

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.7

ОБ ИМПЛИКАЦИИ СВОЙСТВ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ: МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ УСЛОВИЙ ИМПЛИКАЦИИ И ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ

© 2020 г. С. Н. Васильев

ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

e-mail: vassilyev_sn@mail.ru

Поступила в редакцию 17.02.2020 г.

После доработки 25.02.2020 г.

Принята к публикации 30.03.2020 г.

Предложен метод получения условий следования тех или иных свойств математической модели одной системы из структурно близких в некотором смысле свойств модели другой системы, связанной с первой некоторыми межмодельными объектами связи. Метод применим к разным моделям и их свойствам. Не требуется априорного задания каких-либо из условий импликации свойств. Они формируются в ходе решения соответствующего логического уравнения с возможностью широкого варьирования выбора межмодельных объектов связи. Получаемые этим методом теоремы об импликации свойств обычно являются новыми или модификациями известных, а в других случаях — следствиями или обобщениями известных теорем. Применение метода детально проиллюстрировано на примерах с интерпретацией условий получаемых теорем.

DOI: 10.31857/S0002338820040149

Введение. Анализ свойств математических моделей систем, выявление аналогий и вообще каких-то связей между свойствами разных моделей, сведение анализа моделей к анализу более простых зачастую выполняются с привлечением тех или иных дополнительных объектов, связывающих эти модели, например, преобразований переменных одной модели в переменные другой. Эти и другие межмодельные объекты связи (МОС), будучи согласованы с собственными структурами исследуемых моделей, могут обеспечивать следование того или иного свойства P , изучаемого на предмет его наличия в одной модели $\mathcal{M}$, из факта наличия некоторого свойства P' в другой модели $\mathcal{M}'$, связанной с $\mathcal{M}$ этими МОС. Данная статья посвящена алгоритмизации формирования условий X , обеспечивающих эту импликацию свойств $P' \rightarrow P$ в терминах МОС и объектов самих моделей.

В литературе известны результаты об импликации свойств математических моделей, именуемые сохранением свойств; при этом определения свойств P' , P получаются одно из другого заменой объектов одной модели соответствующими объектами другой, но однотипной модели. Сами такие свойства будем тоже называть однотипными. Этот частный случай импликации свойств соответствует наличию прямой аналогии в свойствах P' , P рассматриваемой пары моделей. Например, известным условием сохранения так называемых позитивных свойств однотипных алгебраических систем является сюръективный гомоморфизм этих моделей [1, 2]. При этом направления действия гомоморфизма и сохранения этих свойств совпадают, а однотипность свойств состоит в том, что определения свойств P' и P записаны в одной сигнатуре, интерпретируемой объектами алгебраических систем $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}$ одного типа. Объектами каждой модели являются ее операции и отношения, а межмодельным объектом связи — упомянутый гомоморфизм.

В динамике систем для некоторого класса динамических свойств математических моделей, удовлетворяющих аксиоматике системы процессов, в [3, 4] был предложен метод гибкого формирования условий сохранения X по виду определения изучаемого свойства P . При этом в качестве одного из МОС выступало отображение из пространства позиций изучаемой системы процессов $\mathcal{M}$ в пространство состояний системы процессов $\mathcal{M}'$ и в дополнение к формируемому набору условий X априорно задавалось условие M как условие межмодельной связи. Оно означало

мажорирование значений этого отображения, названного вектор-функцией сравнения (ВФС), на процессах системы $\mathcal{M}$ состояниями соответствующих процессов системы $\mathcal{M}'$. Получаемые теоремы о сохранении (с условиями X , M) и сам метод стали именоваться теоремами и соответственно методом сравнения. Направления сохранения свойств и действия ВФС противоположны, а однотипность моделей $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}$ как наличие взаимного соответствия объектов этих моделей обусловлена подчиненностью объектов обеих моделей единой аксиоматике системы процессов. Класс свойств, охватываемых методом сравнения [3, 4], был ограничен некоторыми требованиями, одним из которых является требование согласованности условий M мажорирования ВФС с определениями свойств P и P' . В частности, порядки квантификации переменных P и P' должны соответствовать порядку квантификации переменных того же смысла в M .

Выход за рамки систем процессов и этого класса их свойств был достигнут рассмотрением задачи формирования условий импликации свойств как задачи построения содержательных решений логических уравнений $X \& M \rightarrow (P' \rightarrow P)$ [5, 6]. При этом известные члены уравнения M , P' , P записываются в языке L позитивно-образованных формул [5, 6], т.е. составленных из заключительных формул с помощью типовых кванторов [7] и бинарных логических связок $\&$, $\vee$ (упоминавшиеся позитивные свойства являются весьма частным случаем позитивно-образованных формул). Свойства P и P' не обязательно однотипные, но имеют одинаковую структуру. Под структурой позитивно-образованной формулы будем здесь и далее понимать древовидный граф ее строения, помеченный соответственно его структурным элементам: висячие вершины – номерами $i \in \overline{1, m}$ ($m \geq 1$), вершины ветвления – метками $\&$, $\vee$, а кванторные вершины – метками $\forall$, $\exists$. Если $Var(F)$ – множество обозначений всех кванторных переменных типовых кванторов в позитивно-образованной формуле F , то $Var(P) \cap Var(P') = \emptyset$. Формулы M , P' , P имели одинаковую степень m , т.е. образованы из одинакового количества m своих заключительных формул. Переменные одного смысла из M и P (соответственно из M и P') имеют одинаковые обозначения, т.е. $Var(M) \subseteq Var(P) \cup Var(P')$. При этом то или иное условие межмодельной связи M должно было задаваться априорно и быть согласованным с P и P' . В частности, из условий этой согласованности следует существование такого надграфа, в который изоморфно, с сохранением меток, можно вложить схемы формул M , P' , P , если под схемой понимать результат удаления из структуры формулы меток $\&$, $\vee$ и замены меток $\forall$, $\exists$ на обозначения соответствующих кванторных переменных. Этот надграф являлся начальной схемой решения X , подлежащего построению.

Необходимость задания условия межмодельной связи, отличного от условия мажорирования ВФС, может вызываться как переходом к другим моделям и их свойствам, так и желанием исследования задействовать МОС из некоторого конкретного класса объектов, отличных от ВФС. Но требование априорного указания отдельного условия межмодельной связи с обеспечением его согласованности с P и P' снижает алгоритмичность метода в целом и усложняет формирование как уравнения, так и искомого решения X .

Формирование условий сохранения свойств алгебраических систем по виду изучаемого свойства P без априорного задания условия межмодельной связи в случае многоосновных алгебраических систем было выполнено в [8]. Охватываемый при этом класс однотипных свойств ограничен тем, что в определениях свойств P и P' в качестве областей изменения кванторных переменных могут быть только множества, построенные над носителями системы $\mathcal{M}$ и соответственно $\mathcal{M}'$ как ступени в смысле Н. Бурбаки [7] или их некоторые обобщения.

В данной статье в развитие [9–11] предлагается метод построения содержательных решений логических уравнений $X \rightarrow (P' \rightarrow P)$ для произвольных математических моделей систем. При формировании уравнений не требуется его эвристическое наращивание дополнительными априорными посылками, согласованными с P и P' . Вместо этого в состав формируемого решения X встраиваются относительно простые и обычно бескванторные подформулы связи: условие каждого типового квантора существования (ТКС) решения X конъюнктивно наращивается подформулой, связывающей кванторную переменную этого ТКС с некоторыми из переменных, ранее квантифицированных в структуре X . Благодаря этому, упрощается варьирование задействованных МОС. Однотипностью свойств P и P' обеспечивается согласованность известных членов исходного логического уравнения, а в случае неоднотипности свойств P и P' структура свойств P' должна совпадать со структурой свойства P хотя бы частично, т.е. с точностью до замены некоторых меток $\exists$ или $\vee$ структуры свойства P на $\forall$ и $\&$ соответственно. В отличие от других известных работ по решению логических уравнений (например, [12, 13], спецификой рассматриваемого класса уравнений и правил его решения обеспечивается содержательность искомого решения уравнения.

Рассматриваются примеры, детально иллюстрирующие применение метода. Метод обеспечивает получение теорем, которые, как правило, являются новыми или модификациями известных, а в других случаях — следствиями или, наоборот, обобщениями известных. Сказанное относится, например, к теоремам о сохранении свойств алгебраических и динамических систем при морфизмах (в частности, типа теорем из [2, 7, 8]) и к теоремам сравнения в терминах ВФС и вектор-функций Ляпунова в динамике систем и в теории управления (например, типа теорем из [3–6, 11, 14, 15]).

1. Исходные определения. Используется язык L позитивно-образованных формул (ПОФ) в частично-формализованном варианте. В древовидном графе строения всякой ПОФ F висячими вершинами являются некоторые заключительные утверждения $F_i, i = \overline{1, m}$, а вершинами ветвления — бинарные логические связи $\ell_j \in \{(\& \text{ (“и”)}, \vee \text{ (“или”)})\} (j = \overline{1, m-1})$. Остальные вершины — это типовые кванторы (ТК) $w(z_\alpha)$ [7] (в частности, ограниченные). Эти ТК $w(z_\alpha) \in \{\hat{w}(z_\alpha), \check{w}(z_\alpha)\}$ являются либо ТК всеобщности (ТКВ) $\hat{w}(z_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \forall z_\alpha (W^{z_\alpha} \rightarrow _)$ (“для всякого значения переменной z_α , удовлетворяющего условию W^{z_α} , следует ...”), либо ТК существования (ТКС) $\check{w}(z_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \exists z_\alpha (W^{z_\alpha} \& _)$ (“существует такое значение переменной z_α , что выполняется условие W^{z_α} и ...”). Здесь z_α — кванторные переменные, $\alpha = 1, 2, \dots$, а условия W^{z_α} , ограничивающие область их допустимых значений, именуются типовыми условиями соответствующих переменных. Разумеется, что условия W^{z_α} могут зависеть не только от переменных z_α , но и других, а именно кванторных переменных, связанных в F типовыми кванторами, в области действия которых находится ТК $w(z_\alpha)$.

