ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2019, № 3, с. 10–23

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОВОРОТОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ ВНУТРЕННЕЙ МАССЫ[1]

© 2019 г. Ф. Л. Черноусько[a], А. М. Шматков[a,*]

[a]ИПМех РАН, Москва, Россия

*e-mail: shmatkov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 17.01.2019 г.
После доработки 19.01.2019 г.
Принята к публикации 28.01.2019 г.

Исследована двумерная задача о наискорейшем повороте твердого тела путем перемещения внутренней массы. Предполагается, что твердое тело вместе с внутренней подвижной массой является замкнутой механической системой. В общем случае соотношения для траектории движения массы, оптимального управления и функции Беллмана выражены через эллиптические интегралы, в которые входят две неизвестных. Поиск этих величин требует численного решения двух нелинейных скалярных уравнений, составленных на основании краевых условий. Если положение массы в конечный момент времени не задано, задача сводится к решению единственного скалярного уравнения на известном отрезке, причем соответствующий корень единственен для любых граничных условий и всегда существует. В частном случае, когда внутренняя масса мала по сравнению с массой твердого тела, получены оптимальные траектории, имеющие форму дуг окружности. Исследована связь между приближенным и точным решениями, а также приведены численные примеры использования полученных соотношений.

DOI: 10.1134/S0002338819030065

Введение. Исследования, посвященные различным вопросам робототехники, в настоящее время весьма актуальны [1–3]. В большинстве применяемых механических устройств перемещение аппарата (робота, движущегося объекта) зависит от непосредственного взаимодействия движущихся частей с окружающей средой. Это вызывает ряд затруднений, например, в случае, если окружающая среда агрессивна. Поэтому механические системы, в которых движение происходит под действием перемещающихся внутренних масс, представляют интерес для робототехники [4–6]. Кроме того, подвижные внутренние массы можно использовать, в принципе, для управления ориентацией космических аппаратов. В ряде случаев можно пренебречь влиянием внешних факторов либо для движения в целом, либо для некоторых его этапов. В данной работе анализируются, сравниваются и обобщаются результаты, кратко изложенные в работах [7, 8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело B массы M и материальную точку P массы m, показанные на рис. 1. Пусть оба объекта могут осуществлять только плоскопараллельные движения. Предположим, что в начальный момент времени система покоится, и пренебрежем всеми внешними силами и моментами сил. Тогда система замкнута и может двигаться исключительно под действием внутренних сил взаимодействия между телом и точкой. В этом случае общий центр масс обоих объектов покоится и может быть использован в качестве начала неподвижной декартовой системы координат OXY. Кроме того, рассмотрим движущуюся декартову систему координат Cxy, связанную с телом B, причем ее центр C находится в центре масс этого тела. Пусть положение материальной точки P по отношению к началу координат C задано вектором $\mathbf{r}_m$, а векторы $\mathbf{r}_P$ и $\mathbf{r}_C$ задают положения точек P и C по отношению к началу координат системы OXY. Имеем $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_C$ (рис. 1).

[1] Работа частично выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации АААА-А17-117021310387-0) при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 17-08-00742 и № 17-01-00652), а также при частичной поддержке программы президиума РАН № 30 “Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации” (номер госрегистрации АААА-А17-117121120031-8).

