ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 1, с. 28–40

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.977

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ

© 2022 г. А. С. Бортаковский

МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

e-mail: asbortakov@mail.ru

Поступила в редакцию 05.07.2021 г.
После доработки 23.07.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Рассматривается задача оптимального управления гибридной системой, непрерывное движение которой чередуется с дискретными изменениями (переключениями), при которых меняется пространство состояний. Смена размерности пространства состояний происходит, например, при изменении количества управляемых объектов, что характерно, в частности, для задач управления группами подвижных объектов переменного состава. Моменты переключений заранее не заданы. Они определяются в результате минимизации функционала, при этом не исключаются процессы с мгновенными многократными переключениями. Доказаны необходимые условия оптимальности управления такими системами. Из-за наличия мгновенных многократных переключений эти условия отличаются от традиционных, в частности, уравнениями для вспомогательных переменных. Применение условий оптимальности демонстрируется на академическом примере.

DOI: 10.31857/S0002338821060056

Введение. Непрерывное движение гибридных систем переменной размерности (ГСПР) описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные изменения состояния (переключения) – рекуррентными уравнениями или включениями. В момент переключения меняется пространство состояний системы, в частности его размерность. Системы управления с изменяемым пространством состояний исследовались под разными названиями: составные системы [1, 2], системы с переменной размерностью [3], системы с разветвлением структур [4], ступенчатые системы [5], сложные (многоэтапные) процессы [6], системы со сменой фазового пространства [7], гибридные системы с промежуточными условиями [8, 9]. Большинство работ относятся к линейным системам и касаются вопросов устойчивости, управляемости и наблюдаемости [2, 4]. В задачах оптимального управления [1, 5, 7–9], как правило, моменты смены фазового пространства фиксированы или определяются промежуточными условиями, а переключения состояний неуправляемы. Количество переключений задано, а в первых работах [1, 5, 7] по этой тематике переключение единственное. Необходимые условия для гибридных систем с промежуточными условиями, обобщающие принцип максимума [10], получены в [8, 9]. В этих публикациях количество переключений задано, а сами переключения неуправляемы.

В статье рассматриваются задачи, в которых переключения состояний системы управляемы. Количество переключений задано, а моменты переключений – нет. Они определяются в результате минимизации функционала, в котором учитываются затраты на каждое переключение. При этом допускаются процессы с мгновенными многократными переключениями [11]. Такие процессы, как правило, исключаются в задачах оптимизации гибридных систем (ГС), несмотря на то, что именно они оказываются оптимальными не только в академических примерах, но и в приложениях, например в задачах группового управления.

Необходимые условия оптимальности управления динамическими системами, как правило, связаны с вычислением вариаций функционалов, определенных на траекториях движения. Для ГСПР такие вариации порождаются игольчатыми вариациями управления непрерывным движением системы, малыми вариациями управления переключениями, а также малыми вариациями моментов переключений. При доказательстве принципа максимума для непрерывных [10] или дискретных [12, 13] систем важную роль играют вспомогательные функции. Аналогичные функции используются для ГСПР. Между моментами переключений эти функции удовлетворяют сопряженной системе дифференциальных уравнений, а в моменты переключений – рекуррентным уравнениям. Из-за изменения размерности ГС приходится использовать разные наборы вспомогательных функций после каждого переключения.

Перечисленные вариации управлений непрерывным движением и переключениями – традиционные для непрерывных [10] и дискретных [12, 13] систем. Они порождают малые изменения траектории движения. Вариация моментов переключений приводит к необычным изменениям траектории. Возникают малые промежутки времени, на которых нельзя определить вариацию (даже отклонение) траектории, так как опорная и возмущенная траектории принадлежат разным пространствам состояний. Поэтому приходится преодолевать определенные технические трудности при вычислении вариации функционала.

Доказанные необходимые условия оптимальности ГСПР и ранее полученные достаточные условия [14] можно использовать для широкого круга задач управления с переключениями: непрерывно-дискретными [15], логико-динамическими, составными [1, 2], ступенчатыми системами [5], системами с промежуточными условиями [2, 8, 9, 16], с переменной или разветвляемой структурой [3, 4, 17, 18]. Применение необходимых условий оптимальности ГСПР демонстрируется на академическом примере.

1. Постановка задачи. Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений в моменты времени t_i, $i = 1,\ldots,N$, образующие неубывающую конечную последовательность $\mathcal{T} = \{t_1,\ldots,t_N\}$:

$$t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_N \le t_{N+1} \overset{\Delta}{=} t_F. \tag{1.1}$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальному уравнению:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{1.2}$$

а в моменты переключений – дискретно в соответствии с рекуррентным уравнением

$$x_i(t_i) = g_i(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i), \quad i = 1,\ldots,N. \tag{1.3}$$

В соотношениях (1.2) $\mathcal{N} \overset{\Delta}{=} \{i = 0,1,\ldots,N \,|\, t_i < t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1}]$ непрерывного изменения системы; $x_i(t)$ – состояние системы в момент времени $t \in T_i$, $x_i(t) \in X_i = \mathbb{R}^{n_i}$; $u_i(t)$ – управление непрерывным движением системы в момент времени $t \in T_i$, $u_i(t) \in U_i \subset \mathbb{R}^{p_i}$, U_i – заданное множество допустимых значений управления, $i \in \mathcal{N}$. При $t_i = t_{i+1}$ дифференциальное уравнение (1.2) опускается ($i \notin \mathcal{N}$), функция $x_i(\cdot)$ определена в одной точке $x_i(t_i) = x_i$, а значение $u_i(t_i)$ управления в этой точке несущественно. В уравнении (1.3) v_i – управление переключением системы в момент $t_i \in \mathcal{T}$, $v_i \in V_i \subset \mathbb{R}^{q_i}$, V_i – заданное множество допустимых управлений переключениями, $i = 1,\ldots,N$. Функции $f_i : T \times X_i \times \times U_i \to \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 0,1,\ldots,N$, и $g_i : T \times X_{i-1} \times V_i \to \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1,\ldots,N$, непрерывны на всей области определения вместе с первыми частными производными по t и компонентам вектора x_i. Возможное равенство последовательных моментов в (1.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [11].

Начальное состояние системы фиксировано $x_0(t_0) = x_0$, а конечное определяется первым достижением терминальной поверхности $(t_F, x_N(t_F)) \in \mathbf{\Gamma}_N$, задаваемой системой уравнений

$$\Gamma_N(t, x_N) = 0,$$

где $\Gamma_N : [t_0, +\infty) \times X_N \to \mathbb{R}^{l_N}$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Аналогичные терминальные условия могут накладываться на левый конец траектории [19] либо на оба конца траектории одновременно (например, условие периодичности).