Выражения $R \in \{F_i, W^{z_\alpha}\}$ допускают любые вольности записи обычных математических текстов, но в их отношении предполагается известным, от каких кванторных переменных z_β кванторов $w(z_\beta)$ (включая $w(z_\alpha)$) они зависят. Число m называется степенью формулы.

П р и м е р 1. Пусть модель $\mathfrak{M}$ суть кортеж $(A, B, f, \leq)$ с функцией $f: A \rightarrow B$, где множество B частично упорядочено отношением $\leq$. Свойство P ограниченности сверху функции f в языке L запишется как свойство степени 1:

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \check{w}(x) \hat{w}(y) \check{w}(z) F_1 \stackrel{\text{def}}{=} \exists x (x \in B \& \forall y (y \in A \rightarrow \exists z (z = f(y) \& z \leq x))),$$

где $F_1 \stackrel{\text{def}}{=} z \leq x$, или в метаязыке:

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \exists x \in B \quad \forall y \in A \quad \exists z = f(y) \quad z \leq x. \quad (1.1)$$

П р и м е р 2. Пусть $\mathfrak{M}$ — обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, u(t, x)), \quad x \in R^r, t \in R^1, \quad u: \Omega \rightarrow R^p, \quad u \in \mathcal{U}, \\ f &: \Omega \times R^p \rightarrow R^r, \quad \Omega \subseteq R^1 \times R^r, \end{aligned} \quad (1.2)$$

f удовлетворяет некоторым условиям существования классических решений x при некоторых $u \in \mathcal{U}$ и начальных данных $(t_0, x_0) \in \Omega, x(t_0) = x_0$ ($u(t, x)$ — функциональный параметр из семейства функций $\mathcal{U}$, например, управление). Через $\mathcal{X}(t_0, x_0, u(t, x))$ обозначим множество всех решений $x(\cdot, t_0, x_0, u)$ уравнения (1.2) при фиксированных (t_0, x_0, u) . Пусть также $S(u) = \{(t_0, x_0) \in \Omega : \mathcal{X}(t_0, x_0, u) \neq \emptyset\}$.

Пусть $A \subset R^r$ — подмножество состояний системы (1.2), интересующее нас с точки зрения динамического свойства P типа инвариантности множества A относительно решений ОДУ (1.2):

$$\begin{aligned} P \stackrel{\text{def}}{=} \exists u \in \mathcal{U} [& (\forall t_0 \in R^1, x_0 \in A_0, x \in \mathcal{X}(t_0, x_0, u), t \geq t_0, x = x(t) \quad x \in A) \& \\ & \& (\exists t_0 \in T_0 \quad \forall x_0 \in A, x \in \mathcal{X}(t_0, x_0, u), t \geq t_0, x = x(t) \quad x \in A) \& \\ & \& (\forall t_0 \in T_0, x_0 \in A, x \in \mathcal{X}(t_0, x_0, u), t_1 \geq t_0 \quad \exists t \geq t_1, x = x(t) \quad x \in A)], \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $A_0 \subseteq A, R^1 \times A \subseteq \Omega, T_0 \subseteq R^1$. Это свойство означает существование такого $u \in \mathcal{U}$, что:

а) решения $x(\cdot, t_0, x_0, u)$ с любыми начальными данными из $R^1 \times A_0$ остаются в A ,

б) существует такой начальный момент времени t_0 из T_0 , при котором решения также остаются в A для любых начальных состояний из A ,

в) решения $x(\cdot, t_0, x_0, u)$ при $(t_0, x_0) \in T_0 \times A$, по крайней мере, “посещают” множество A в сколь угодно далекие моменты времени.

Назовем свойство (1.3) “инвариантностью с посещением”. Иначе говоря, свойство (1.3) состоит в том, что имеет место обычное свойство (A_0, A) -оценки (оценки множеством A решений ОДУ (1.2) с начальными состояниями $x_0 \in A_0$) в сочетании со свойствами слабой (A, A) -оценки (т.е. при некотором $t_0 \in T_0$) и посещения множества A из $T_0 \times A$ в сколь угодно далекие моменты времени. Ясно, что при $A_0 = A$ из а) следуют б) и в).

Степень m свойства (1.3) равна 3. Его определение записано в метаязыке, но оно (как и (1.1)) будет рассматриваться как формула языка L :

$$\begin{aligned} & \check{w}(u)[(\hat{w}(t_0 1) \hat{w}(x_0 1) \hat{w}(x 1) \hat{w}(t 1) \hat{w}(x 1) F_1) \& \\ & \& (\check{w}(t_0 2) \hat{w}(x_0 2) \hat{w}(x 2) \hat{w}(t 2) \hat{w}(x 2) F_2) \& \\ & \& (\hat{w}(t_0 3) \hat{w}(x_0 3) \hat{w}(x 3) \hat{w}(t 3) \check{w}(x 3) F_3)], \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $w(z_\alpha i)$ понимается как ТК $w(z_\alpha)$ из i -ветви формулы P , $i = \overline{1, 3}$.

Далее под структурными элементами (или просто элементами) ПОФ F понимаются ее части F_i , ТК $w(z_\alpha)$ и связи ℓ_j , а под структурой — граф ее строения с метками вершин $i = \overline{1, m}$, $\forall$, $\exists$, $\&$, $\vee$. Будем говорить, что структура ПОФ F частично повторяет структуру ПОФ G , если структура F получается из структуры G заменой некоторых меток $\exists$ и/или $\vee$ на метки $\forall$ и $\&$ соответственно. Будем предполагать, что F не содержит переменных, одновременно связанных кванторами и свободных (т.е. не связанных кванторами), и что кванторные переменные всех ТК попарно различны, хотя в примерах переменные близкого смысла могут обозначаться одинаково, если контекст или используемые приемы исключают возможные коллизии.

Позитивность структуры ПОФ F обеспечивает применимость к ним дополнительных логических правил обработки, неприменимых, например, к произвольным формулам первопорядковой логики.

В языке L заключительные формулы F_i и формулы $\tilde{F}$, возникающие в процессе образования F из F_i , называем главными подформулами (ГП) из F и обозначаем $\tilde{F} \sqsubseteq F$. Если $\tilde{F}$ и $w(z_\alpha)\tilde{F}$ — ГП из F и в $\tilde{F}$ отсутствуют вхождения z_α , то ТК $w(z_\alpha)$ называем независимым в F (ТКН). Из двух элементов ветви структуры формулы F называем старшим более близкий к корню и, если $w(z_\beta)$ старше, чем $w(z_\alpha)$, то говорим, что переменная z_β старше, чем z_α .

2. Метод получения условий импликации свойств математических моделей. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ — пара произвольных математических моделей, а P и P' — определения их некоторых свойств соответственно, причем структуры свойств P и P' одинаковые (хотя при этом свойства P и P' могут быть неоднотипными) или структура P' лишь частично совпадает со структурой P (см. Введение). Рассматриваются логические уравнения

$$X \rightarrow (P' \rightarrow P), \quad (2.1)$$

где X — неизвестный набор нетривиальных условий импликации свойств, подлежащий формированию по виду свойств P, P' .

Условимся кванторные переменные z_α формулы F в случае P (соответственно P') обозначать через y_α (соответственно y'_α), а заключительные формулы — через P_i (соответственно P'_i), $i = \overline{1, m}$. ТКС и связи $\vee$, входящие в P и отвечающие заменяемым меткам при переходе к структуре P' , будем называть особыми в отличие от остальных — неособых.

Для каждой пары (y_α, y'_α) кванторных переменных из P и P' введем в рассмотрение формулу связи Φ^{y_α} как пока неопределенную формулу, которая может содержать, помимо (y_α, y'_α) , также старшие переменные. Для некоторых пар (y_α, y'_α) эти формулы могут быть тождественно-истинными предикатами, т.е. отсутствовать. При конкретизации формул Φ^{y_α} в них могут входить

вспомогательные объекты, в конечном счете подчиняемые формируемым условиям X и тем самым ответственные за импликацию изучаемых свойств. Такими объектами могут быть, например, координатные преобразования, преобразования шкалы времени и прочие (не обязательно функциональные) отношения связи на декартовых произведениях множеств допустимых значений кванторных переменных из числа y_α , y'_α и более старших переменных.

Процесс формирования условий импликации X состоит в применении описываемых далее правил I–IV.

П р а в и л о I (переработка ТК). Определение свойства P перерабатывается в формулу D^I заменой каждого ТКВ $\hat{w}(y_\alpha)$ на пару

$$\hat{w}(y_\alpha) \check{w}^*(y'_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \forall y_\alpha (W^{y_\alpha} \rightarrow \exists y'_\alpha (W^{y'_\alpha} \& \Phi^{y_\alpha} \& _)),$$

каждого неособого ТКС $\check{w}(y_\alpha)$ – на пару

$$\hat{w}(y'_\alpha) \check{w}^*(y_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \forall y'_\alpha (W^{y'_\alpha} \rightarrow \exists y_\alpha (W^{y_\alpha} \& \Phi^{y_\alpha} \& _)),$$

и каждого особого ТКС $\check{w}(y_\alpha)$ – на пару

$$\check{w}(y'_\alpha) \check{w}^*(y_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \exists y'_\alpha (W^{y'_\alpha} \& \exists y_\alpha (W^{y_\alpha} \& \Phi^{y_\alpha} \& _)).$$

Деление структурных связок $\vee$ в P на неособые и особые переносится с формулы P на построенную на ее базе формулу D^I .

