
**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.85

**ЭКСПРЕСС-АНАЛИЗ И АГРЕГИРОВАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМЫХ ПОТОКОВ
МНОГОПРОДУКТОВОЙ СЕТЕВОЙ СИСТЕМЫ**

© 2019 г. Ю. Е. Малашенко^а, И. А. Назарова^{а,*}, Н. М. Новикова^{а,**}

^аФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

^{*}*e-mail*: irina-nazar@yandex.

^{**}*e-mail*: ruN_Novikova@umail.ru

Поступила в редакцию 04.06.2019 г.

После доработки 19.06.2019 г.

Принята к публикации 22.07.2019 г.

В рамках формализма математической модели передачи многопродуктового потока изучается множество достижимости многопользовательских сетевых систем. Предлагается метод построения внутреннего опорного каркаса на основе векторов максимальных потоков, которые можно передать между всеми парами узлов при монопольных и ограниченно-монопольных режимах управления потоками. С помощью полученных предельных значений строится многогранник более простой структуры (каркас), принадлежащий множеству достижимых мультипотоков, и конус возможных направлений для формирования граничных точек. Рассматриваются методы получения различных многокритериальных оценок функциональных возможностей передающей сети. Разработанный подход можно использовать для априорного анализа множества достижимых мультипотоков, в том числе для быстрого получения оценок и приемлемых вариантов справедливого распределения ограниченного ресурса пропускной способности передающей сети.

DOI: 10.1134/S0002338819060131

Введение. В [1] функциональные характеристики сетевых систем общего вида изучались в рамках формализма математической модели передачи *многопродуктового* (МП) потока в сети. Основное внимание уделялось способности сети сохранять связи между пользователями после удаления ряда ее элементов. При этом структура информационных потоков не конкретизировалась и оценки строились, исходя из априорного наличия полного графа тяготений. Для более тонкого анализа уязвимости МП-сети требуется конструктивное описание множества достижимых МП-потоков. В данной работе ставится именно такая задача: для системы ограничений МП-модели изучается множество достижимых векторов потоков, которые могут передаваться одновременно между всеми парами узлов. Вычисляются граничные и угловые точки, соответствующие предельным значениям, достижимым при передаче максимального потока в монопольном режиме для соответствующих пар узлов.

При исследовании функциональных возможностей системы решаются различные задачи поиска распределения потоков в МП-сети. В итоге предложен ряд способов формирования внутреннего опорного каркаса множества достижимых значений МП-потока. Построение предлагается проводить итеративно. На каждом шаге строится конус возможных направлений для поиска оптимального распределения потоков. Направляющие лучи (ребра) конуса определяются на основе решения задач о передаче максимального потока для каждой (одной) пары узлов при сохранении достигнутых значений для всех остальных, т.е. в ограниченно-монопольном режиме.

1. Многопродуктовая потоковая модель. Рассмотрим стандартную математическую запись модели передачи МП-потока в сети с многими источниками и стоками [2]. МП-сеть $\langle V, R, P \rangle$ задается множествами:

вершин/узлов сети $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ (N — общее число узлов);

ребер $R = \{r_1, r_2, \dots, r_e\} \subset V \times V$ физического графа $G(d) = \langle V, R \rangle$ сети с пропускной способностью, равной вектору d , компоненты которого d_k ограничивают суммарные потоки по ребру r_k , $k = \overline{1, e}$ (e – общее число физических ребер), где граф $G(d)$ без петель и сдвоенных ребер;

дуг логического графа сети $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\} \subset V \times V$, соответствующих тем парам вершин сети (далее – тяготеющим парам), между которыми передается поток определенного вида (продукта) с учетом направления передачи (M – общее число тяготеющих пар).

Далее будем говорить об МП-сети, в которой между *тяготеющими парами* вершин из $P \subset V \times V$ передаются *информационные потоки* (свои для каждой упорядоченной пары).