Множество допустимых процессов $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ составляют четверки $d = (\mathcal{T}, x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$, включающие неубывающую последовательность $\mathcal{T}$ моментов переключений (1.1); последовательность $x(\cdot) = \{x_i(\cdot)\}_{i=0}^{N}$ абсолютно непрерывных функций $x_i : T_i \to X_i$, $i \in \mathcal{N}$; последовательность $u(\cdot) = \{u_i(\cdot)\}_{i=0}^{N}$ ограниченных измеримых функций $u_i : T_i \to U_i$; последовательность $\{v\} = \{v_i\}_{i=1}^{N}$ векторов $v_i \in V_i$. Причем пары $(x_i(\cdot), u_i(\cdot))$, $i \in \mathcal{N}$, удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.2) почти всюду на промежутке T_i, тройки $(x_{i-1}(t_i), x_i(t_i), v_i)$, $i = 1,\dots,N$, — рекуррентному уравнению (1.3). В начальный момент времени выполняется условие $x_0(t_0) = x_0$, а в конечный — терминальное условие $\Gamma_N(t_F, x_N(t_F)) = 0$. Подчеркнем, что количество $N = |\mathcal{T}|$ переключений и моменты переключений $\mathcal{T} = \{t_1,\dots,t_N\}$ не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать. При этом не исключается случай отсутствия переключений, когда $N = 0$ и $\mathcal{T} = \varnothing$ — пустое множество по определению.

На множестве $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ допустимых процессов задан функционал качества

$$I_0(t_0, x_0, d) = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0(t, x_i(t), u_i(t))\,dt + \sum_{i=1}^{N} g_i^0(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i) + F_N(t_F, x_N(t_F)), \tag{1.4}$$

где функции $f_i^0 : T_i \times X_i \times U_i \to \mathbb{R}$, $g_i^0 : T \times X_i \times V_i \to \mathbb{R}_+$ и $F_N : [t_0, +\infty) \times X_N \to \mathbb{R}$ ограничены снизу и непрерывны вместе с первыми частными производными по t и x. В функционале (1.4) момент окончания t_F обозначен также через t_{N+1}.

Требуется найти минимальное значение функционала (1.4) и оптимальный процесс $d^* = (\mathcal{T}^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot), \{v^*\}) \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I_0(t_0, x_0, d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)} I_0(t_0, x_0, d). \tag{1.5}$$

Если наименьшее значение (1.5) не существует, то может быть поставлена задача нахождения минимизирующей последовательности допустимых процессов [19]. Количество переключений у процессов минимизирующей последовательности может оставаться конечным или неограниченно возрастать. Бесконечное количество переключений у оптимального процесса становится невозможным, если усилить условие ограниченности функции g_i^0 в (1.4), полагая $g_i^0(t, x_{i-1}, v_i) \geq \text{const} > 0$. В этом случае каждое слагаемое g_i^0 в (1.4) можно рассматривать как затраты (или “штраф”) при переключении $x_{i-1}(t_i) \to x_i(t_i)$. Применение таких “штрафов” в функционале качества исключает фиктивные переключения, когда состояние не меняется $x_{i-1}(t_i) = x_i(t_i)$, а также последовательности процессов с неограниченным ростом числа переключений как неминимизирующие.

Отметим, что управляющие параметры в задаче (1.5) образуют “управляющий комплекс”, который включает: количество переключений N, моменты переключений $t_1, \dots, t_N$, управление непрерывным движением $u(\cdot)$, управление переключениями $\{v\}$ и момент окончания процесса управления t_F. Как правило, решение поставленной задачи $I \to \min$ сводится к решению ряда задач $I_N \to \min$ с фиксированным числом переключений N, которое последовательно увеличивается: $N = 0, 1, \dots$ Отметим, что в прикладных задачах количество переключений ограничено техническими требованиями.

2. Вариации функционала. Вывод условий оптимальности по методике [20] состоит в следующем: используя вариации управления, составляем уравнение для вариации траектории; выражаем вариацию функционала через вариации управления и траектории, исключаем из полученного выражения вариацию траектории, вводя вспомогательные переменные, удовлетворяющие дополнительным уравнениям и условиям трансверсальности (в форме [21]). Будем сравнивать значения функционала (1.5) на опорном (невозмущенном) допустимом процессе $d = (\mathcal{T}, x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$ и возмущенном допустимом процессе $d = (\tilde{\mathcal{T}}, \tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot), \{\tilde{v}\})$. Для ГСПР используем два типа вариаций управляющих параметров: либо игольчатые вариации $\delta u_i(\cdot)$ управлений $u_i(\cdot)$, малые изменения δv_i управления v_i и малую вариацию δt_F момента окончания, либо малые вариации δt_i моментов переключений t_i, $i = 1,\dots,N$.

2.1. В а р и а ц и и у п р а в л е н и й и м о м е н т а о к о н ч а н и я. Игольчатые вариации $\delta u_i(\cdot)$ управлений $u_i(\cdot)$ представляют собой конечные отклонения $\delta u_i(t) = \tilde{u}_i(t) - u_i(t)$ на множестве $T_i' \subset T_i$ малой меры μ_i, $i \in \mathcal{N}$. В остальных точках $t \in T_i \setminus T_i'$ вариация $\delta u_i(\cdot)$ равна нулю. Величину $\mu = \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_N$ будем считать бесконечно малой первого порядка причем $\mu_i = 0$, $i \notin \mathcal{N}$. Предполагаем, что вариация $\delta t_F = \tilde{t}_F - t_F$ момента окончания и вариации $\delta v_i = \tilde{v}_i - v_i$ управлений переключениями имеют тот же порядок малости, т.е. $\delta t_F \sim \mu$ и $|v| = |v_1| + \dots + |v_N| \sim \mu$. Эти вариации порождают малые вариации $\delta x(\cdot) = \tilde{x}(\cdot) - x(\cdot)$ траектории, которые удовлетворяют уравнениям в вариациях:

$$\delta \dot{x}_i(t) = f_{i\,x_i}[t]\,\delta x_i(t) + \tilde{f}_i[t] - f_i[t], \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{2.1}$$

$$\delta x_i(t_i) = g_{i\,x_{i-1}}[t_i]\,\delta x_{i-1}(t_i) + g_{i\,v_i}[t_i]\,\delta v_i, \quad i = 1,\dots,N. \tag{2.2}$$