П р а в и л о II (переработка структурных логических связок и заключительных формул). Формула D^I перерабатывается в D^{II} заменой всех неособых структурных связок $\vee$ на $\&$ и всех формул P_i на $D_i^{II} = (P'_i \rightarrow P_i)$. Особые структурные связки $\vee$ остаются без изменения.

П р и м е р 1а (продолжение примера 1). Пусть модель $\mathcal{M}' = (A', B', f', \leq')$ однотипна модели $\mathcal{M} = (A, B, f, \leq)$ и ее свойство P' аналогично свойству P :

$$P' \stackrel{\text{def}}{=} \exists x' \in B' \forall y' \in A' \exists z' = f'(y') z' \leq' x'. \quad (2.2)$$

По правилам I и II получим

$$\begin{aligned} D^{II} &= \forall x' \in B' \exists x \in B : \Phi^x \forall y \in A \exists y' \in A' : \Phi^y \\ &\quad \forall z' = f'(y') \exists z = f(y) : \Phi^z (z' \leq' x' \rightarrow z \leq x). \end{aligned} \quad (2.3)$$

П р и м е р 2а (продолжение примера 2). Пусть $\mathcal{M}'$ – ОДУ:

$$\frac{dx'}{dt} = g(t, x', u'(t, x')), \quad x' \in R^s, \quad t \in R^1, \quad u' : \Omega' \rightarrow R^q, \quad u' \in \mathcal{U}', \quad \Omega' \subseteq R^1 \times R^s, \quad (2.4)$$

где $g : \Omega' \times R^q \rightarrow R^s$ удовлетворяет условиям существования классических решений $x' \in \mathcal{X}'(\cdot, t'_0, x'_0, u')$ для некоторых $u' \in \mathcal{U}'$ и начальных данных $(t'_0, x'_0) \in \Omega'$, $x'(t'_0) = x'_0$. Пусть $S'(u') = \{(t'_0, x'_0) \in \Omega' : \mathcal{X}'(\cdot, t'_0, x'_0, u') \neq \emptyset\}$.

Введем свойство P' решений уравнения (2.4) относительно некоторых множеств $A'_0, A', A'_0 \subseteq A', R^1 \times A' \subseteq \Omega'$ и $T'_0 \subseteq R^1$, аналогичное свойству P вида (1.3) для ОДУ (1.2):

$$\begin{aligned} P' &\stackrel{\text{def}}{=} \exists u' \in \mathcal{U}' [(\forall t'_0 \in R^1, x'_0 \in A'_0, x' \in \mathcal{X}'(t'_0, x'_0), t' \geq t'_0, x' = x'(t') \ x' \in A') \& \\ &\quad \& (\exists t'_0 \in T'_0 \forall x'_0 \in A', x' \in \mathcal{X}'(t'_0, x'_0), t' \geq t'_0, x' = x'(t') \ x' \in A') \& \\ &\quad \& (\forall t'_0 \in T'_0, x'_0 \in A', x' \in \mathcal{X}'(t'_0, x'_0), t'_1 \geq t'_0 \exists t' \geq t'_1, x' = x'(t') \ x' \in A')]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

По правилам I и II получим

$$\begin{aligned} D^{II} &= \forall u' \in \mathcal{U}' \exists u \in \mathcal{U} : \Phi^u [(\forall t_0 \in R^1 \exists t'_0 \in R^1 : \Phi^{t'_0} \forall x_0 \in A_0 \exists x'_0 \in A'_0 : \Phi^{x'_0})] \\ &\quad \forall x \in \mathcal{X}(t_0, x_0, u) \exists x' \in \mathcal{X}'(t'_0, x'_0, u') : \Phi^{x'} \forall t \geq t_0 \exists t' \geq t'_0 : \Phi^{t'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \forall \mathbf{x} = x(t) \exists \mathbf{x}' = x'(t') : \Phi^{x_1} (\mathbf{x}' \in A' \rightarrow \mathbf{x} \in A) \& \\
& \& (\forall t'_0 \in T'_0 \exists t_0 \in T_0 : \Phi^{t_0^2} \forall \mathbf{x}_0 \in A \exists \mathbf{x}'_0 \in A' : \Phi^{x_0^2} \\
& \forall x \in \mathcal{X}(t_0, \mathbf{x}_0, u) \exists x' \in \mathcal{X}'(t'_0, \mathbf{x}'_0, u') : \Phi^{x_2} \forall t \geq t_0 \exists t' \geq t'_0 : \Phi^{t_2} \\
& \forall \mathbf{x} = x(t) \exists \mathbf{x}' = x'(t') : \Phi^{x_2} (\mathbf{x}' \in A' \rightarrow \mathbf{x} \in A) \& \\
& \& (\forall t'_0 \in T'_0 \exists t_0 \in T_0 : \Phi^{t_0^3} \forall \mathbf{x}_0 \in A \exists \mathbf{x}'_0 \in A' : \Phi^{x_0^3} \\
& \forall x \in \mathcal{X}(t_0, \mathbf{x}_0, u) \exists x' \in \mathcal{X}'(t'_0, \mathbf{x}'_0, u') : \Phi^{x_3} \forall t_1 \geq t_0 \exists t'_1 \geq t'_0 : \Phi^{t_1^3} \\
& \forall t' \geq t'_1 \exists t \geq t_1 : \Phi^{t_1^3} \forall \mathbf{x}' = x'(t') \exists \mathbf{x} = x(t) : \Phi^{x_3} (\mathbf{x}' \in A' \rightarrow \mathbf{x} \in A))].
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Л е м м а 1. $D^{II} \rightarrow (P' \rightarrow P)$.

До к а з а т е л ь с т в о. Пусть свойства P и P' имеют одинаковую структуру. Если $P = P_1$, то доказываемое является тавтологией вида $(P'_1 \rightarrow P_1) \rightarrow (P'_1 \rightarrow P_1)$. Пусть $Q \sqsubseteq P$ и для собственных ГП из Q лемма справедлива (индуктивное предположение), а для самой Q ее надо доказать. Тогда имеет место один из четырех случаев: а) $Q = \hat{w}(y_\alpha)\tilde{P}$, б) $Q = \check{w}(y_\alpha)\tilde{P}$, в) $Q = \tilde{P} \vee \tilde{\tilde{P}}$, г) $Q = \tilde{P} \& \tilde{\tilde{P}}$.

В случае (а) формуле Q в P' отвечает $Q' = \hat{w}(y'_\alpha)P'$, а в D^{II} после шагов I, II применения соответствующих правил переработки Q будет соответствовать формула

$$D^{II}(Q) = \hat{w}(y_\alpha)\check{w}^*(y'_\alpha)D^{II}(\tilde{P}). \tag{2.7}$$

Надо доказать, что $D^{II}(Q) \rightarrow (\hat{w}(y'_\alpha)\tilde{P}' \rightarrow \hat{w}(y_\alpha)\tilde{P})$. Пусть справедливы $D^{II}(Q)$ и $\hat{w}(y'_\alpha)\tilde{P}'$, а y_α — произвольное, подчиненное условию W^{y_α} . Надо доказать, что верно $\tilde{P}$. В силу (2.7) существует такое y'_α , что имеют место $W^{y'_\alpha}$, $\Phi^{y'_\alpha}$ и $D^{II}(\tilde{P})$. Так как при этом y'_α верно $\tilde{P}'$, то по предположению из $D^{II}(\tilde{P})$ и $\tilde{P}'$ следует $\tilde{P}$, что и требовалось доказать в случае а). Случай б) доказывается аналогично случаю а).

В случае в)

$$D^{II}(\tilde{P} \vee \tilde{\tilde{P}}) = D^{II}(\tilde{P}) \& D^{II}(\tilde{\tilde{P}}) \tag{2.8}$$

и, если справедливо $\tilde{P}'$ или $\tilde{\tilde{P}}'$, то в силу (2.8) и индуктивного предположения верно $\tilde{P}$ или соответственно $\tilde{\tilde{P}}$, что и требовалось доказать. Случай (г) доказывается аналогично случаю в).

Если структура свойства P' лишь частично совпадает со структурой свойства P , то при тех же четырех случаях а)–г), разобранных выше при доказательстве индуктивного шага, доказательство случаев а) и г) не изменится. В случаях б) (соответственно в)) с особыми структурными элементами $\exists$ (соответственно $\vee$) в определении свойства P каждому особому ТКС $\check{w}(y_\alpha)$ (соответственно каждой особой логической связке $\vee$) из P в P' отвечает ТКВ $\hat{w}(y'_\alpha)$ (соответственно логическая связка $\&$), а в D^{II} — пара ТК $\check{w}(y'_\alpha)\check{w}^*(y_\alpha)$ (соответственно логическая связка $\vee$). Таким образом, инверсии в P' некоторых структурных элементов из P соответствует обратная инверсия в D^{II} . Поэтому доказательство леммы в случае частичной одинаковости структур свойств P и P' аналогично вышеприведенному доказательству для структурно одинаковых P и P' .