Для упрощения обозначений предположим, что все физические ребра – неориентированные. При этом для спецификации потоков на ребрах $G(d)$ назовем прямым направлением от вершины с меньшим номером к вершине с большим и каждое ребро r_k физического графа сети будем представлять двумя ориентированными дугами с номерами k и $k + e$ для прямого и обратного направлений соответственно. (В случае ориентированного ребра физического графа формально можно ограничить нулем поток по дуге, направленной противоположно ориентации ребра.) Для любой вершины $v_j \in V$ обозначим через $S(v_j)$ множество номеров выходящих из нее дуг:

$$S(v_j) = \{k \mid \exists l > j : r_k = (v_j, v_l) \in R\} \cup \{k + e \mid \exists l < j : r_k = (v_l, v_j) \in R\},$$

а через $T(v_j)$ – множество номеров входящих дуг:

$$T(v_j) = \{k \mid \exists l < j : r_k = (v_l, v_j) \in R\} \cup \{k + e \mid \exists l > j : r_k = (v_j, v_l) \in R\}.$$

Для каждой i -й тяготеющей пары p_i введем обозначение $p_i = (v_{s_i}, v_{t_i})$, где вершина v_{s_i} называется источником, а v_{t_i} – стоком i -го вида продукта и/или информационного потока. Вершины источник и сток определяются согласно ориентации дуги логического графа сети. Распределение потоков одного вида по дугам будет задаваться матричной переменной $x = \{x_{ik}\}$ размерности $m \times 2e$. Каждый элемент x_{ik} обозначает количество продукта i -го вида (i -го информационного потока) по ребру $r_k \in R$ в прямом направлении для $k \leq e$ или по ребру $r_{k-e} \in R$ в обратном направлении, если $k > e$. Все $x_{ik} \geq 0$. Кроме неотрицательности для возможных значений переменной x должны выполняться условия сохранения потока любого вида в транзитных для него узлах, т.е. $\forall v \in V$:

$$\sum_{k \in S(v)} x_{ik} - \sum_{k \in T(v)} x_{ik} = \begin{cases} z_i, & \text{если } v = v_{s_i}, \\ -z_i, & \text{если } v = v_{t_i}, \\ 0 & \text{– в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Значение $z_i \geq 0$ равно величине входного информационного потока, который пропускается по сети от источника к стоку i -й тяготеющей пары при распределении потоков x_{ik} по физическим ребрам сети. Вектор $z = z(x)$, определяемый из (1.1), называется МП-поток.

На ребрах графа $G(d)$ МП-сети потоки не смешиваются, но, тем не менее, подчиняются единым ограничениям. Каждому ребру $r_k \in R$ физического графа $G(d)$ МП-сети приписано число d_k , названное пропускной способностью ребра r_k и измеряемое в условных единицах потоков, для передачи которых предназначена данная сеть. Тем самым различные виды потоков должны измеряться в сопоставимых единицах. Как правило, речь идет об однотипных потоках, которые различаются лишь адресатами и отправителями, но не являются взаимозаменяемыми, например пассажиропотоки. Компоненты вектора $d = (d_1, d_2, \dots, d_e)$ известны, фиксированы и неотрицательны. Вектор d задает ограничения-неравенства на распределение потоков в сети:

$$\sum_{i=1}^M (x_{ik} + x_{i(k+e)}) \leq d_k \quad \forall k = \overline{1, e}, \quad (1.2)$$

которые совместно с ограничениями (1.1) формируют многогранник допустимых распределений потоков:

$$X(d) = \{x \geq 0 \mid \exists z \geq 0 : \text{выполнено (1.1), (1.2)}\}.$$

Введем множество *достижимых значений* МП-потока

$$Z(d) = \{z \geq 0 \mid \exists x \in X(d) : z = z(x), x \text{ удовлетворяют (1.1), (1.2)}\}, \quad (1.3)$$

т.е. векторов величин потоков, которые удастся одновременно передать между всеми тяготеющими парами (заданными дугами логического графа сети). Как правило, всем дугам логического графа МП-сети заранее приписаны числа f_i^0 и ставится *задача о допустимости*, состоящая в исследовании возможности пропускать по сети потоки величины f_i^0 для тяготеющих пар $p_i \in P$. Если $f^0 \in Z(d)$, то МП-сеть называется *допустимой* для передачи вектора *требований* f^0 , а вектор потоков f^0 — *достижимым* в данной МП-сети.