Здесь и далее принято следующее [20]: аргумент t, заключенный в квадратные скобки, означает, что функция вычислена на опорном режиме в указанный момент времени. Например, $f_i[t] = f_i(t, x_i(t), u_i(t))$ – значение функции f_i на опорном режиме; $f_{i\,x_i}[t] = f_{i\,x_i}(t, x_i(t), u_i(t))$ – матрица (Якоби) первых частных производных вектор-функции f_i по компонентам вектора x_i, вычисленная на опорном режиме. Знак "тильда" относится только к возмущенному управлению, т.е. $\tilde{f}_i[t] = f_i(t, x_i(t), \tilde{u}_i(t))$. Вариации $\delta x(\cdot)$ имеют порядок малости μ, а уравнения в вариациях (2.1), (2.2) выполняются с точностью $o(\mu)$.

Запишем вариацию функционала (1.4)

$$\begin{gathered}\delta I = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{f^0_{i\,x_i}[t]\delta x_i(t) + \tilde{f}^0_i[t] - f^0_i[t]\}dt + \sum_{i=1}^{N}\{g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i]\delta x_{i-1}(t_i) + g^0_{i\,v_i}[t_i]\delta v_i\} + \\ + \{F_{N\,t}[t_F] + f^0_N[t_F]\}\delta t_F + F_{N\,x_N}[t_F]\delta x_{N\,F},\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\delta x_{N\,F} = \delta x_N(t_F) + f_N[t_F]\,\delta t_F$. Здесь, как и ранее, первые частные производные функций обозначаем, указывая в нижнем индексе соответствующий аргумент. Например, $F_{N\,t}$ – частная производная скалярной функции $F_N(t, x_N)$ по времени t, $F_{N\,x_N}$ – градиент этой же функции по координатам вектора x_N. Теперь, следуя методике [20], нужно исключить в (2.3) вариации δx_i.

Введем функции Гамильтона–Понтрягина (ГП) для непрерывного движения и переключений соответственно:

$$H_i(\psi_i, t, x_i, u_i) = \psi_i\, f_i(t, x_i, u_i) - f^0_i(t, x_i, u_i),$$

$$\hat{H}_i(\psi_i, t, x_{i-1}, v_i) = \psi_i\, g_i(t, x_{i-1}, v_i) - g^0_i(t, x_{i-1}, v_i).$$

Здесь $\psi_i = (\psi^1_i, \dots, \psi^{n_i}_i)$ – вспомогательные переменные, $i = 1,\dots,N$. Предполагаем, что между моментами переключений функции $\psi_i : T_i \to \mathbb{R}^{n_i}$, $i \in \mathcal{N}$, абсолютно непрерывны и удовлетворяют сопряженным системам уравнений:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t))}{\partial x_i}, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{2.4}$$

в моменты переключений – рекуррентным уравнениям:

$$\psi_{i-1}(t_i) = \frac{\partial \hat{H}_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t), v_i)}{\partial x_{i-1}}, \quad i = 1,\dots,N; \tag{2.5}$$

а в конечный момент времени – условиям трансверсальности

$$\{F_{N\,t}[t_F] - H_N[t_F]\}\delta t_F + \{F_{N\,x_N}[t_F] + \psi_N(t_F)\}\,\delta x_{N\,F} = 0 \tag{2.6}$$

при $\Gamma_{N\,t}[t_F]\,\delta t_F + \Gamma_{N\,x_N}[t_F]\,\delta x_N = 0$, где $\delta x_{N\,F} = \delta x_N(t_F) + f_N[t_F]\,\delta t_F$.

Прибавляем к вариации (2.3) равенства

$$\psi_i(t)\,\delta x_i(t)\,\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{\dot{\psi}_i(t)\,\delta x_i(t) + \psi_i(t)\,\delta \dot{x}_i(t)\}\,dt = 0, \quad i = 0,1,\dots,N, \tag{2.7}$$

которые следуют из формулы Ньютона–Лейбница для ненулевых по длине промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1}]$, $i \in \mathcal{N}$. Для совпадающих моментов переключений $t_i = t_{i+1}$ равенства (2.7), очевидно, выполняются. После добавления равенств (2.7) вариация (2.3) принимает вид

$$\delta I = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{f^0_{i\,x_i}[t]\,\delta x_i(t) + \tilde{f}^0_i[t] - f^0_i[t] - [\dot{\psi}_i(t)\,\delta x_i(t) + \psi_i(t)\,\delta\dot{x}_i(t)]\}dt +$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\{g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i]\,\delta x_{i-1}(t_i) + g^0_{i\,v_i}[t_i]\,\delta v_i + \psi_i(t_{i+1})\,\delta x_i(t_{i+1}) - \psi_i(t_i)\,\delta x_i(t_i)\} + \tag{2.8}$$
$$+\{F_{N\,t}[t_F] + f^0_N[t_F]\}\delta t_F + F_{N\,x_N}[t_F]\delta x_{N\,F} + \psi_0(t_1)\delta x_0(t_1).$$

В (2.8) учтено, что в начальный момент времени вариации траектории нет, т.е. $\delta x_0(t_0) = 0$.

Рассмотрим сначала терминальные слагаемые, которые после подстановки $\delta x_N(t_F) = \delta x_{NF} - f_N[t_F]\delta t_F$ можно преобразовать следующим образом:

$$\{F_{N\,t}[t_F] + f^0_N[t_F]\}\delta t_F + F_{N\,x_N}[t_F]\delta x_{N\,F} + \psi_N(t_F)(\delta x_{N\,F} - f_N[t_F]\delta t_F) =$$
$$= \{F_{N\,t}[t_F] - H_N[t_F]\}\,\delta t_F + \{F_{N\,x_N}[t_F] + \psi_N(t_F)\}\,\delta x_{N\,F}.$$

Согласно условиям трансверсальности (2.6), это выражение равно нулю.