П р а в и л о III (расщепление по ТКС). Рассмотрим случай одинаковости структур свойств P и P' . Расщепление осуществляется в порядке перехода в D^{II} от ТКС по старшим переменным к ТКС по младшим. Этот шаг может не выполняться для ТКС с тождественно-истинными формулами связи Φ^{y_α} .

В формуле D^{II} через u_{α_1} обозначим ту из переменных y_{α_1} , y'_{α_1} , которая является кванторной переменной квантора $\check{w}^*(u_{\alpha_1}) \in \{\check{w}^*(y_{\alpha_1}), \check{w}^*(y'_{\alpha_1})\}$. На базе D^{II} расщепление по первому ТКС $\check{w}^*(u_{\alpha_1})$ приводит к формулам

$$\begin{aligned}
D^{u_{\alpha_1}} &= D^{II}[\check{w}^*(u_{\alpha_1})], \\
\tilde{D}^{u_{\alpha_1}} &= D^{II}(\hat{w}^*(u_{\alpha_1})/\check{w}^*(u_{\alpha_1}); \hat{w}(u_{\beta})/\check{w}(u_{\beta}), \text{ если } \check{w}(u_{\beta}) \in D^{u_{\alpha_1}}).
\end{aligned}$$

Здесь условие $D^{II}[\check{w}^*(u_{\alpha_1})]$ формируется вначале как последовательность $v_1 \dots v_n \check{w}^*(u_{\alpha_1})$ ($n \geq 1$) ТК из D^{II} , в области действия которых находится $\check{w}^*(u_{\alpha_1})$, и самого этого квантора, выписываемая в порядке от старших ТК к младшим. Затем из префикса $v_1 \dots v_n$ вычеркиваются все ТКН и получается формула $D^{u_{\alpha_1}} = \check{v}_1 \dots \check{v}_{n_1} \check{w}^*(u_{\alpha_1})$, $n_1 \leq n$. Через $\tilde{D}^{u_{\alpha_1}}$ обозначен результат инверсии в D^{II} ТКС, входящих в $D^{u_{\alpha_1}}$, в соответствующие ТКВ. Заметим, что те ТКС, которые входили в префикс $v_1 \dots v_n$ как независимые и не вошли в $D^{u_{\alpha_1}}$, войдут в $\tilde{D}^{u_{\alpha_1}}$ без инверсии. Через S_1/S_2 здесь и далее обозначается подстановка выражения S_1 вместо S_2 .

Далее в $\tilde{D}^{u_{\alpha_1}}$ ищется очередной старший ТКС $\check{w}^*(u_{\alpha_2})$, с которым аналогично предыдущему осуществляется построение $D^{u_{\alpha_2}} = \tilde{D}^{u_{\alpha_1}}[\check{w}^*(u_{\alpha_2})]$ и $\tilde{D}^{u_{\alpha_2}} = \tilde{D}^{u_{\alpha_1}}(\hat{w}^*(u_{\alpha_2})/\check{w}^*(u_{\alpha_2}); \hat{w}(u_{\beta})/\check{w}(u_{\beta}))$, если $\check{w}(u_{\beta}) \in D^{u_{\alpha_2}}$, и т.д., в результате чего будет получен набор формул $D^{III} \stackrel{\text{def}}{=} \&_{i=1}^k D^{u_{\alpha_i}} \& \tilde{D}^{u_{\alpha_k}}$.

Если структура свойства P' лишь частично совпадает со структурой свойства P , то при расщеплении по особым ТКС кванторы $\check{w}^*(y_{\alpha})$ рассматриваются в парах $\check{w}(y'_{\alpha})\check{w}^*(y_{\alpha})$, а шаги расщепления аналогичны вышеописанным.

Лемма 2. $D^{III} \rightarrow D^{II}$.

Доказательство. Пусть структуры свойств P и P' одинаковы. Убедимся сначала, что $D^{u_{\alpha_1}} \& \tilde{D}^{u_{\alpha_1}} \rightarrow D^{II}$. Восстановим в условии $D^{u_{\alpha_1}}$ все ТКН, вычеркнутые при его построении, но при этом те восстанавливаемые ТКН v_i , $i = \overline{1, n}$, которые являлись кванторами существования и без инверсии вошли в $\tilde{D}^{u_{\alpha_1}}$, инвертируем в ТКВ. Получим некоторое условие $D_+^{u_{\alpha_1}} = \check{v}_1 \dots \check{v}_n \check{w}^*(u_{\alpha_1})$.

Индукцией по структуре формулы $D_+^{u_{\alpha_1}}$ нетрудно убедиться в том, что $D^{u_{\alpha_1}} \rightarrow D_+^{u_{\alpha_1}}$. Пусть ГП G из $D_+^{u_{\alpha_1}}$ в $D^{u_{\alpha_1}}$ соответствует ГП $\bar{G}$ и для всех ГП G_1 из G и соответствующих ГП $\bar{G}_1$ из $\bar{G}$ справедливо $\bar{G}_1 \rightarrow G_1$. Это заведомо так в простейшем случае, когда $\bar{G} = G = \check{w}^*(u_{\alpha_1})$. Если $H = \check{v}_i G \sqsubseteq D_+^{u_{\alpha_1}}$, то этой ГП в $D^{u_{\alpha_1}}$ по построению будет соответствовать ГП $\bar{H}$ вида либо а) $\check{v}_i \bar{G}$, либо б) $\bar{G}$. Поскольку $\bar{G} \rightarrow G$, то $\check{v}_i \bar{G} \rightarrow \check{v}_i G$, т.е. в случае а) $\bar{H} \rightarrow H$. В случае б) $\check{v}_i$ — независимый ТКВ $\hat{v}_i$ и поэтому $G \rightarrow \hat{v}_i G$. Поскольку $\bar{G} \rightarrow G$, снова получаем, что $\bar{H} \rightarrow H$. Это завершает обоснование индуктивного перехода. Поэтому с учетом простейшего случая получаем, что $D^{u_{\alpha_1}} \rightarrow D_+^{u_{\alpha_1}}$.

Докажем теперь, что $D_+^{u_{\alpha_1}} \& \tilde{D}^{u_{\alpha_1}} \rightarrow D^{II}$.

Линейные участки формулы $\tilde{D}^{u_{\alpha_1}}$ отличаются от соответствующих линейных участков структуры формулы $D_+^{u_{\alpha_1}}$ только инверсией некоторых ТКС: если в один из них входит ТКС, то в другой — его инверсия, причем места вхождения ТК существования соответствуют их местам в структуре исходной формулы D^{II} , а местам вхождения в D^{II} ТК всеобщности в обеих формулах $D_+^{u_{\alpha_1}}$ и $\tilde{D}^{u_{\alpha_1}}$ одновременно соответствуют ТКВ.

Пусть A, B, C — соответствующие друг другу ГП из $D_+^{u_{\alpha_1}}$ True, $\tilde{D}^{u_{\alpha_1}}$ и D^{II} , имеющие вид $\check{w}^*(u_{\alpha_1})$ True, $\hat{w}^*(u_{\alpha_1})G$, $\check{w}^*(u_{\alpha_1})G$, где G — область действия кванторов по переменной u_{α_1} в B и C . Очевидно, что $A \& B \rightarrow C$ (база индуктивного доказательства по сложности структуры формулы D^{II}).

Предположим теперь, что A, B, C — произвольные, но соответствующие друг другу ГП из тех же формул, причем в силу индуктивного предположения верно, что $A \& B \rightarrow C$.

Пусть A_1, B_1, C_1 — такие соответствующие друг другу ГП из той же тройки формул, что $A \sqsubseteq A_1$, $B \sqsubseteq B_1$, $C \sqsubseteq C_1$ и при этом C_1 — минимальная ГП из D^{II} . Тогда а) $C_1 = v_1 C \sqsubseteq D^{II}$ или б) $C_1 = C \& \bar{C} \sqsubseteq D^{II}$ (заметим, что именно в случае б) $A = A_1$). Если $C_1 = v_1 C$, то $A_1 = v_2 A \sqsubseteq D_+^{u_{\alpha_1}}$, $B_1 = v_3 B \sqsubseteq \tilde{D}^{u_{\alpha_1}}$ и в случае а) возможны только следующие сочетания ТК: $v_1, v_2, v_3 : (v_1, v_2, v_3) \in \{(\hat{v}, \hat{v}, \hat{v}), (\hat{v}, \check{v}, \check{v}), (\check{v}, \hat{v}, \check{v})\}$. Отсюда с учетом того, что $A \& B \rightarrow C$, верно, что $A_1 \& B_1 \rightarrow C_1$. В случае б) $C_1 = C \& \bar{C}$, $A_1 = A$, $B_1 = B \& \bar{C}$ и поэтому снова $A_1 \& B_1 \rightarrow C_1$, что завершает обоснование справедливости ин-

дуктивного перехода, а с учетом предыдущего и доказательства леммы при одинаковости структур свойств P и P' .

В случае лишь частичной одинаковости структур свойств P и P' и расщепления по особым ТКС обоснование правила III аналогично.

Пример 16. По правилу III в применении к (1.1) расщеплением условия (2.3) по ТКС $\exists x \in B : \Phi^x$ получим два условия:

$$D^x = D^{II}[\check{w}^*(x)] = D^{II}[\exists x \in B : \Phi^x] = \forall x' \in B' \exists x \in B : \Phi^x;$$

$$\tilde{D}^x = D^{II}(\forall x / \exists x)$$

(использованная здесь подстановка понимается как инверсия ТКС $\check{w}^*(x)$).

