - y_*(t). \end{aligned}$$

**Заключение.** В работе предложен метод построения виртуальных датчиков в технических системах, описываемых нелинейными моделями. На основе наблюдателей Люенбергера получены соотношения, позволяющие построить датчики минимальной размерности, оценивающие заданные компоненты вектора состояния диагностируемой системы. Синтезированные виртуальные датчики дают возможность в ряде случаев не только уменьшить сложность средств диагностирования и повысить глубину диагностирования, но и рассмотреть задачи, которые без использования таких датчиков не могли быть решены.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мироновский Л.А.* Функциональное диагностирование динамических систем. М.; СПб.: МГУ-ГРИФ, 1998.
2. *Шумский А.Е., Жирабок А.Н., Гаджиев Ч.* Диагностирование и отказоустойчивое управление динамическими системами. Монография [электронный ресурс]. Владивосток: ДВФУ, 2016. 178 с. <http://elib.dvfu.ru/vital/access/manager/Repository/feFu:4053>.
3. *Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M.* Diagnosis and Fault Tolerant Control. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
4. *Witczak M.* Fault Diagnosis and Fault Tolerant Control Strategies for Nonlinear Systems. Berlin: Springer, 2014.
5. *Жирабок А.Н., Зувев А.В., Шумский А.Е.* Метод идентификации дефектов в нелинейных системах на основе скользящих наблюдателей // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 11–23.
6. *Жирабок А.Н.* Анализ наблюдаемости и управляемости нелинейных динамических систем линейными методами // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 1. С. 10–17.
7. *Жирабок А.Н., Ким Чхун Ир.* Виртуальные датчики в задаче функционального диагностирования // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. № 6. С. 298–303.
8. *Misawa E.A., Hedrick J.K.* Nonlinear Observers – a State of the Art Survey // J. Dynamic Systems, Measurements and Control. 1989. V. 111. P. 344–352.