Теперь запишем подынтегральные слагаемые для одного промежутка $[t_i, t_{i+1}]$, $i \in \mathcal{N}$, подставляя для производных $\delta\dot{x}_i$ и $\dot{\psi}_i$ выражения из уравнений в вариациях (2.1) и сопряженной системы (2.4). Опуская индекс i (для сокращения записи), получаем

$$f^0_x[t]\,\delta x(t) + \tilde{f}^0[t] - f^0[t] - (-\psi(t) f_x[t] + f^0_x[t])\delta x(t) - \psi(t)\,(f_x[t]\,\delta x(t) + \tilde{f}[t] - f[t]) =$$
$$= \tilde{f}^0[t] - \psi(t)\tilde{f}[t] - f^0[t] + \psi(t) f[t] = H[t] - \tilde{H}[t].$$

Следовательно, интегральные слагаемые вариации (2.8) имеют вид

$$\sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t)) - H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), \tilde{u}_i(t))\}\,dt.$$

Запишем слагаемые в (2.8), относящиеся к одному моменту переключений t_i:

$$g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i]\,\delta x_{i-1}(t_i) + g^0_{i\,v_i}[t_i]\,\delta v_i + \psi_{i-1}(t_i)\,\delta x_{i-1}(t_i) - \psi_i(t_i)\,\delta x_i(t_i).$$

Подставляем вариацию (2.2) и группируем слагаемые с вариацией $\delta x_{i-1}(t_i)$:

$$\{g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] + \psi_{i-1}(t_i) - \psi_i(t_i) g_{i\,x_i}[t_i]\}\delta x_{i-1}(t_i) + \{g^0_{i\,v_i}[t_i] - \psi_i(t_i)\,g_{i\,v_i}[t_i]\}\delta v_i.$$

Учитывая (2.5), первое слагаемое равняется нулю. Второе – выражается через производную $\hat{H}_{i\,v_i}[t_i]$ функции ГП. Суммируя, получаем

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \hat{H}_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)}{\partial v_i}\delta v_i.$$

Таким образом, вариация функционала (1.4) при варьировании управлений и момента окончания процесса управления имеет вид

$$\begin{gathered}\delta I = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t)) - H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), \tilde{u}_i(t))\}dt - \\ -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \hat{H}_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)}{\partial v_i}\,\delta v_i.\end{gathered} \tag{2.9}$$

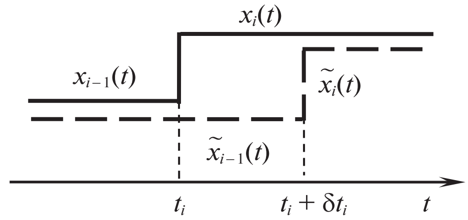

Рис. 1. Опорная (x) и возмущенная ($\tilde{x}$) траектории при $\delta t_i > 0$

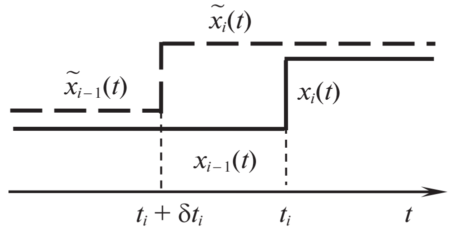

Рис. 2. Опорная (x) и возмущенная ($\tilde{x}$) траектории при $\delta t_i < 0$

2.2. В а р и а ц и и м о м е н т о в п е р е к л ю ч е н и й. Будем варьировать только моменты переключений. Предполагаем, что вариации $\delta t_i = \tilde{t}_i - t_i$ моментов переключений t_i, $i = 1,\ldots,N$, настолько малы, что выполняются неравенства

$$t_0 \le t_1 + \delta t_1 \le \ldots \le t_N + \delta t_N \le t_F.$$

Величину $|\delta t| = |\delta t_1| + \ldots + |\delta t_N|$ будем считать бесконечно малой первого порядка. На промежутках между моментами переключений t_i и $t_i + \delta t_i$ вариации траектории $\delta x(\cdot)$ и управления $\delta u(\cdot)$ не определены, так как опорный и возмущенный процессы принадлежат разным пространствам. На рис. 1 и 2 изображены опорная (сплошная линия) и возмущенная (штриховая линия) траектории при вариации δt_i момента переключения t_i. На рис. 1 представлен случай $\delta t_i > 0$, а на рис. 2 – случай $\delta t_i < 0$. На пересечениях $\Delta T_i = T_i \cap \tilde{T}_i$ промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1}]$ и $\tilde{T}_i = [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i+1}]$, $i \in \mathcal{N}$, вариация $\delta x_i(\cdot)$ имеет тот же порядок малости, что и $|\delta t|$, а вариация управления нулевая. Уравнение в вариациях

$$\delta \dot{x}_i(t) = f_{i\,x_i}[t]\,\delta x_i(t), \quad t \in \Delta T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{2.10}$$

выполняется с погрешностью $o(|\delta t|)$.

Запишем вариацию функционала (1.4) при $\delta t_i > 0$, $i = 1,\ldots,N$:

$$\delta I = F_{N\,x_N}[t_F]\,\delta x_N(t_F) + \sum_{i=0}^{N} \int\limits_{t_i+\delta t_i}^{t_{i+1}} f^0_{i\,x_i}[t]\,\delta x_i(t)\,dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} \{(g^0_{i\,t}[t_i] + g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] f_{i-1}[t_i] + f^0_{i-1}[t_i] - f^0_i[t_i])\,\delta t_i + g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i]\,\delta x_{i-1}(t_i)\}.$$

К этой вариации прибавляем равенства

$$\psi_i(t)\,\delta x_i(t)\Big|_{t_i+\delta t_i}^{t_{i+1}} - \int\limits_{t_i+\delta t_i}^{t_{i+1}} \{\dot{\psi}_i(t)\,\delta x_i(t) + \psi_i(t)\,\delta \dot{x}_i(t)\}dt = 0, \quad i = 0,1,\ldots,N.$$

Терминальные слагаемые будут равны нулю в силу условий трансверсальности (2.6)

$$\{F_{N\,x_N}[t_F] + \psi_N(t_F)\}\delta x_N(t_F) = 0.$$

Каждое подынтегральное выражение тоже равняется нулю, согласно уравнению в вариациях (2.10) и сопряженной системе (2.4):

$$f^0_{i\,x_i}[t]\,\delta x_i(t) - \{\dot\psi_i(t)\,\delta x_i(t) + \psi_i(t)\,\delta\dot x_i(t)\} =$$

$$= f^0_{i\,x_i}[t]\,\delta x_i(t) + (\psi_i(t) f_{i\,x_i}[t] - f^0_{i\,x_i}[t])\,\delta x_i(t) - \psi_i(t) f_{i\,x_i}[t]\delta x_i(t) = 0.$$

Отметим, что в случае $\delta t_i < 0$ терминальные и интегральные члены вариации будут также нулевыми.