Расщеплением $\tilde{D}^x$ по ТКС $\exists y' \in A' : \Phi^y$ получим:

$$D^{y'} = \tilde{D}[\check{w}^*(y')] = \tilde{D}[\exists y' \in A' : \Phi^y] = \forall x' \in B, \quad x \in B : \Phi^x, \quad y \in A \exists y' \in A' : \Phi^y$$

(здесь и далее запись блока одноименных ТКВ $\forall y_{\alpha_1} : W^{y_{\alpha_1}} \forall y_{\alpha_2} : W^{y_{\alpha_2}} \dots \forall y_{\alpha_n} : W^{y_{\alpha_n}}$ сокращаем до $\forall y_{\alpha_1} : W^{y_{\alpha_1}}, y_{\alpha_2} : W^{y_{\alpha_2}}, \dots, y_{\alpha_n} : W^{y_{\alpha_n}}$; аналогично далее для ТКС);

$$\tilde{D}^{y'} = \tilde{D}^x(\forall y' / \exists y').$$

При расщеплении $\tilde{D}^{y'}$ по ТКС $\check{w}^*(z)$ получаются условия

$$D^z = \tilde{D}^{y'}[\check{w}^*(z)] = \tilde{D}^{y'}[\exists z = f(y) : \Phi^z] = \forall x' \in B', \quad x \in B : \Phi^x, \quad y \in A,$$

$$y' \in A' : \Phi^y, \quad z' = f'(y') \exists z = f(y) : \Phi^z,$$

$$\tilde{D}^z = \tilde{D}^{y'}(\forall z / \exists z) = \forall x' \in B', \quad x \in B : \Phi^x, \quad y \in A, \quad y' \in A' : \Phi^y, \quad z' = f'(y'),$$

$$z = f(y) : \Phi^z \quad (z' \leq x' \rightarrow z \leq x).$$

Набор условий D^{III} будет иметь вид

$$D^{III} = D^x \& D^{y'} \& D^z \& \tilde{D}^z. \quad (2.9)$$

По леммам 1 и 2 из (2.9) следует, что (2.2) $\rightarrow$ (1.1).

Пример 26. Применим правило III к (2.6). Как и в разд. 1 (см. 1.4)) при возможной одинаковости обозначений некоторых кванторных переменных в P (что возможно лишь в случае непересекающихся областей действия их типовых кванторов) условимся, рассматривая ТКС $\check{w}^*(u_\alpha)$ ($u_\alpha \in \{y_\alpha, y'_\alpha\}$), для различения формулируемых условий обозначать их $D^{u_\alpha i}$, $\tilde{D}^{u_\alpha i}$. Здесь i – номер ветви, в которой находится рассматриваемый ТКС $\check{w}^*(u_\alpha)$, $i = \overline{1, m}$ (m – степень свойства P). При этом сам ТКС, а также его типовое условие W^{u_α} будем обозначать тоже с указанием этого номера: $\check{w}^*(u_\alpha i)$, $W^{u_\alpha i}$.

В соответствии с ранее сказанным о том, что некоторые формулы связи Φ^{y_α} могут быть тождественно-истинными (иначе говоря, отсутствовать), выберем $\Phi^{xi} = \overline{True}$, $i = \overline{1, 3}$, для сохранения возможности использования ТКС по x' в других условиях из D^{III} .

По правилу III на базе D^{II} вида (2.6) расщеплением D^{II} по ТКС $\exists u \in \mathcal{U} : \Phi^u$ формируются два условия:

$$D^u = D^{II}[\check{w}^*(u)] = D^{II}[\exists u \in \mathcal{U} : \Phi^u] = \forall u' \in \mathcal{U}' \exists u \in \mathcal{U} : \Phi^u;$$

$$\tilde{D}^u = D^{II}(\forall u / \exists u).$$

Аналогично расщеплением $\tilde{D}^u$ по ТКС $\exists t'_0 \in R^1 : \Phi^{t'_0 1}$ формируются два условия:

$$\tilde{D}^{t'_0 1} = \tilde{D}^u[\check{w}^*(t'_0 1)] = \tilde{D}^u[\exists t'_0 \in R^1 : \Phi^{t'_0 1}] = \forall u' \in \mathcal{U}' \forall u \in \mathcal{U} : \Phi^u \quad \forall t'_0 \in R^1 \exists t'_0 \in R^1 : \Phi^{t'_0 1};$$

$$\tilde{D}^{t_0^1} \Leftrightarrow \tilde{D}''(\forall t_0' / \exists t_0').$$

Расщеплением $\tilde{D}^{t_0^1}$ по ТКС $\exists x_0' \in A_0' : \Phi^{x_0^1}$ формируются

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{x_0^1} &= \tilde{D}^{t_0^1}[\tilde{w}^*(x_0^1)] = \forall u' \in \mathcal{U}', \quad u \in \mathcal{U} : \Phi^u, \quad t_0 \in R^1, \quad t_0' \in R^1 : \Phi^{t_0^1}, \\ x_0 &\in A_0 \exists x_0' \in A_0' : \Phi^{x_0^1}; \\ \tilde{D}^{x_0^1} &\Leftrightarrow \tilde{D}^{t_0^1}(\forall x_0' / \exists x_0'). \end{aligned}$$

Расщеплением $\tilde{D}^{x_0^1}$ по ТКС $\exists t' \geq t_0' : \Phi^{t'}$ формируются

$$\begin{aligned} D^{t'1} &\Leftrightarrow \tilde{D}^{x_0^1}[\tilde{w}^*(t'1)] = \forall u', u, t_0, t_0', x_0, x_0', x \exists x' \forall t \exists t' \geq t_0' : \Phi^{t'1}; \\ \tilde{D}^{t'1} &\Leftrightarrow \tilde{D}^{x_0^1}(\forall x' / \exists x', \forall t' / \exists t'). \end{aligned}$$

Здесь и далее для краткости некоторые типовые условия W^{u_α} при $\forall u_\alpha, \exists u_\alpha$ не выписываются, если их вид ясен из контекста. Так в формуле $D^{t'1}$ вид этих условий для всех $u_\alpha \in \{u', u, t_0, t_0', x_0, x_0', x, x', t\}$ представлен в первой ветви из (2.6). Продолжение расщепления приводит к следующим условиям:

$$\begin{aligned} D^{x^1} &= \forall u', u, t_0, t_0', x_0, x_0', x, x', t, t', x \exists x' = x'(t') : \Phi^{x^1}; \\ D^{t_0^2} &= \forall u', u, t_0' \in T_0' \exists t_0 \in T_0 : \Phi^{t_0^2}; \\ D^{x_0^2} &= \forall u', u, t_0', t_0, x_0 \in A \exists x_0' \in A' : \Phi^{x_0^2}; \\ D^{t'2} &= \forall u', u, t_0', t_0, x_0, x_0', x \exists x' \forall t \geq t_0 \exists t' \geq t_0' : \Phi^{t'2}; \\ D^{x^2} &= \forall u', u, t_0', \dots, x, x', t, t', x = x(t) \exists x' = x'(t') : \Phi^{x^2} \end{aligned}$$

(здесь и далее не выписанные для краткости ТК легко восстановить из предыдущего);

$$\begin{aligned} D^{t_0^3} &= \forall u', u, t_0 \in T_0 \exists t_0' \in T_0' : \Phi^{t_0^3}; \\ D^{x_0^3} &= \forall u', u, t_0, t_0', x_0 \exists x_0' \in A : \Phi^{x_0^3}; \\ D^{t_1^3} &= \forall u', u, t_0, \dots, x \exists x' \forall t_1 \exists t_1' \geq t_0' : \Phi^{t_1^3}; \\ D^{t^3} &= \forall u', u, t_0, \dots, x', t_1, t_1', t' \exists t \geq t_1 : \Phi^{t^3}; \\ D^{x^3} &= \forall u', u, t_0, \dots, t, x' \exists x = x(t) : \Phi^{x^3}; \\ \tilde{D}^{x^3} &= \forall u, u'[(\forall t_0, \dots, x' (x' \in A' \rightarrow x \in A)) \& \\ &\& (\forall t_0', \dots, x' (x' \in A' \rightarrow x \in A)) \& (\forall t_0, \dots, x (x' \in A' \rightarrow x \in A))]. \end{aligned}$$

В результате получится условие

$$\begin{aligned} D^{III} &= D'' \& D^{t_0^1} \& D^{x_0^1} \& D^{t'1} \& D^{x^1} \& D^{t_0^2} \& D^{x_0^2} \& D^{t'2} \& D^{x^2} \& \\ &\& D^{t_0^3} \& D^{x_0^3} \& D^{t_1^3} \& D^{t^3} \& D^{x^3} \& \tilde{D}^{x^3}, \end{aligned}$$

при выполнении которого по леммам 1 и 2 из (2.5) следует (1.3).

П р а в и л о IV (упрощение условий леммы 2). Это упрощение обеспечивается, во-первых, путем полной или частичной конкретизации выбора формул связи Φ^{y_α} , а во-вторых, — путем сокращения наборов свободных переменных в некоторых условиях W^{y_α} и $W^{y_\alpha'}$ типовых кванторов.