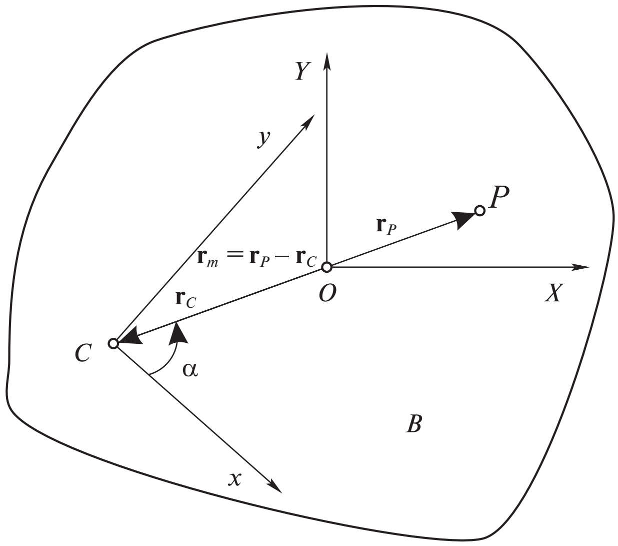

Рис. 1. Исследуемая механическая система

Поскольку центр масс O покоится, в силу первого закона Ньютона справедливо следующее соотношение:

$$M\mathbf{r}_C + m\mathbf{r}_P = M\mathbf{r}_C + m(\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_m) = 0. \tag{1.1}$$

Из (1.1) получаем

$$\mathbf{r}_C = -\mu\mathbf{r}_m, \quad \mu = \frac{m}{M+m}. \tag{1.2}$$

Пусть $\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C$ – скорость точки C, а $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела B. Закон сохранения количества движения для механической системы, состоящей из тела B и материальной точки P, дает

$$M\mathbf{v}_C + m(\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{r}}_m) = 0, \tag{1.3}$$

где через $\times$ обозначено векторное произведение, а точка – производная вектора $\mathbf{r}_m$ по отношению к системе координат Cxy. На основании (1.2) и (1.3) имеем

$$\mathbf{v}_C = -\mu(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{r}}_m). \tag{1.4}$$

Обозначим через J момент инерции тела B относительно оси, проходящей через центр масс C этого тела перпендикулярно плоскости OXY. Предположим, что эта ось – главная центральная ось инерции тела B. Закон сохранения углового момента для рассматриваемой механической системы можно записать в следующем виде:

$$M\mathbf{r}_C\times\mathbf{v}_C + J\boldsymbol{\omega} + m(\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_m)\times(\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{r}}_m) = 0. \tag{1.5}$$

Подставим $\mathbf{r}_C$ из (1.2) и $\mathbf{v}_C$ из (1.4) в соотношение (1.5). Получим

$$(\mu|\mathbf{r}_m|^2 + J/M)\boldsymbol{\omega} + \mu\mathbf{r}_m\times\dot{\mathbf{r}}_m = 0. \tag{1.6}$$

Радиус инерции a тела B определен соотношением

$$J = Ma^2. \tag{1.7}$$

Обозначим через x и y декартовы координаты вектора $\mathbf{r}_m$ относительно системы координат Cxy. Пусть u и v — проекции вектора относительной скорости $\dot{\mathbf{r}}_m$ точки P на оси абсцисс и ординат системы Cxy, а φ – угол поворота тела B в системе координат OXY. Тогда с учетом (1.7) уравнение (1.6) можно переписать в форме

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{\varphi} = \frac{\mu(yu - xv)}{a^2 + \mu(x^2 + y^2)}, \quad u^2 + v^2 \le V^2, \tag{1.8}$$

где V – максимально допустимая величина модуля скорости материальной точки P.

Пусть в начальный $t = 0$ и конечный $t = T$ моменты времени выполнены следующие граничные условия:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi(T) = \varphi_T. \tag{1.9}$$

Поставим задачу о поиске управлений u и v, переводящих систему (1.8) из начального состояния в конечное, согласно (1.9), за минимальное время T.

В дальнейшем, помимо указанного в (1.9) терминального условия, при котором конечное положение материальной точки P не задано, будут кратко рассмотрены и иные, накладывающие на это положение некоторые ограничения.