Запишем теперь слагаемые, относящиеся к одному моменту времени t_i:

$$(g^0_{i\,t}[t_i] + g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] f_{i-1}[t_i] + f^0_{i-1}[t_i] - f^0_i[t_i])\delta t_i + g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i]\delta x_{i-1}(t_i) +$$

$$+\psi_{i-1}(t_i)\,\delta x_{i-1}(t_i) - \psi_i(t_i + \delta t_i)\,\delta x_i(t_i + \delta t_i).$$

Преобразуем последнее слагаемое, подставляя вариацию

$$\delta x_i(t_i + \delta t_i) = g_{i\,x_{i-1}}[t_i]\delta x_{i-1}(t_i) + \{g_{i\,t}[t_i] + g_{i\,x_{i-1}}[t_i] f_{i-1}[t_i] - f_i[t_i]\}\delta t_i \tag{2.11}$$

и заменяя $\psi_i(t_i + \delta t_i) = \psi_i(t_i) + \dot\psi_i(t_i)\delta t_i$. Отбрасывая члены второго порядка малости и группируя слагаемые, получаем

$$\{g^0_{i\,t}[t_i] + g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] f_{i-1}[t_i] + f^0_{i-1}[t_i] - f^0_i[t_i] - \psi_i(t_i)(g_{i\,t}[t_i] + g_{i\,x_{i-1}}[t_i] f_{i-1}[t_i] - f_i[t_i])\}\delta t_i +$$

$$+\{g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] + \psi_{i-1}(t_i) - \psi_i(t_i) g_{i\,x_{i-1}}[t_i]\}\delta x_{i-1}(t_i).$$

Последнее слагаемое равно нулю, согласно уравнению (2.5). Оставшиеся члены записываем при помощи функции ГП:

$$\{g^0_{i\,t}[t_i] + g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] f_{i-1}[t_i] + f^0_{i-1}[t_i] - f^0_i[t_i] - \psi_i(t_i)(g_{i\,t}[t_i] + g_{i\,x_{i-1}}[t_i]\, f_{i-1}[t_i] - f_i[t_i])\,\delta t_i =$$

$$= \left\{H_i[t_i] - \frac{\partial}{\partial t}\hat H_i[t_i] + f^0_{i-1}[t_i] + (g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] - \psi_i(t_i) g_{i\,x_{i-1}}[t_i]) f_{i-1}[t_i]\right\}\delta t_i\,.$$

Заменяя выражение в круглых скобках, согласно (2.5), получаем

$$\left\{H_i[t_i] - \frac{\partial}{\partial t}\hat H_i[t_i] + f^0_{i-1}[t_i] - \psi_{i-1}(t_i) f_{i-1}[t_i]\right\}\delta t_i = \left\{H_i[t_i] - H_{i-1}[t_i] - \frac{\partial}{\partial t}\hat H_i[t_i]\right\}\delta t_i.$$

При $\delta t_i < 0$ приходим к этой же формуле. Но в этом случае вместо замены (2.11) нужно использовать вариацию

$$\delta x_i(t_i) = g_{i\,x_{i-1}}[t_i]\delta x_{i-1}(t_i) + \{g_{i\,t}[t_i] + g_{i\,x_{i-1}}[t_i]\, f_{i-1}[t_i] - f_i[t_i]\}\,\delta t_i.$$

Таким образом, вариация функционала при вариации моментов переключений имеет вид

$$\delta I = \sum_{i=0}^{N}\left\{H_i(\psi_i(t_i), t_i, x_i(t_i), u_i(t_i)) - H_{i-1}(\psi_{i-1}(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), u_{i-1}(t_i)) - \right.$$
$$\left. -\frac{\partial}{\partial t}\hat H_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)\right\}\delta t_i. \tag{2.12}$$

3. Необходимые условия оптимальности. Полученные вариации (2.9) и (2.12) функционала (1.4), определенного на траекториях ГСПР, позволяют сформулировать необходимые условия оптимальности. Для учета неравенств (1.1) будем использовать метод Лагранжа [22, 23] снятия ограничений.

Т е о р е м а. Пусть оптимальный процесс $(\mathcal{T}, x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$ имеет N переключений в моменты $t_1, \ldots, t_N$: $t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_N \le t_F$. Тогда существуют функции $\psi_i(\cdot)$, $i = 0,1,\ldots,N$, и такие числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N+1}$, неравные нулю одновременно, что выполняются:

1) дифференциальные уравнения:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t))}{\partial x_i}, \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N};$$

2) рекуррентные уравнения:

$$\psi_{i-1}(t_i) = \frac{\partial \hat{H}_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)}{\partial x_{i-1}}, \quad i = 1,\ldots,N;$$

3) условие трансверсальности:

$$\{F_{N\,t}[t_F] - H_N[t_F]\}\delta t_F + \{F_{N\,x_N}[t_F] + \psi_N(t_F)\}\delta x_{N\,F} = 0$$

для любых вариаций, связанных равенством $\Gamma_{N\,t}[t_F]\delta t_F + \Gamma_{N\,x_N}[t_F]\delta x_{N\,F} = 0$;

4) условие максимума функции ГП по управлению непрерывным движением

$$H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t)) = \max_{u_i \in U_i} H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i)$$

почти всюду на T_i, $i \in \mathcal{N}$;

5) условие неположительности вариации функции ГП по управлению переключениями:

$$\frac{\partial \hat{H}_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)}{\partial v_i}\delta v_i \le 0$$

для любых допустимых вариаций δv_i, $i = 1,\ldots,N$;

6) условие скачка функции ГП:

$$\lambda_0 \Bigg\{ H_i(\psi_i(t_i), t_i, x_i(t_i), u_i(t_i)) - H_{i-1}(\psi_{i-1}(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), u_{i-1}(t_i)) -$$

$$- \frac{\partial \hat{H}_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)}{\partial t}\Bigg\} - \lambda_i + \lambda_{i+1} = 0, \quad i = 1,\ldots,N;$$

7) условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_i(t_{i-1} - t_i) = 0, \quad i = 1,\ldots,N+1;$$

8) условие неотрицательности:

$$\lambda_i \ge 0, \quad i = 0,1,\ldots,N+1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в качестве опорного процесса взять оптимальный, то вариации функционала (1.4) должны быть неотрицательными. Из неотрицательности вариации (2.9) следуют условия 4) и 5) теоремы. Действительно, возмущенное управление $\tilde{u}(\cdot)$ отличается от оптимального $u(\cdot)$ на множестве малой меры. Однако множество сколь угодно малой меры можно взять всюду плотным на T. Поэтому почти всюду на каждом промежутке интегрирования T_i выполняется неравенство

$$H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t)) - H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), \tilde{u}_i(t)) \ge 0,$$

откуда следует условие 4) максимума функции ГП по непрерывному управлению. Для управления переключениями из неравенства $\delta I \ge 0$ для каждой допустимой вариации δv_i получаем условие 5) теоремы.