Конкретизация состоит в ограничении наборов свободных переменных, входящих в формулу связи. Это сужает классы формул связи, возможных для использования в синтезируемом усло-

вии X , т.е. сужает допустимые к применению МОС. Удаление части свободных переменных из формул связи, как правило, приводит к появлению независимых ТКВ в условиях $D^{III} \stackrel{\text{def}}{=} \&_{i=1}^k D^{u_{\alpha_i}} \& \tilde{D}^{u_{\alpha_k}}$, а удаление этих ТК из D^{III} приводит к более простым достаточным условиям $D_*^{u_{\alpha_i}}, \tilde{D}_*^{u_{\alpha_k}}, i = \overline{1, k}$. Далее $\Phi^{y_{\alpha}}(y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_l})$ обозначает тот факт, что в формуле $\Phi^{y_{\alpha}}$ множество свободных переменных не шире списка $(y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_l})$.

Пример 1в. Сузим в (2.9) классы двух из трех формул связи, выбрав $\Phi^y(y, y')$ и $\Phi^z(z, z')$. Набор условий из (2.9) примет вид

$$D_*^{III} = D^x \& D_*^{y'} \& D_*^z \& \tilde{D}^z, \quad (2.10)$$

где $D_*^{y'} = \forall y \in A \exists y' \in A' : \Phi^y, D_*^z = \forall y \in A, y' \in A' : \Phi^y, z' = f'(y') \exists z = f(y) : \Phi^z$.

Пример 2в. Сузим классы следующих формул связи, ограничив наборы их аргументов:

$$\Phi^{t_0^i}(t_0, t_0'), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \Phi^{x_0^i}(t_0, t_0', x_0, x_0'), \quad i = \overline{1, 3},$$

$$\Phi^{t_1^i}(t_0, t_0', t, t'), \quad i = \overline{1, 2}, \quad \Phi^{t_1^3}(t_0, t_0', t_1, t_1'),$$

$$\Phi^{t_1^3}(t_1, t_1', t, t'), \quad \Phi^{x_1^i}(t, t', x, x'), \quad i = \overline{1, 3}.$$

Например, формулы связи $\Phi^{x_i}(t, t', x, x')$ (в ТК $\check{w}^*(x_i), i = \overline{1, 2}$, и $\check{w}^*(x_3)$) могут задавать частные связи уравнений (1.2) и (2.4) по переменным x, x' с возможным привлечением старших переменных t, t' , но не шире, т.е. возможны варианты:

$$\Phi^{x_i} \in \{\varphi_1(t, x) = x', \varphi_2(t', x') = x, \varphi_3(t, x') = x, \varphi_4(t', x) = x', \varphi_1(t, x) \leq x', \dots\},$$

где $\varphi_1 : R^1 \times R^r \rightarrow R^s, \varphi_2 : R^1 \times R^s \rightarrow R^r$ и т.д.

Тогда, применив к D^{III} сужение наборов свободных переменных в формулах связи $\Phi^{y_{\alpha}}$ и вычеркивание ТКН, возникающих после этого сужения, придем к следующему набору условий D_*^{III} :

$$\begin{aligned} D^{u'}; D_*^{t_0^1} &= \forall t_0 \exists t_0' \Phi^{t_0^1}; \quad D_*^{x_0^1} = \forall t_0, t_0', x_0 \exists x_0' \Phi^{x_0^1}; \\ D_*^{t_1^1} &= \forall t_0, t_0', t \exists t' \Phi^{t_1^1}; \quad D_*^{x_1^1} = D^{x_1^1}(\exists x' / \forall x'); \quad D_*^{t_0^2} = \forall t_0' \exists t_0 \Phi^{t_0^2}; \\ D_*^{x_0^2} &= \forall t_0', t_0, x_0 \exists x_0' \Phi^{x_0^2}; \quad D_*^{t_1^2} = \forall t_0', t_0, t \exists t' \Phi^{t_1^2}; \\ D_*^{x_1^2} &= D^{x_1^2}(\exists x' / \forall x'); \quad D_*^{t_0^3} = \forall t_0 \exists t_0' \Phi^{t_0^3}; \quad D_*^{x_0^3} = \forall t_0, t_0', x_0 \exists x_0' \Phi^{x_0^3}; \\ D_*^{t_1^3} &= \forall t_0, t_0', t_1 \exists t_1' \Phi^{t_1^3}; \quad D_*^{t_1^3} = \forall t_0, t_0', t_1, t_1', t' \exists t \Phi^{t_1^3}; \\ D_*^{x_3} &= D^{x_3}(\exists x' / \forall x'); \tilde{D}^{x_3}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Набор условий (2.11) обеспечивает следование свойства (1.3) из (2.5).

Как было выше отмечено, упрощение посылок из леммы 2 или условий из D_*^{III} в виде (2.10), (2.11) можно обеспечить также сокращением наборов свободных переменных в некоторых условиях $W^{y_{\alpha}}$ и $W^{y_{\alpha}'}$ типовых кванторов. Здесь мы рассмотрим упрощение загрузлением типовых условий в некоторых ТКВ, т.е. ослаблением этих условий с одновременным уменьшением разности входящих в этих условия кванторных переменных. При этом некоторые ТКВ $\hat{w}(y_{\alpha})$, $\hat{w}(y_{\alpha}')$, $\hat{w}^*(u_{\alpha})$ становятся независимыми и тоже удаляются.

Пусть, например, F — одно из условий леммы 2, $\hat{w}(z_{\beta})\check{w}(z_{\alpha})G \sqsubseteq F$, где $W^{z_{\alpha}}$ зависит не только от z_{α} , но и от старших переменных, например z_{β} , а область G действия квантора $\hat{w}(z_{\alpha})$ не зависит хотя бы от z_{β} . Пусть также $\tilde{W}^{z_{\alpha}}$ не зависит от z_{β} и $W^{z_{\alpha}} \rightarrow \tilde{W}^{z_{\alpha}}$, т.е. область значений переменной z_{α} , вообще говоря, расширится в формуле $\tilde{F} = F(\hat{w}(z_{\alpha})/\hat{w}(z_{\beta})\hat{w}(z_{\alpha}), \tilde{W}^{z_{\alpha}}/W^{z_{\alpha}})$, но сама формула упро-

стится вычеркиванием независимого ТКВ $\hat{w}(z_\beta)$. Так как оба типа подстановок приводят к достаточным условиям, то справедлива следующая лемма.

Л е м м а 3. При сформулированных условиях $\tilde{F} \rightarrow F$.

Модификация подобными преобразованиями нацелена прежде всего на исключение нежелательных переменных и других объектов, о которых у исследователя меньше информации (например, может не доставать информации о самих движениях динамической системы). Эта модификация с заменами вида $\tilde{F} \rightarrow F$ осуществима не только на логическом уровне, но и на уровнях более богатых теорий (теории множеств и др.). Такая модификация часто применяется к обычно наиболее сложному поначалу условию $\tilde{D}^{u_{ak}}$, которое преобразуется в некоторое более простое условие $\tilde{D}$ с получением на шаге IV результата $D^{IV} \stackrel{\text{def}}{=} \&_{i=1}^k D^{u_{ai}} \& \tilde{D}$, где в силу вышеупомянутого $D^{IV} \rightarrow D^{III}$.

Таким образом, с учетом лемм 1–3 справедлива теорема.

Т е о р е м а 1. $D^{IV} \rightarrow (P' \rightarrow P)$.

Получаемые наборы условий D^{IV} , как правило, являются новыми (особенно для новых свойств P) либо модификациями известных теорем, а в других случаях обобщают известные теоремы или, наоборот, следуют из них.

П р и м е р 1г. В типовых условиях кванторных переменных z' и z из $\tilde{D}^z$ можно выполнить подстановки

$$\tilde{D}^z (\forall z' \in B' / \forall z' = f'(y'), \forall z \in B / \forall z = f(y))$$

и удалить независимые ТКВ по переменным y и y' . Получится достаточное для $\tilde{D}^z$ условие:

$$\tilde{D}_* = \forall x' \in B', \quad x \in B : \Phi^x, \quad z' \in B', \quad z \in B : \Phi^z (z' \leq x' \rightarrow z \leq x).$$

Дальнейшее упрощение условий D^{IV} возможно при полной конкретизации формул связи как частных межмодельных связей. Эта конкретизация осуществима переходом с логического уровня на уровень более богатых теорий (теории множеств и др.).

Выберем формулы связи: $\Phi^x \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(x) = x')$, $\Phi^z \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(z) = z')$, где $\varphi : B \rightarrow B'$, и $\Phi^y \stackrel{\text{def}}{=} (\psi(y) = y')$, где $\psi : A \rightarrow A'$. Тогда набор условий импликации (2.2) $\rightarrow$ (1.1) примет вид

$$D^{IV} = D^x \& D_*^{y'} \& D_*^z \& \tilde{D}_*,$$

где

- 1) D^x означает сюръективность φ ,
- 2) $D_*^{y'}$ равносильно просто определению $\psi : A \rightarrow A'$,
- 3) $D_*^z \Leftrightarrow \forall y \in A \varphi(f(y)) = f'(\psi(y))$,
- 4) $\tilde{D}_* \Leftrightarrow \forall x \in B, z \in B (z \not\leq x \rightarrow \varphi(z) \not\leq \varphi(x))$.

По теореме 1 из этих условий следует импликация (2.2) $\rightarrow$ (1.1).

Пусть, например, $A = A' = B = B' = (-\infty, 0]$, $f(y) = y^3$, $f'(y') \equiv y'$, $\varphi(y) = y^{1/3}$, $\psi(y') \equiv y'$. В этой интерпретации условия из D^{IV} выполнены, а функция f , как и f' , обладает свойством ограниченности сверху.