2. Точное решение задачи в общем случае. Выполним следующую замену переменных [8]:

$$\tilde{x} = \frac{\sqrt{\mu}}{a}x, \quad \tilde{y} = \frac{\sqrt{\mu}}{a}y, \quad \tilde{u} = \frac{u}{V}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{V}, \quad \tilde{t} = \frac{V\sqrt{\mu}}{a}t \tag{2.1}$$

и, сохранив старые обозначения, получим из (1.8)

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{\varphi} = \frac{yu - xv}{1 + x^2 + y^2}, \quad u^2 + v^2 \le 1. \tag{2.2}$$

Перейдем к полярным переменным

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad u = r_\xi\cos\xi, \quad v = r_\xi\sin\xi.$$

Здесь α и r – полярные координаты вектора $\mathbf{r}_m$, а r_ξ и ξ – полярные координаты вектора управления в системе Cxy. Тогда из (2.2) имеем

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\alpha - r\dot{\alpha}\sin\alpha = r_\xi\cos\xi, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\alpha + r\dot{\alpha}\cos\alpha = r_\xi\sin\xi. \tag{2.3}$$

Сначала умножим первое из уравнений (2.3) на $\cos\alpha$ и сложим со вторым, умноженным на $\sin\alpha$, а затем вычтем из второго уравнения (2.3), умноженного на $\cos\alpha$, первое, умноженное на $\sin\alpha$. Получим

$$\dot{r} = r_\xi\cos\xi\cos\alpha + r_\xi\sin\xi\sin\alpha, \quad \dot{\alpha} = \frac{1}{r}(r_\xi\sin\xi\cos\alpha - r_\xi\cos\xi\sin\alpha).$$

Тогда, поскольку

$$yu - xv = rr_\xi\sin\alpha\cos\xi - rr_\xi\cos\alpha\sin\xi = rr_\xi\sin(\alpha - \xi),$$

соотношения (2.2) примут вид

$$\dot{r} = r_\xi\cos(\xi - \alpha), \quad \dot{\alpha} = \frac{r_\xi}{r}\sin(\xi - \alpha), \quad \dot{\varphi} = -\frac{rr_\xi\sin(\xi - \alpha)}{1 + r^2}. \tag{2.4}$$

Введя новые управления

$$\hat{u} = r_\xi\cos(\xi - \alpha), \quad \hat{v} = r_\xi\sin(\xi - \alpha), \quad \hat{u}^2 + \hat{v}^2 \le 1,$$

преобразуем (2.4) и получим

$$\dot{r} = \hat{u}, \quad \dot{\alpha} = \frac{\hat{v}}{r}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{r\hat{v}}{1 + r^2}. \tag{2.5}$$

Заметим, что из второго и третьего соотношений в (2.5) следует, что направления изменения углов α и φ всегда противоположны.

Граничные условия (1.9) примут вид

$$r(0) = r_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi(T) = \varphi_T. \tag{2.6}$$

В дальнейшем всюду положим $\alpha_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$, поскольку, как видно из системы (2.5), это можно сделать без ограничения общности.

Применим принцип максимума Л.С. Понтрягина [9] и запишем гамильтониан для системы (2.5):

$$H = p_r\hat{u} + p_\alpha\frac{\hat{v}}{r} - p_\varphi\frac{r\hat{v}}{1 + r^2} = p_r\hat{u} + \left(\frac{p_\alpha}{r} - \frac{p_\varphi r}{1 + r^2}\right)\hat{v},$$

а также дифференциальные уравнения для сопряженных переменных

$$\dot{p}_r = \left(\frac{p_\alpha}{r^2} + p_\varphi \frac{1-r^2}{(1+r^2)^2}\right)\hat{v}, \quad \dot{p}_\alpha = 0, \quad \dot{p}_\varphi = 0. \tag{2.7}$$

Получаем оптимальные управления

$$\hat{u}_* = \frac{p_r}{\sqrt{\left(\frac{p_\alpha}{r} - \frac{p_\varphi r}{1+r^2}\right)^2 + p_r^2}}, \quad \hat{v}_* = \frac{\frac{p_\alpha}{r} - \frac{p_\varphi r}{1+r^2}}{\sqrt{\left(\frac{p_\alpha}{r} - \frac{p_\varphi r}{1+r^2}\right)^2 + p_r^2}}. \tag{2.8}$$