Чтобы снять ограничения $t_{i-1} \le t_i$, $i = 1,\ldots, N+1$, на моменты переключений используем принцип Лагранжа [22]. Функция Лагранжа для рассматриваемой задачи минимизации функционала (1.4) при ограничениях типа неравенств имеет вид

$$L = \lambda_0 I + \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i (t_{i-1} - t_i),$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N+1}$ – множители Лагранжа. Равенства 6), учитывая вариацию (2.12), соответствуют условиям стационарности функции Лагранжа по переменным t_i, а условие 7) дополняющей нежесткости и условие 8) неотрицательности отвечают принципу Лагранжа снятия ограничений типа неравенств [22]. Теорема доказана.

Заметим, что если из условий 4) и 5) теоремы удается выразить оптимальные управления $u_i = u_i(\psi_i, t, x_i)$ и $v_i = v_i(\psi_i, t_i, x_{i-1})$ как функции времени, состояния и вспомогательных переменных, то, подставляя эти управления в уравнения движения и условия 1), 2) теоремы, получаем краевую задачу с промежуточными условиями. Ее решение зависит от $n_0 + n_N$ произвольных постоянных, моментов переключений $t_1,\ldots,t_N$ и множителей $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{N+1}$. Всего имеется $n_0 + n_N + 2N + 2$ параметров. Остальные произвольные постоянные, получаемые при интегрировании дифференциальных уравнений движения (2.1) и сопряженных уравнений (2.4), связаны таким же количеством рекуррентных уравнений (2.2) и промежуточных условий (2.5). Начальные и конечные условия вместе с условиями трансверсальности дают $n_0 + n_N$ уравнений, позволяющих исключить оставшиеся произвольные постоянные. Для нахождения остальных $2N + 2$ параметров имеются N условий 6) для скачка функции ГП и $N + 1$ условий дополняющей нежесткости. Этих условий хватает, так как коэффициенты λ_i определяются с точностью до положительного множителя. Как правило, систему дополняют либо равенством $\lambda_0 = 0$ (вырожденный [22], нерегулярный [23] случаи), либо равенством $\lambda_0 = 1$ (невырожденный, регулярный случаи). Таким образом, теорема, как и принцип максимума [10], дает "полную" систему условий, для нахождения процесса, который может быть оптимальным.

4. Пример. Рассмотрим движение группы объектов управления переменного состава на плоскости. Движение начинает один объект управления – носитель. При каждом переключении от него отделяется один объект, который продолжает самостоятельное управляемое движение к заданной цели. Количество управляемых объектов, а следовательно, и размерность гибридной системы увеличиваются с каждым переключением. Задача управления состоит в наискорейшем достижении всех заданных целей – терминальных положений объектов управления, т.е. решается задача многоцелевого быстродействия [15]. Применение необходимых условий оптимальности ГСПР покажем на простой задаче с одним переключением.

Пусть на промежутке времени $[0,T]$ система совершает одно переключение в момент $t_1 \in [0,T]$. До переключения объект управления один – носитель. Его движение описывается уравнениями

$$\dot{x}_0(t) = V\cos\gamma_0(t), \quad \dot{y}_0(t) = V\sin\gamma_0(t), \quad 0 \le t \le t_1,$$

где x_0, y_0 – прямоугольные координаты положения носителя; γ_0 – угол между вектором скорости и осью абсцисс (будем его называть ***углом направления*** движения), V – постоянная линейная скорость движения носителя. Угол направления движением $\gamma_0(\cdot)$ является управлением на промежутке $[0,t_1]$. Начальное состояние носителя задано как

$$x_0(0) = x_{00}, \quad y_0(0) = y_{00}.$$

В момент переключения t_1 от носителя отделяется объект управления

$$x_1(t_1) = x_0(t_1), \quad y_1(t_1) = y_0(t_1), \quad x_1'(t_1) = x_0(t_1), \quad y_1'(t_1) = y_0(t_1). \tag{4.1}$$

Здесь x_1, y_1 – координаты носителя, а x_1', y_1' – координаты отделившегося объекта, которые, согласно (4.1), совпадают с координатами носителя.

После переключения движение системы описывается уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = V\cos\gamma_1(t), \quad \dot{y}_1(t) = V\sin\gamma_1(t), \quad \dot{x}_1'(t) = v\cos\gamma_1'(t), \quad \dot{y}_1'(t) = v\sin\gamma_1'(t), \quad t_1 \le t \le t_F,$$

где v – постоянная линейная скорость отделившегося объекта, а $\gamma_1(t)$ и $\gamma_1'(t)$ – углы направления движения носителя и отделившегося объектов соответственно. Функции $\gamma_1(\cdot)$ и $\gamma_1'(\cdot)$ служат управлениями.

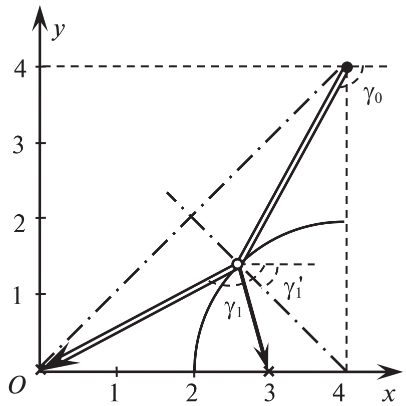

Рис. 3. Траектория движения

Момент окончания процесса управления определяется условиями

$$x_1(T) = x_T, \quad y_1(T) = y_T, \quad x_1'(T) = x_T', \quad y_1'(T) = y_T'. \tag{4.2}$$

Требуется найти наименьшее значение T и управление, на котором это значение достигается, т.е. решается задача группового быстродействия $T \to \min$.