2. Предельные величины потоков и сечения множества достижимых значений МП-потока. Рассмотрим сначала модельную ситуацию, когда все ресурсы сети задействованы для передачи единственного потока между выделенной парой тяготеющих узлов $p_i \in P$, а для всех остальных потоков полагаются равными нулю или просто определяются по остаточному принципу. Указанный способ управления сетью назван в [1] *монопольным режимом* передачи потока z_i (далее — М-режимом). Максимальный поток, который можно передать для тяготеющей пары в М-режиме, является решением стандартной (однопродуктовой) задачи о максимальном потоке.

Задача 1. Найти

$$z_i^0 = \max_{z \in Z(d)} z_i.$$

Поток величины z_i^0 назван в [1] МРМ-поток, т.е. максимальным потоком для i -й тяготеющей пары, передаваемым в М-режиме.

Решим задачу 1 для всех $p_i \in P$ и вычислим значения z_i^0 для $i = \overline{1, M}$. Векторы $z^i = (0, \dots, 0, z_i^0, 0, \dots, 0)$, $i = \overline{1, M}$, являются угловыми точками множества $Z(d)$, которые лежат на пересечении с соответствующими координатными осями границы множества достижимых значений в задаче многокритериальной максимизации МП-потока. Множество векторов

$$Z^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{z^1, z^2, \dots, z^M\} \quad (2.1)$$

определяет угловые точки симплекса в M -мерном пространстве значений МП-потока. Этот симплекс назовем *С-сечением* 1-го уровня для множества $Z(d)$. Вектор

$$u^0 \stackrel{\text{def}}{=} \langle z_1^0, z_2^0, \dots, z_M^0 \rangle \quad (2.2)$$

с компонентами, равными МРМ-потокам, будем называть МРМ-вектором.

В общем случае u^0 (2.2) не принадлежит множеству достижимых значений $Z(d)$, а является *идеальной точкой* [3] в указанной выше задаче многокритериальной оптимизации на максимум вектора z по всем $z \in Z(d)$. (Далее, говоря о границе Парето и Слейтера множества $Z(d)$, будем иметь в виду именно такую задачу.) Рассмотрим луч $(0, u^0)$, направленный из начала координат в идеальную точку u^0 , как множество векторов $\{0, \beta u^0\}$ и найдем значение β^* в точке его пересечения с С-сечением.

Задача 2. Найти $\beta^*(1)$, $\gamma_i^*(1) \geq 0$ такие, что

$$\beta^*(1)u^0 = \sum_{i=1}^M \gamma_i^*(1)z^i, \quad \sum_{i=1}^M \gamma_i^*(1) = 1.$$

Для решения задачи представление вектора $\beta^*(1)u^0$ в виде выпуклой комбинации угловых точек z^i запишем покомпонентно:

$$\beta^*(1)z_i^0 = \gamma_i^*(1)z_i^0 \quad \forall i = \overline{1, M}, \quad \sum_{i=1}^M \gamma_i^*(1) = 1.$$

Таким образом, величина

$$\beta^*(1) = \gamma_i^*(1) = \frac{1}{M}, \quad i = \overline{1, M},$$

определяет искомую точку пересечения

$$z^*(1) = \frac{1}{M} u^0$$

с координатами

$$z_i^*(1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M} z_i^0, \quad i = \overline{1, M},$$

равными величинам потоков, которые можно одновременно передать по всем информационным направлениям $p_i \in P$ (т.е. всем тяготеющим парам). Вектор $z^*(1)$ принадлежит С-сечению и задает априорно допустимое распределение потоков и достижимое значение МП-потока, *равнопропорциональное* МРМ-потокам.