Разделим первое уравнение в (2.5) на второе и тем самым перейдем к новой независимой переменной α, после чего подставим $\hat{u}_*$ и $\hat{v}_*$. Тогда

$$\frac{dr}{d\alpha} = r\frac{\hat{u}}{\hat{v}} = \frac{p_r r^2(1+r^2)}{p_\alpha(1+r^2) - p_\varphi r^2}. \tag{2.9}$$

Выразим p_r из (2.9):

$$p_r = \frac{p_\alpha(1+r^2) - p_\varphi r^2}{r^2(1+r^2)}\frac{dr}{d\alpha}. \tag{2.10}$$

Разделим первое уравнение в (2.7) на второе уравнение в (2.5) и получим

$$\frac{dp_r}{d\alpha} = \frac{p_\alpha}{r} + \frac{p_\varphi r(1-r^2)}{(1+r^2)^2}. \tag{2.11}$$

В дальнейшем для сокращения записей будем обозначать штрихом производные по α. Продифференцируем правую часть (2.10) по α и приравняем правой части (2.11). Тогда

$$r''\left(\frac{p_\alpha}{r^2} - \frac{p_\varphi}{1+r^2}\right) + 2\left(\frac{p_\varphi r}{(1+r^2)^2} - \frac{p_\alpha}{r^3}\right)(r')^2 - \frac{p_\alpha}{r} - \frac{p_\varphi r(1-r^2)}{(1+r^2)^2} = 0.$$

Обозначим $r' = p(r)$. Тогда, согласно [10], можно положить $r'' = pdp/dr$, и это соотношение можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение относительно $\psi(r) = p^2$.

Поскольку угол поворота тела B в конечный момент времени задан, согласно (1.9), то ограничимся случаем $p_\varphi \neq 0$, в котором траектория отлична от прямой линии [8]. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{C_\alpha}{r^2} - \frac{1}{1+r^2}\right)\frac{d\psi}{dr} + 2\left(\frac{r}{(1+r^2)^2} - \frac{C_\alpha}{r^3}\right)\psi - \frac{C_\alpha}{r} - \frac{r(1-r^2)}{(1+r^2)^2} = 0,$$

где $C_\alpha = p_\alpha/p_\varphi$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\psi(r) = C_0\left(\frac{r^2(1+r^2)}{C_\alpha + C_\alpha r^2 - r^2}\right)^2 - r^2, \tag{2.12}$$

где C_0 – постоянная интегрирования. Разделим первое уравнение в (2.4) на второе, а также третье уравнение в (2.5) на второе. Тогда

$$\frac{dr}{d\alpha} = r\,\mathrm{ctg}(\xi - \alpha), \quad \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{-r^2}{1+r^2}. \tag{2.13}$$

Из соотношения $\psi = (r')^2$ и первого уравнения в (2.13) можно получить равенство $\mathrm{ctg}(\xi - \alpha) = \pm\sqrt{\psi(r)}/r$. Это позволяет найти оптимальные управления u_* и v_* как функции текущих значений полярных координат r и α, тем самым построив синтез оптимального управления.

На основании соотношения $\psi = (r')^2$ и второго уравнения в (2.13) можно заметить, что текущие значения углов α и φ монотонно зависят от r. Следовательно, в общем случае решение представляет собой спираль. В конечный момент времени имеем

$$\alpha_T = \pm\int_{r_0}^{r_T} \frac{dr}{\sqrt{\psi(r)}}, \quad \varphi_T = \mp\int_{r_0}^{r_T} \frac{r^2 dr}{(1+r^2)\sqrt{\psi(r)}}, \tag{2.14}$$

где $r_T = r(T)$.