По сравнению с общей постановкой задачи имеем:

$$t_0 = 0, \quad t_F = T, \quad n_0 = 2, \quad n_1 = 4, \quad p_0 = 1, \quad p_1 = 2, \quad U = \mathbb{R}, \quad f_0 = (V\cos\gamma_0, V\sin\gamma_0)^T,$$

$$f_1 = (V\cos\gamma_1, V\sin\gamma_1, v\cos\gamma_1', v\sin\gamma_1')^T, \quad g_1 = (x_0, y_0, x_0, y_0)^T, \quad f_0^0 = f_1^0 = 1, \quad g_1^0 = 0, \quad F = 0.$$

Управление переключениями отсутствует, поэтому “управляющий комплекс” образуют управления непрерывным движением $\gamma_0(\cdot)$, $\gamma_1(\cdot)$, $\gamma_1'(\cdot)$, момент переключения t_1 и момент окончания T.

На рис. 3 траектория движения носителя изображена двойной линией, отделившегося объекта – полужирной линией, начальное состояние – полужирной точкой, конечные состояния носителя и отделившегося объектов – крестиками, точка разделения – окружностью. Направление движения указано стрелками.

Составляем функции ГП:

$$H_0 = \psi_{01}V\cos\gamma_0 + \psi_{02}V\sin\gamma_0 - 1,$$

$$H_1 = \psi_{11}V\cos\gamma_1 + \psi_{12}V\sin\gamma_1 + \psi_{13}v\cos\gamma_1' + \psi_{14}v\sin\gamma_1' - 1,$$

$$\hat{H}_1 = \psi_{11}x_0 + \psi_{12}y_0 + \psi_{13}x_0 + \psi_{14}y_0.$$

Записываем условия теоремы:

1) дифференциальные уравнения для вспомогательных переменных:

$$\dot\psi_{01} = 0, \quad \dot\psi_{02} = 0, \quad 0 \le t \le t_1, \quad \dot\psi_{11} = 0, \quad \dot\psi_{12} = 0, \quad \dot\psi_{13} = 0, \quad \dot\psi_{14} = 0, \quad t_1 \le t \le t_F. \tag{4.3}$$

Поскольку, согласно (4.3), вспомогательные функции постоянны, аргумент у этих функций далее не указывается;

2) рекуррентные уравнения для вспомогательных переменных:

$$\psi_{01} = \psi_{11} + \psi_{13}, \quad \psi_{02} = \psi_{12} + \psi_{14}; \tag{4.4}$$

3) условие трансверсальности:

$$V\psi_{11}\cos\gamma_1(T) + V\psi_{12}\sin\gamma_1(T) + v\psi_{13}\cos\gamma_1'(T) + v\psi_{14}\sin\gamma_1'(T) - 1 = 0; \tag{4.5}$$

4) условие максимума функции ГП по управлению непрерывным движением, из которого следует равенство нулю производных функций ГП по γ_0, γ_1, γ_1':

$$\psi_{01}\sin\gamma_0 - \psi_{02}\cos\gamma_0 = 0, \quad \psi_{11}\sin\gamma_1 - \psi_{12}\cos\gamma_1 = 0, \quad \psi_{13}\sin\gamma_1' - \psi_{14}\cos\gamma_1' = 0. \tag{4.6}$$

Из этих равенств следует, что функции $\gamma_0(\cdot)$, $\gamma_1(\cdot)$, $\gamma_1'(\cdot)$ – постоянны. Поэтому аргумент у этих функций далее не указывается;

5) условия неположительности вариации функции ГП по управлению переключениями нет, так как управление переключениями отсутствует;

6) условие скачка функции ГП:

$$\lambda_0\{V\psi_{11}\cos\gamma_1 + V\psi_{12}\sin\gamma_1 + v\psi_{13}\cos\gamma_1' + v\psi_{14}\sin\gamma_1' - V\psi_{01}\cos\gamma_0 - V\psi_{02}\sin\gamma_0\} + \\ +\lambda_1 - \lambda_2 = 0; \tag{4.7}$$

7) условия дополняющей нежесткости: $\lambda_1(-t_1) = 0$, $\lambda_2(t_1 - T) = 0$;

8) условия неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$.

Будем решать задачу при конкретных значениях параметров:

$$V = 2, \quad v = 1, \quad x_{00} = 4, \quad y_{00} = 4, \quad x_T = 0, \quad y_T = 0, \quad x_T' = 3, \quad y_T' = 0.$$

Разберем сначала крайние случаи, когда $t_1 = 0$ или $t_1 = T$. При $t_1 = 0$ разделение объектов управления происходит в начальный момент времени. Тогда носитель достигает цели (начало координат) за время $T = 2\sqrt{2}$, а отделившийся объект приходит в конечное состояние (3, 0) – за время $T = \sqrt{17}$. Следовательно, терминальные условия (4.2) не выполняются. Случай $t_1 = T$ не подходит, так как в момент разделения t_1 положение отделившегося объекта совпадает с положением носителя, а в конечный момент времени T – нет. Тогда $0 < t_1 < T$ и из условий дополняющей нежесткости получаем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Значит, $\lambda_0 \neq 0$ из-за нетривиальности множителей Лагранжа. Поэтому задача невырожденная (регулярная) и можно взять $\lambda_0 = 1$.

Обозначая через (x, y) координаты точки разделения, для невырожденной задачи из уравнений движения и терминальных условий получаем

$$x = 4 + 2t_1\cos\gamma_0, \quad y = 4 + 2t_1\sin\gamma_0, \quad x + 2(T - t_1)\cos\gamma_1 = 0, \quad y + 2(T - t_1)\sin\gamma_1 = 0 \\ x + (T - t_1)\cos\gamma_1' = 3, \quad y + (T - t_1)\sin\gamma_1' = 0. \tag{4.8}$$

Система (4.8) вместе с условиями (4.4)–(4.7) для невырожденного случая ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_0 = 1$) имеет 13 уравнений с 13 неизвестными: $x, y, t_1, T, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_1', \psi_{01}, \psi_{02}, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{14}$. Найдем решение этой системы.

Исключая из последних четырех уравнений время $T - t_1$ движения после разделения, приходим к равенству

$$x^2 + y^2 = 4[(x-3)^2 + y^2] \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4.$$

Следовательно, точка разделения лежит на окружности Аполлония (см. рис. 3), так как отношение расстояний пройденных носителем и отделившимся объектом постоянно – равно отношению скоростей ($V/v = 2$).