Теперь найдем предельный вектор достижимых значений МП-потока $z^*(0)$ на луче, ведущем в идеальную точку, из решения следующей задачи.

Задача 3. Найти

$$\beta^*(0) = \max_{\beta \geq 0, z \in Z(d)} \beta,$$

$$\beta z_i^0 \leq z_i, \quad i = \overline{1, M}.$$

Оптимум в задаче 3 определяет точку пересечения луча $(0, u^0)$ с границей Парето множества достижимых значений МП-потока:

$$z^*(0) \stackrel{\text{def}}{=} \beta^*(0) u^0.$$

Тем самым вектор $z^*(0)$ лежит на границе множества $Z(d)$ и является парето-оптимальным МП-потоком, пропорциональным МРМ-потокам.

Сравним значения $\beta^*(0), \beta^*(1)$.

1. Если $\beta^*(0) = \beta^*(1) = 1/M$, то в этом случае граница Парето множества $Z(d)$ совпадает с С-сечением и любая точка этой границы может быть представлена в виде выпуклой комбинации угловых точек z^i . В частности, когда все пути соединения всех тяготеющих пар проходят через некоторое “узкое место” (“bottle neck”) физического графа $G(d)$ сети, а источники и стоки всех тяготеющих пар (элементы логического графа) находятся по разные стороны этого условного “моста”, тогда использование С-сечения 1-го уровня позволяет полностью описать все максимальные из достижимых значений МП-потока.

2. Рассмотрим другой крайний случай — паретовская точка совпадает с идеальной, т.е. $\beta^*(0) = 1$, $z^*(0) = u^0$. Тогда множество $Z(d)$ — параллелепипед, а луч $(0, u^0)$ — его главная диагональ. Например, исходная система — сеть “сигнального” управления, а соответствующий физический граф $G(d)$ и логический граф P представляют собой “звезду”, из центра которой получают управляющие сигналы и/или осуществляется информационный обмен лица, принимающего решения, с подчиненными, относящимися к “висячим” вершинам физического графа $G(d)$. Любая слейтеровская точка [4] из $Z(d)$ может быть представлена в виде выпуклой комбинации вектора $z^*(0)$ и векторов из множества Z^0 — угловых точек С-сечения (2.1).

3. В промежуточном случае $1 > \beta^*(0) > \beta^*(1)$. (Такие случаи возникают уже в двухуровневых сигнальных сетях, когда граф $G(d)$ имеет структуру типа “дерево”.) Построим для него С-сечение 2-го уровня из решения набора следующих задач для каждой тяготеющей пары $p_i \in P$.

Задача 4. Найти

$$z_i^0(2) = \max_{z \in Z(d)} z_i$$

при условиях

$$z_m \geq z_m^*(1) = \frac{1}{M} z_m^0 \quad \forall m = \overline{1, M}.$$

Понятно, что значение максимума в задаче 4 не превышает максимума в задаче 1. При этом вектор – решение задачи 4:

$$z^i(2) \stackrel{\text{def}}{=} (z_1^*(1), \dots, z_{i-1}^*(1), z_i^0(2), z_{i+1}^*(1), \dots, z_M^*(1))$$

является граничной точкой множества достижимых значений МП-потока $Z(d)$. Множество всех таких векторов

$$Z^0(2) \stackrel{\text{def}}{=} \{z^1(2), z^2(2), \dots, z^M(2)\} \quad (2.3)$$

образует угловые точки симплекса, который определяет С-сечение 2-го уровня. Указанный симплекс будет не ближе к началу координат, чем С-сечение 1-го уровня. Найдем точку пересечения луча $(0, u^0)$, ведущего в идеальную точку, с С-сечением 2-го уровня.