П р и м е р 1д. При рассмотрении по-прежнему свойства P вида (1.1) в качестве P' можно привлечь не однотипное свойство (2.2), а свойство, структура которого частично повторяет структуру свойства P :

$$P' \stackrel{\text{def}}{=} \exists x' \in B' \forall y' \in A', \quad z' = f'(y') \quad z' \leq x',$$

где $f' : (A') \rightarrow B'$, т.е. f' – теперь частичная функция. Свойство P – результат инверсии ТК $\check{w}(z')$ в определении свойства (2.2). Этот ТК является особым. По правилам I–IV запишем набор усло-

вий, отличающихся от ранее полученного только некоторым ослаблением условия D_*^z , которое примет вид

$$D_*^z \Leftrightarrow \forall y \in A : \psi(y) \in \text{dom} f' \quad \varphi(f(y)) = f'(\psi(y)).$$

Пример 1е. Если изучается обратная импликация свойств (1.1) $\rightarrow$ (2.2) и направления действия отображений φ и ψ совпадают с направлением импликации, то набор условий D^{IV} будет следующим:

- 1) D^x , равносильное определению $\varphi : B \rightarrow B'$,
- 2) $D_*^{y'}$, означающее сюръективность $\psi : A \rightarrow A'$,
- 3) $D_*^z \Leftrightarrow \forall y \in A \quad \varphi(f(y)) = f'(\psi(y))$,
- 4) $\tilde{D}_* \Leftrightarrow \forall x \in B, z \in B \quad (z \in x \rightarrow \varphi(z) \leq' \varphi(x))$.

Если при этом $A = B, A' = B'$, то свойство P можно рассматривать как свойство алгебраической системы $\mathcal{M} = (A, f, \geq)$. При его формализации в языке первопорядковой логики оно примет вид

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \exists x \quad \forall y \quad \exists z \quad (z = f(y) \ \& \ z \leq x).$$

Это выражение принадлежит классу позитивных свойств в смысле [1, 2], т.е. образованных из атомов с помощью связок $\&$, $\vee$ и кванторов по предметным переменным (без отрицаний и импликаций). Поэтому при сюръективном гомоморфизме должна иметь место импликация $P \rightarrow P'$. Условия 1–4 при $\varphi = \psi$ имеют тоже смысл сюръективного гомоморфизма.

Пример 2г. В примере 2, 2а–2в условие $\tilde{D}^{x^3}$ сформулировано в терминах решений x, x' и является наиболее сложным для проверки. Переменные x и x' входят также в условия $D_*^{x^1}, D_*^{x^2}$ и $D_*^{x^3}$, которые связывают решения x и x' уравнений (1.2) и (2.4) между собой, но могут быть сведены к условиям типа траекторного гомоморфизма, например $\varphi(t, x(t, t_0, x_0, u)) = x'(\psi(t), \psi(t_0), \varphi(t_0, x_0), s(u))$, $\varphi : \Omega \rightarrow R^s$, или мажорирования (с неравенствами $\leq, \geq$). Однако условие $\tilde{D}^{x^3}$ требует трудно проверяемого на выполнимость некоторого согласованного поведения этих решений относительно пары множеств (A, A') , поэтому желательно упростить $\tilde{D}^{x^3}$, что и сделаем по правилу IV.

Поскольку в этом примере в области действия ТК $(\hat{w}(xi), \hat{w}(x'i))$ переменные x и x' входят в $\tilde{D}^{x^3}$ только в типовые условия $W^{xi}, W^{x'i}$ кванторов всеобщности по x, x' в виде равенств $W^{xi} \stackrel{\text{def}}{=} (x = x(t))$ и $W^{x'i} \stackrel{\text{def}}{=} (x' = x'(t'))$, то возможна замена этих условий на следствия $x \in R^r$ и $x' \in R^s$ соответственно. После этой замены и удаления независимых ТКВ получим постоянное для $\tilde{D}^{x^3}$ условие

$$\begin{aligned} \tilde{D} = & (\forall t_0, t'_0, t, t', x, x' (x' \in A' \rightarrow x \in A)) \ \& \\ & \& (\forall t'_0, t_0, t, t', x, x' (x' \in A' \rightarrow x \in A)) \ \& \\ & \& (\forall t_0, t'_0, t_1, t'_1, t, t', x, x' (x' \in A' \rightarrow x \in A)) \end{aligned}$$

с новыми типовыми условиями в ТК по переменным x, x' .

На базе условий (2.11) заменой $\tilde{D}^{x^3}$ на $\tilde{D}$ получим набор условий D^{IV} .

Конкретизируем формулы связи в двух вариантах:

$$\begin{aligned} \Phi^u \stackrel{\text{def}}{=} (s(u) = u'), \quad \text{где} \quad s : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}', \\ \Phi^{t_{0i}} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi(t_0) = t'_0), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \text{где} \quad \psi : R^1 \rightarrow R^1, \\ \Phi^{x_{0i}} \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(t_0, x_0) = x'_0), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \text{где} \quad \varphi : R^1 \times R^r \rightarrow R^s, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\Phi^{ti} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi(t) = t'), \quad i = \overline{1,3} \quad \Phi^{t_1 3} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi(t_1) = t'_1),$$

$$\Phi^{xi} \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(t, \mathbf{x}) < \mathbf{x}'), \quad i = \overline{1,3}, \quad \text{где } < - \text{ равенство или "}\leq\text{"}.$$

На основе подстановки в выше полученный набор условий D^{IV} формул связи (2.12) получается набор условий, упрощение которых с применением как логических, так и нелогических преобразований приводит к следующим достаточным условиям соответственно:

- 1) s – сюръекция,
- 2) $\psi(R^1) \subseteq R^1$ (выполнено по определению ψ),
- 3) $\varphi(R^1 \times A_0) \subseteq A'_0$,
- 4) ψ – монотонно (выполнено в силу тождественности отображения ψ),
- 5) $\forall u \in \mathcal{U} \forall u' \in \mathcal{U}' : s(u) = u' \forall (t_0, \mathbf{x}_0) \in (R^1 \times A_0) \cap S(u) : (\psi(t_0), \varphi(t_0, \mathbf{x}_0)) \in S'(u'),$
 $R^1(t_0) \cap \text{dom} x'(\cdot, t_0, \mathbf{x}_0, u) \subseteq \text{dom} x'(\cdot, \psi(t_0), \varphi(t_0, \mathbf{x}_0), s(u)),$
 $\forall t \geq t_0 \varphi(t, x(t, t_0, \mathbf{x}_0, u)) < x'(\psi(t), \psi(t_0), \varphi(t_0, \mathbf{x}_0), s(u)),$

где $R^1(t_0) = \{t \in R^1 : t \geq t_0\}$, $<$ – равенство и тогда ОДУ (1.2) и (2.4) должны обладать единственностью решений или же “ $\leq$ ” и тогда x – любое решение из $\mathcal{X}(t_0, \mathbf{x}_0, u)$, а $x'(\cdot, \psi(t_0), \varphi(t_0, \mathbf{x}_0), s(u))$ – соответствующее верхнее решение, существующее, например, при квазимонотонной по $\mathbf{x}'$ правой части уравнения (2.4),

- 6) $T'_0 \subseteq \psi(T_0)$,
- 7) $\varphi(T_0 \times A) \subseteq A'$,
- 8) $\forall (t, t_0) \in R^1 \times T_0 (t \geq t_0 \rightarrow \psi(t) \geq \psi(t_0))$ (следует из 4),
- 9) условие 5 с подстановкой $(T_0 \times A)/(R^1 \times A_0)$,
- 10) $\psi(T_0) \subseteq T'_0$,
- 11) повтор условия 7,
- 12) повтор условия 8,

- 13) $\forall t_1 \in \bigcup_{t_0 \in T_0} R^1(t_0), t' \geq \psi(t_1) \exists t \geq t_1 : \psi(t) = t'$ (выполнено, если, например, ψ – монотонная би-

екция),

- 14) условие 5 с подстановками $(T_0 \times A)/(R^1 \times A_0), \text{dom } x/\text{dom } x', \text{dom } x'/\text{dom } x$,
- 15) $\varphi(R^1 \times (R^r \setminus A)) \subseteq R^s \setminus A'$.

Таким образом, для ОДУ (1.2) и его свойства (1.3) с помощью правил I–IV получена следующая теорема.

Теорема 2. Если для ОДУ (1.2) существуют ОДУ (2.4) и отображения $\psi : R^1 \rightarrow R^1, \varphi : R^1 \times R^r \rightarrow R^s$, такие, что выполняются условия 1, 3, 5–7, 9, 10, 13–15, то из свойства (2.5) решений ОДУ (2.4) следует аналогичное свойство (1.3) решений уравнения (1.2).