Равенство (4.7) с учетом условия трансверсальности можно представить в виде $V\psi_{01}\cos\gamma_0 - V\psi_{02}\sin\gamma_0 = 1$. Решая это уравнение вместе с первым уравнением в (4.6) относительно ψ_{01} и ψ_{02}, получаем

$$\psi_{01} = \frac{\cos\gamma_0}{V} = \frac{x-4}{2l_1}, \quad \psi_{02} = \frac{\sin\gamma_0}{V} = \frac{y-4}{2l_1}. \tag{4.9}$$

Здесь $l_1 = \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$ – длина пути до точки разделения (см. рис. 3). Из последних двух уравнений (4.6) находим $\psi_{12} = \psi_{11}\mathrm{tg}\gamma_1$, $\psi_{14} = \psi_{13}\mathrm{tg}\gamma_1'$ и подставляем в уравнения (4.4) и в условие трансверсальности:

$$\psi_{11} + \psi_{13} = \psi_{01}, \quad \psi_{11}\mathrm{tg}\gamma_1 + \psi_{13}\mathrm{tg}\gamma_1' = \psi_{02},$$

$$2\psi_{11}(\cos\gamma_1 + \sin\gamma_1\mathrm{tg}\gamma_1) + (\psi_{13}\cos\gamma_1' + \sin\gamma_1'\mathrm{tg}\gamma_1') - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2\psi_{11}}{\cos\gamma_1} + \frac{2\psi_{13}}{\cos\gamma_1'} = 1.$$

Выражаем $\cos\gamma_1 = -x/l_2$, $\operatorname{tg}\gamma_1 = y/x$, $\cos\gamma_1' = 2(3-x)/l_2$, $\operatorname{tg}\gamma_1' = y/(x-3)$ через координаты точки разделения. Здесь $l_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ – длина пути носителя после разделения. Подставляя значения тригонометрических функций и с учетом (4.9), получаем систему

$$\psi_{11}+\psi_{13} = \frac{x-4}{2l_1}, \quad \psi_{11}\frac{y}{x}+\psi_{13}\frac{y}{x-3} = \frac{y-4}{2l_1}, \quad \frac{2\psi_{11}l_2}{-x}+\frac{\psi_{13}l_2}{2(x-3)} = 1.$$

Из первых двух уравнений находим

$$\psi_{11} = \frac{x(4x-y-12)}{6yl_1}, \quad \psi_{13} = \frac{4(y-x)(x-3)}{6yl_1}.$$

Подставляем эти выражения в третье уравнение в (4.9). После упрощений приходим к равенству

$$l_2(4-x) = yl_1 \Leftrightarrow (4-x)\sqrt{x^2+y^2} = y\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}.$$

Для $0 \le x \le 4$ и $0 \le y \le 4$ получаем уравнение $(x-y)(x+y-4) = 0$. Отсюда $x = y$ или $x+y = 4$. Прямая $x = y$ (см. рис. 3) не имеет общих точек с окружностью Аполлония, а прямая $x+y = 4$ пересекает ее в точке с координатами $x = 4-\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$. Следовательно, точка разделения будет $(4-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Остальные неизвестные находятся без труда. Вычислим только минимальное значение функционала $\min T = 2\sqrt{x^2+y^2}/V = 2\sqrt{5-2\sqrt{2}} \approx 2.947$.

Таким образом, необходимым условиям оптимальности удовлетворяет траектория с точкой разделения $(4-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Заметим, что эта траектория действительно оптимальная. В самом деле, из всех двухзвенных ломаных с концами (0, 0), (4, 4) и “промежуточной” вершиной (x, y), принадлежащей окружности, кратчайшей будет такая ломаная, звенья которой образуют равные углы с радиусом окружности, проведенным в вершину (x, y). Это следует из правила геометрической оптики: “угол падения равен углу отражения”.

Заключение. Предлагаемые условия оптимальности применяются для решения задач управления гибридными системами переменной размерности. Эти задачи отличаются от непрерывно-дискретных систем свободными моментами переключений, которые выбираются при оптимизации процесса управления. Именно поиск оптимальных моментов переключений является наиболее сложной частью решения. Необходимые условия обычно позволяют аналитически выразить управления непрерывным движением и переключениями через вспомогательные переменные. Получить аналитические выражения для оптимальных моментов переключений невозможно даже в простых примерах. Поэтому их приходится искать численно, а необходимые условия использовать для контроля процесса оптимизации. Следует заметить, что минимизируемый функционал как функция моментов переключений имеет овражный характер и множество локальных минимумов.

Изменение модели системы управления при переключениях, в частности ее размерности, ожидаемо усложняет условия оптимальности, так как количественно меняется набор вспомогательных функций. Гораздо сложнее учитывать мгновенные многократные переключения. В случае аналитического решения нужно рассматривать разные варианты реализации условий дополняющей нежесткости. При численном решении такие переключения требуется специальным образом предусматривать в процессе оптимизации.

Применение доказанных условий оптимальности кажется перспективным для решения задач управления группами подвижных объектов переменного состава. В частности, это задачи группового быстродействия. Такие задачи востребованы в авиации, космонавтике, робототехнике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Величенко В.В.* Оптимальное управление составными системами // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 4. С. 754–756.

2. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016.

3. *Кириллов А.Н.* Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52. № 3. С. 23–28.

4. *Кириченко Н.Ф., Сопронюк Ф.А.* Минимаксное управление в задачах управления и наблюдения для систем с разветвлением структур // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. Т. 2. № 1.
5. *Медведев В.А., Розова В.Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами // АиТ. 1972. №. 3. С. 15–23.
6. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.
7. *Болтянский В.Г.* Задача оптимизации со сменой фазового пространства // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 3. С. 518–521.
8. *Sussmann H.J.* A Maximum Principle for Hybrid Optimal Control Problems // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix, 1999.
9. *Дмитрук А.В., Каганович А.М.* Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями // Нелинейная динамика и управление. Вып. 6. М.: Физматлит, 2008. С. 101–136.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
11. *Бортаковский А.С.* Синтез оптимальных систем управления со сменой моделей движения // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 4. С. 57–74.
12. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
13. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных систем. М.: Наука, 1973.
14. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Тр. МИАН. 2020. Т. 308. С. 88–100.
15. *Бортаковский А.С.* Необходимые условия оптимальности непрерывно-дискретных систем с мгновенными многократными переключениями дискретной части // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 4. С. 73–85.
16. *Величенко В.В.* Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 5. С. 1011–1913.
17. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967.
18. *Boltyanski V.G.* The Maximum Principle for Variable Structure Systems // Int. J. on Control. 2004. V. 77. № 17. P. 1445–1451.
19. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
20. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
21. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1973.
22. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
23. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.