Задача 5. Найти $\beta^*(2)$, $\gamma^*(2) \geq 0$ такие, что

$$\sum_{i=1}^M \gamma_i^*(2) = 1, \quad \beta^*(2) u^0 = \sum_{i=1}^M \gamma_i^*(2) z^i(2).$$

Перейдя к покомпонентной записи

$$\beta^*(2) z_i^0 = \gamma_i^*(2) z_i^0(2) + \sum_{m \neq i} \gamma_m^*(2) z_i^*(1), \quad i = \overline{1, M},$$

с учетом сделанных обозначений получим, что

$$\beta^*(2) = 1/M + \left(\sum_{i=1}^M z_i^0 / (z_i^0(2) - z_i^0/M) \right)^{-1},$$

и на основе найденного решения сформируем искомый вектор

$$z^*(2) \stackrel{\text{def}}{=} \beta^*(2) u^0$$

с компонентами $z_i^*(2) = \beta^*(2) z_i^0$, $i = \overline{1, M}$.

Значение $\beta^*(2)$ не меньше, чем $\beta^*(1)$, и не больше, чем $\beta^*(0)$. Далее проверим условие $\beta^*(0) - \beta^*(2) \leq \delta$, где δ – заранее заданное малое положительное число – оценка достаточной близости к границе $Z(d)$. Если условие выполнено, то происходит останов. При этом запоминаем множество $Z^0(2)$ (2.3), задающее С-сечение 2-го уровня, для возможности быстрого поиска других оптимальных векторов МП-потока, например, на пересечении с лучом, ведущим в точку $u^0(2)$ с координатами $z_i^0(2)$, которая тоже, как правило, недостижима.

Если $\beta^*(0) - \beta^*(2) > \delta$, то исходя из достигнутого значения вектора МП-потока $z^*(2)$ формируем С-сечение 3-го уровня на базе решения следующих задач.

Задача 6. Найти

$$z_i^0(3) = \max_{z \in Z(d)} z_i$$

при дополнительных условиях

$$z_m \geq z_m^*(2) \quad \forall m = \overline{1, M}.$$

Решаем задачу 6 для всех $p_i \in P$ и получаем векторы, соответствующие граничным точкам $Z(d)$, на основе найденных $z_i^0(3)$:

$$z^i(3) \stackrel{\text{def}}{=} (z_1^*(2), \dots, z_{i-1}^*(2), z_i^0(3), z_{i+1}^*(2), \dots, z_M^*(2)).$$

Формируем множество угловых точек С-сечения 3-го уровня:

$$Z^0(3) \stackrel{\text{def}}{=} \{z^1(3), z^2(3), \dots, z^M(3)\}.$$

Находим $\beta^*(3)$ как аналитическое решение очередной задачи типа 5 поиска коэффициентов разложения $\gamma_i^*(3)$ по угловым точкам симплекса:

$$\begin{aligned} \beta^*(3)u^0 &= \sum_{i=1}^M \gamma_i^*(3)z^i(3), \\ \sum_{i=1}^M \gamma_i^*(3) &= 1, \quad \gamma_i^*(3) \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Проверяем выполнение $\beta^*(0) - \beta^*(3) \geq \delta$ и либо продолжаем аналогично построение С-сечений, либо останавливаемся на очередном шаге.

Задачи 4 и 6 похожи на стандартную задачу 2 на максимум однопродуктового потока, но только с дополнительным ограничением снизу на потоки остальных тяготеющих пар. Соответствующие значения $z_i^0(q)$ будем называть построенными для $p_i \in P$ в *ограниченно-монопольном режиме* (ОМ-режиме) управления потоками. Чем больше q , тем ближе $z_i^0(q)$ к $z_i^*(q)$, а составленный из них вектор ОМРМ-потоков $u^0(q)$ — к достижимому. Векторы, направленные из $z^*(q)$ в угловые точки С-сечения уровня $(q+1)$, определяют конус возможных направлений улучшения достигнутых значений $z_i^*(q)$, а ребра, соединяющие указанные угловые точки с $z^*(0)$, относятся к внутреннему опорному каркасу $K(q)$, построение которого будет описано ниже. Послойное описание множества $Z(d)$ на основе С-сечений позволяет эффективно решать многие стандартные задачи распределения информационных потоков в МП-сетях даже безотносительно к вектору требований на их передачу.