Пусть, например, ОДУ (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = f(t, \mathbf{x}, u(\mathbf{x})) &= \left(1 - \frac{\sin t}{2 + \cos t}\right) \mathbf{x} + u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^1, \quad t \in R^1, \\ u : R^1 &\rightarrow R^1, \quad f : \Omega \times R^1 \rightarrow R^1, \quad \Omega = R^1 \times R^1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Если в (2.13) преобразование $\varphi : \Omega \rightarrow R^1$ выбрать вида $\varphi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}/(2 + \cos t)$, то полная производная $\varphi(t, \mathbf{x})$ по t в силу (2.13)

$$\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{(2.13)} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \cdot f(t, \mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$$

будет равна 0 при $u(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$. Поэтому, выбрав ОДУ (2.4) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} = g(t, \mathbf{x}', u'(\mathbf{x}')) &= u'(\mathbf{x}') \equiv 0, \quad \mathbf{x}' \in R^1, \quad t \in R^1, \quad u' : R^1 \rightarrow R^1, \\ g : \Omega' \times R^1 &\rightarrow R^1, \quad \Omega' = R^1 \times R^1, \end{aligned} \quad (2.14)$$

получим, что в (2.14) имеет место свойство (2.5) при любых $T_0' \subseteq R^1$, $A_0' = A' \subset R^1$, где $A' = (-\alpha, \alpha')$, $\forall \alpha' > 0$. Если выбрать $\mathcal{U} = \{-x\} - \text{singl}$, $\mathcal{U}' = \{0\} - \text{singl}$, то условие 1 выполнено. Так как $\psi : R^1 \times R^1 \rightarrow R^1$ — тождественное отображение, то при выбранном u на решениях (2.13) и (2.14) выполняются условия 5, 9, 14 с $S(u) = S'(u) = R^1 \times R^1$ при любых A_0 и A , а также условие 13 и при $T_0 = T_0' -$ условия 6, 10. Наконец, если к тому же $A_0 = (-1, 1)$, $A = (-3, 3)$, $T_0 = \{t_0 : \exists k \in \{0, 1, 2, \dots\} t_0 = 2k\pi\}$, то будут выполнены и последние упоминаемые в теореме 2 условия 3, 7, 15 при $A' = A_0' = (-1, 1)$. Поэтому в (2.13) при выбранных u , T_0 , A_0 , A имеет место свойство (1.3) $((A_0, A)$ -оценки и слабой (A, A) -оценки с посещением A из $T_0 \times A$).

В примере 2, 2а–2г определение (2.5) свойства P' получается из P путем подстановки в (1.3) вместо каждого объекта модели $\mathcal{M}$ вида (1.2) соответствующего объекта модели $\mathcal{M}'$ вида (2.4), т.е. P и P' — однотипные свойства. Если же в (2.5) заменить A_0' на A' , то полученное свойство станет усилением прежнего (2.5), не будучи уже однотипным свойству P . При этом ослабятся условия D'' , 3 и несколько усилится условие 5. При прежних МОС этим новым набором условий снова будет обеспечено наличие в (1.2) свойства (1.3). Заметим, что новое условие P' , полученное заменой A_0' на A' , эквивалентно свойству степени 1 обычной инвариантности множества A' .

Пример 2д. Свойство (1.3) неформализуемо в языке первопорядковой логики ввиду наличия в формализованном определении этого свойства кванторов по функциональным переменным x . В качестве примера свойства, в определение которого при формализации вошли бы кванторы по предметным, функциональным и предикатным переменным, приведем определение свойства отдаленности решений ОДУ (1.2) друг от друга при разных начальных состояниях:

$$\begin{aligned} P &\stackrel{\text{def}}{=} \forall t_0 \in T_0 \exists u \in \mathcal{U} \forall x_{01} \in A_0, \quad x_{02} \in A_0 : x_{01} \neq x_{02} \\ \exists \mathcal{V} \in \mathcal{W} \forall x_1 \in \mathcal{X}(t_0, x_{01}, u), \quad x_2 \in \mathcal{X}(t_0, x_{02}, u), \quad t \geq t_0, \\ x_1 &= x_1(t), \quad x_2 = x_2(t) \quad (x_1, x_2) \notin \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\mathcal{W}$ — семейство окрестностей диагонали множества $R^r \times R^r$ (иначе говоря, $\mathcal{W}$ — фильтр окружений равномерной структуры в пространстве R^r). Неформализуемость (2.15) в первопорядковом языке не препятствует получению условий сохранения этого свойства при переходе от (2.4) к (1.2), например с межмодельными связями:

$$\begin{aligned} \Phi^{t_0} &\stackrel{\text{def}}{=} (\psi(t_0) = t'_0), \quad \text{где} \quad \psi : R^1 \rightarrow R^1, \\ \Phi^u &\stackrel{\text{def}}{=} (s(u) = u'), \quad \text{где} \quad s : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}', \\ \Phi^{x_{0i}} &\stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(t_0, x_{0i}) = x'_{0i}), \quad \text{где} \quad \varphi : R^1 \times R^r \rightarrow R^s, \quad i = 1, 2, \\ \Phi^t &\stackrel{\text{def}}{=} (\psi(t) = t'), \\ \Phi^{x_i} &\stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(t, x_i) \leq x'_i), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Применением правил I–IV к свойству (2.15) и однотипному свойству P' уравнения (2.4) получается следующая теорема.

Теорема 3. Свойство отдаленности (в смысле (2.15)) решений ОДУ сохраняется при переходе от (2.4) к (1.2), если выполняется следующий набор условий:

- 1) $\psi(T_0) \subseteq T_0'$,
- 2) s — сюръекция,
- 3) $\varphi(T_0 \times A_0) \subseteq A_0'$ и сужение φ на множество A_0 инъективно при любом фиксированном $t_0 \in T_0$,
- 4) верхние решения ОДУ (2.4) существуют при любых начальных данных $(\psi(t_0), \varphi(t_0, x_0), s(u))$ и продолжимы вправо не менее, чем решения ОДУ (1.2) с начальными данными $(t_0, x_0, u) \in T_0 \times A_0 \times \mathcal{U}$,
- 5) $\psi(R^1(t_0)) \subseteq R^1(\psi(t_0))$ для любых $t_0 \in T_0$,
- 6) на решениях x и соответствующих верхних решениях x' справедлива оценка $\varphi(t, x(t, t_0, x_0, u)) \leq x'(\psi(t), \psi(t_0), \varphi(t_0, x_0), s(u))$,

7) $\forall t_0 \in T_0 \forall V' \in W' \exists V \in W \forall t \in R^1(t_0) (\varphi(t, \cdot), \varphi(t, \cdot))(V) \subseteq V'$ (при каждом $t_0 \in T_0$ условие равномерной по $t \in R^1(t_0)$ непрерывности канонического распространения отображения $\varphi(t, \cdot) : R^r \rightarrow R^s$ на произведение $R^r \times R^r$).

В частности, для ОДУ (2.13) и (2.14), а также выбранных ранее отображений $\varphi(t, x)$, $\psi(t)$, $u(x)$, $u'(x)$ получим, что все условия теоремы 3 выполнены при том, что ОДУ (2.14) заведомо обладает свойством отдаленности. Поэтому в ОДУ (2.13) имеет место свойство (2.15).

Заключение. Предложен метод получения содержательных решений логических уравнений $X \rightarrow (P' \rightarrow P)$ для произвольных математических моделей связанных систем и их структурно близких свойств. Не требуется эвристического подбора и включения в уравнение того или иного априорно задаваемого условия межмодельной связи, формулируемого в терминах межмодельных объектов связи и объектов обеих моделей согласованно с P и P' по порядку квантификации переменных. Вместо этого используется конъюнктивное встраивание в каждый ТКС формируемого решения X относительно простого и обычно бескванторного условия связи значения кванторной переменной этого ТКС со значениями некоторых ее старших переменных.

Метод обладает высокой алгоритмичностью и общностью. Он позволяет варьировать выбор межмодельных объектов связи для модификации условий X и упрощения их проверки на выполнимость. В случае неоднотипности свойств P и P' структура свойства P' должна совпадать со структурой свойства P хотя бы с точностью до замены некоторых меток $\exists$, $\forall$ на $\forall$, $\exists$ соответственно.

Первые шаги применения метода выполняются на логическом уровне чисто алгоритмически, а последующие — на логической и теоретико-множественной основе с элементами довольно простых эвристик. Получаемые теоремы, как правило, являются новыми (особенно для новых свойств) или модификациями известных, а в других случаях — следствиями или, наоборот, обобщениями известных теорем. Все шаги применения метода детально проиллюстрированы на примерах с интерпретацией условий получаемых теорем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lindon R.C.* Properties Preserved under Homomorphism // Pacific J. Math. 1959. V. 9. P. 143–154.
2. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 329 с.
3. *Матросов В.М.* Метод сравнения в динамике систем. I // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 9. С. 1547–1559.
4. *Матросов В.М.* Метод сравнения в динамике систем. II // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 3. С. 403–417.
5. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем. М.: Наука, 1980. 481 с.
6. *Vassilyev S.N.* Machine Synthesis of Mathematical Theorems // J. Logic Programming. 1990. V. 9. № 2, 3. P. 235–266.
7. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.: Мир, 1965. 455 с.
8. *Nagul N.V.* The Logic-algebraic Equations Method in System Dynamics // St. Petersburg Mathematical J. 2013. V. 24. № 4. P. 645–662.
9. *Васильев С.Н.* Метод редукции и качественный анализ динамических систем. I // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 1. С. 21–29.
10. *Васильев С.Н.* Метод редукции и качественный анализ динамических систем. II // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 2. С. 5–17.
11. *Васильев С.Н., Дружинин А.Э., Морозов Н.Ю.* Вывод условий сохранения свойств математических моделей // ДАН. 2015. Т. 465. № 1. С. 14–19.
12. *Таутс А.И.* Решение логических уравнений методом итераций в исчислении предикатов первого порядка // Тр. ИФА АН ЭССР. Исследования по теоретической физике и механике. 1964. Т. 3. № 24. С. 17–24.
13. *Mints G., Hoshi T.* Logical Equations in Monadic Logic // J. Mathematical Sciences. 2009. V. 158. № 5. P. 741–752.
14. *Michel A.N., Wang K., Hu B.* Qualitative Theory of Dynamical Systems. N.Y.: Marcel Dekker, Inc., 2001. 707 p.
15. *Пуш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.