3. Построение системы каркасов. Теперь вспомним, что, согласно разд. 1, в МП-модели задан вектор требований f^0 (или, другими словами, *заявок*) на величину информационного потока, передаваемого между источником и стоком, для всех тяготеющих пар. Для упрощения дальнейших вычислений рассмотрим случай, когда требования тяготеющих пар равны между собой (произвольный вектор требований исследуется аналогично) и превышают предельные функциональные возможности исходной сети по любому информационному направлению, в частности, речь может идти о сети после аварии.

Пусть $f_0 > 0$ — величина потока, которую требуется передать для каждой тяготеющей пары $p_i \in P$, $f^0 = \{f_0, \dots, f_0\}$. Будем обозначать через

$$\theta_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z_i}{f_0}$$

уровень выполнения требований i -й тяготеющей пары при передаче в сети потока z_i для нее. Множеству достижимых значений МП-потока $Z(d)$ (1.3) поставим в соответствие множество достижимых уровней выполнения требований для всех тяготеющих пар:

$$\Theta(f^0) = \{\theta | \theta_i = z_i/f_0 \quad \forall i = \overline{1, M}, z \in Z(d)\}. \quad (3.1)$$

Вернемся к определению (2.2) и на основе вектора из МРМ-потоков u^0 вычислим значения:

$$\theta_i^0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z_i^0}{f_0}, \quad i = \overline{1, M}.$$

В сделанных предположениях $0 < \theta_i^0 < 1 \quad \forall i = \overline{1, M}$, так как требования на передачу информационных потоков больше соответствующих МРМ-потоков. Величина θ_i^0 задает предельно достижимый уровень выполнения требований для тяготеющей пары $p_i \in P$ при условии передачи потока в М-режиме. Для данного вектора требований $f^0 = (f_0, \dots, f_0)$ решим следующую задачу.

Задача 7. Найти

$$\tau^{**}(0) = \max_{\tau \geq 0, z \in Z(d)} \tau$$

при условии

$$\tau f_0 \leq z_i \quad \forall i = \overline{1, M}.$$

Вектор-решение $z^{**}(0) = (z_1^{**}(0), z_2^{**}(0), \dots, z_M^{**}(0))$ с равными компонентами $z_i^{**}(0) = \tau^{**}(0)f_0$, $i = \overline{1, M}$, определяет точку пересечения луча $(0, f^0)$ с внешней границей множества $Z(d)$. Здесь и далее под *внешней* границей множества достижимых значений МП-потока будем подразумевать замыкание той части границы, которая не лежит в координатных плоскостях. Внешняя граница не вся является паретовской, но состоит из слейтеровских точек множества $Z(d)$.

В общем случае $z^{**}(0) \neq z^*(0)$, примем такое предположение для дальнейшего. Определим множество векторов

$$K(1) \stackrel{\text{def}}{=} \{z^*(0)\} \cup Z^0 \cup \{z^{**}(0)\}$$

как *опорный внутренний каркас* 1-го уровня для множества $Z(d)$. Каркас $K(1)$ можно рассматривать как приближенное описание внешней границы множества $Z(d)$, он представляет собой набор (сетку) точек на внешней границе $Z(d)$, а $z^*(0)$ — одна из таких “реперных” точек, лежащая на главной диагонали $Z(d)$. Плоскость, в которой лежат векторы $z^*(0)$ и $z^{**}(0)$, будем называть *рассекающей* плоскостью, а сами векторы $z^*(0)$ и $z^{**}(0)$ — направляющими опорными векторами рассекающей плоскости (далее также — *uf*-плоскости, поскольку рассекающая плоскость определяется вектором, ведущим в идеальную точку, и вектором требований).

Для формирования граничных точек многоугольника, лежащего в пересечении множества достижимых значений МП-потока и *uf*-плоскости, сначала определим точку пересечения луча $(0, f^0)$ с *C*-сечением 1-го уровня. Рассмотрим выпуклую комбинацию угловых точек из Z^0 :

$$\tau^{**}(1)f^0 = \sum_{i=1}^M \gamma_i(2)z_i^0, \quad \sum_{i=1}^M \gamma_i(2) = 1, \quad \gamma_i(2) \geq 0,$$

или покомпонентно

$$\tau^{**}(1)f_0 = \gamma_i(2)z_i^0, \quad i = \overline{1, M}.$$

Таким образом,

$$1 = \sum_{i=1}^M \frac{\tau^{**}(1)f_0}{z_i^0} = \tau^{**}(1)f_0 \sum_{i=1}^M \frac{1}{z_i^0},$$

и координаты точки пересечения

$$z_i^{**}(1) \stackrel{\text{def}}{=} \tau^{**}(1)f_0 = \left(\sum_{i=1}^M \frac{1}{z_i^0} \right)^{-1}, \quad i = \overline{1, M},$$

являются компонентами вектора

$$z^{**}(1) \stackrel{\text{def}}{=} (z_1^{**}(1), z_2^{**}(1), \dots, z_M^{**}(1)) = (\tau^{**}(1)f_0, \dots, \tau^{**}(1)f_0).$$

Следуя рассуждениям о соотношении значений $\beta^*(0)$ и $\beta^*(1)$, можно утверждать, что относительная разность коэффициентов $\tau^{**}(0)$ и $\tau^{**}(1)$ показывает, насколько можно увеличить потоки сразу для всех тяготеющих пар при “уравнительной” стратегии управления потоками. (В случае произвольного f^0 вместо уравнительной стратегии можно говорить о пропорциональной стратегии, которая является уравнительной в смысле равенства уровней θ_i выполнения требований тяготеющих пар.) Если возможное увеличение значимо для системы, то будем искать точку пе-

ресечения $z^{**}(2)$ (сначала пусть существует) луча $(0, f^0)$ с C -сечением 2-го уровня и т.д. (для этого уже все построено в разд. 2). Множество векторов

$$K(2) \stackrel{\text{def}}{=} \{z^*(0)\} \cup Z^0(2) \cup \{z^{**}(0)\}$$

— опорный внутренний каркас 2-го уровня для множества $Z(d)$.

Прямая между точками $z^*(1)$ и $z^{**}(1)$ принадлежит uf -плоскости, образованной лучами из начала координат в точки $z^*(0)$ и $z^{**}(0)$ (и в идеальные точки u^0 и f^0). В той же плоскости будет лежать и прямая, соединяющая точки $z^*(2)$ и $z^{**}(2)$, образованные пересечением $(0, u^0)$ и $(0, f^0)$ с C -сечением 2-го уровня. Таким образом, в uf -плоскости получили приближение к отрезку, соединяющему $z^*(0)$ и $z^{**}(0)$.

В рассекающей плоскости для $Z(d)$ видны все C -сечения, они как бы “нанизаны” на луч $(0, u^0)$, ведущий в идеальную точку. Однако C -сечения выше 1-го уровня не обязательно будут “протыкаться” вектором требований. В ситуации, когда луч $(0, f^0)$ не пересекается с C -сечением 2-го уровня (если следующих уровней, то для них процедура аналогична), выберем для построения $z^{**}(2)$ точку $z^+(2)$ его пересечения с плоскостью указанного сечения. Затем найдем точку пересечения с внешней границей множества $Z(d)$ луча с направляющим вектором $z^*(2) - z^+(2)$, исходящего из точки $z^*(2)$ (в сторону точки $z^+(2)$, которая не является достижимой).

Задача 8. Найти

$$\alpha^* = \max_{\alpha \geq 0, z \in Z(d)} \alpha$$

при условии

$$z^*(2) + \alpha(z^+(2) - z^*(2)) = z.$$

Решение задачи 8 определяет внешнюю граничную точку $z^{**}(2) = z^*(2) + \alpha^*(z^+(2) - z^*(2))$ множества $Z(d)$ и принадлежит uf -плоскости. Полученное решение может не быть равнопропорциональным вектору требований, но увеличивает уровень выполнения требований для тех тяготеющих пар, для которых это возможно без снижения достигнутого на предыдущем шаге значения $\tau^{**}(1)$ по остальным информационным направлениям. На рисунке изображена описанная ситуация для примера, когда uf -плоскость совпадает с координатной плоскостью $(0, z_1) \times (0, z_2)$.

В этом случае $z^{**}(2)$ совпадает с $z_1^0(2)$.

В общем случае задачи типа 8 имеет смысл решать для получения дополнительных точек пересечения uf -плоскости с внешней границей множества $Z(d)$, которые не находятся на осях координат. В частности, кроме задачи 8, можно поставить симметричную ей задачу.

Задача 9. Найти

$$\alpha^{**} = \max_{\alpha \geq 0, z \in Z(d)} \alpha$$

при условии

$$z^+(2) - \alpha(z^+(2) - z^*(2)) = z.$$

Решение задачи 9 определяет иную внешнюю граничную точку $z^-(2) = z^+(2) - \alpha^{**}(z^+(2) - z^*(2))$ множества $Z(d)$, принадлежащую uf -плоскости. Для примера с рисунка эта точка совпадает с $z^2(2)$, но в общем случае позволяет получить еще один вектор в uf -плоскости на границе $Z(d)$. Аналогичные задачи для уточнения внутренних опорных каркасов ставятся и на остальных шагах процедуры агрегированного описания $Z(d)$ вместе с построением C -сечений. После того, как построено C -сечение уровня q и найдены точки $z^*(q)$ и $z^{**}(q)$ его пересечения с лучами $(0, u^0)$ и $(0, f^0)$, лежащие в uf -плоскости, предлагается следующее. Отрезок, соединяющий найденные точки (и тоже лежащий в uf -плоскости), продляется в обе стороны до пересечения с внешней границей множества $Z(d)$ с помощью решения двух приведенных далее задач 10 и 11. Понятно, что в случае, когда вектор требований не пересекает рассматриваемое C -сечение и точка $z^{**}(q)$

дура построения сечений указанного множества, приближающих изнутри те его грани, которые представляют интерес с точки зрения того или другого целевого вектора потоков, в частности, вектора требований и вектора, соответствующего идеальной точке в задаче максимизации вектора МП-потока. Показано, как перейти от М-режима управления потоками к ОМ-режиму, постепенно подходя к *справедливому* [7, 8] распределению потоков в МП-сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А., Новикова Н.М. Один подход к анализу возможных структурных повреждений в многопродуктовых сетевых системах // ЖВМиМФ. 2019. № 9. С. 180–193.
2. Assad A.A. Multicommodity Network Flows: a Survey // Networks. 1978. V. 8. № 1. P. 37–91.
3. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Макс Пресс, 2008.
4. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
5. Йенсен П., Барнес Д. Потокное программирование. М.: Радио и связь, 1984.
6. Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.
7. Ogryczak W., Luss H., Pioro M., Nace D., Tomaszewski A. Fair Optimization and Networks: a Survey // J. Applied Mathematics. 2014. V. 25. P. 1–25.
8. Ros J., Tsai W.K. A Lexicographic Optimization Framework to the Flow Control Problem // IEEE Trans. on Information Theory. 2010. V. 56. Iss. 6. P. 2875–2886.