Заметим, что в системе (2.2) при $u^2 + v^2 = 1$ время – натуральный параметр [11], т.е. равно длине кривой s. В свою очередь уравнение для длины кривой в полярных координатах [11] с учетом (2.12) имеет вид

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2} = \frac{r^2(1+r^2)\sqrt{C_0}}{|C_\alpha + C_\alpha r^2 - r^2|}.$$

Отсюда и из соотношений

$$dt = ds = \frac{ds}{d\alpha}\frac{dr}{r'} = \pm\frac{ds}{d\alpha}\frac{dr}{\sqrt{\psi}}$$

получаем

$$T = \left|\int_{r_0}^{r_T} \frac{r^2(1+r^2)\sqrt{C_0}dr}{(C_\alpha + C_\alpha r^2 - r^2)\sqrt{\psi(r)}}\right|. \tag{2.15}$$

Формулы (2.14) можно преобразовать к виду

$$\alpha_T = \pm\int_{r_0}^{r_T} \frac{rdr}{r^2\sqrt{\psi(r)/r^2}}, \quad \phi_T = \mp\int_{r_0}^{r_T} \frac{rdr}{(1+r^2)\sqrt{\psi(r)/r^2}}. \tag{2.16}$$

Если в соотношениях (2.14) использовать замену переменной интегрирования $\zeta = r^2$ и положить $\psi(r) = \psi(\sqrt{\zeta}) = \Psi(\zeta)$, то получим

$$\alpha_T = \pm\frac{1}{2}\int_{\zeta_0}^{\zeta_T} \frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{\Psi(\zeta)/\zeta}}, \quad \varphi_T = \mp\frac{1}{2}\int_{\zeta_0}^{\zeta_T} \frac{d\zeta}{(1+\zeta)\sqrt{\Psi(\zeta)/\zeta}},$$

$$\zeta_0 = r_0^2, \quad \zeta_T = r_T^2, \quad \frac{\Psi(\zeta)}{\zeta} = \frac{C_0\zeta(1+\zeta)^2}{(C_\alpha + C_\alpha\zeta - \zeta)^2} - 1.$$

Аналогично можно записать выражение (2.15) в форме

$$T = \left|\int_{r_0}^{r_T} \frac{(1+r^2)\sqrt{C_0}rdr}{(C_\alpha + C_\alpha r^2 - r^2)\sqrt{\psi(r)/r^2}}\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{\zeta_0}^{\zeta_T} \frac{(1+\zeta)\sqrt{C_0}d\zeta}{(C_\alpha + C_\alpha\zeta - \zeta)\sqrt{\Psi(\zeta)/\zeta}}\right|.$$

Отсюда вытекает, что выражения (2.14) и (2.15) можно свести к эллиптическим интегралам [12] относительно переменной ζ.

В случае двухточечной задачи, когда r_T, α_T и φ_T фиксированы, уравнения (2.14) позволяют найти постоянные C_0 и C_α из граничных условий. Если же конечное значение α_T свободно, то $p_\alpha \equiv 0$. Тогда $C_\alpha = 0$ и $\psi(r) = C_0(1+r^2)^2 - r^2$, а выражения (2.14), (2.15) сводятся к эллиптическим интегралам относительно переменной r. Второе соотношение в (2.14) позволяет найти C_0, зная r_0, r_T и φ_T.

Если свободно только значение r_T, то в силу соответствующего условия трансверсальности получаем $p_r(T) = 0$. Тогда на основании (2.9) имеем $\psi(r_T) = 0$, что позволяет выразить значение

C_0 из (2.12) через r_T и C_α. Значения r_T и C_α найдем из соотношений (2.14). В частном случае правая часть уравнения (2.11) равна нулю при

$$C_\alpha = p_\alpha/p_\varphi = (r_0^2 - 1)r_0^2\Big/(1 + r_0^2)^2 .$$

Получаем $p_r \equiv 0$ и тем самым $\hat{u}_*(t) \equiv 0$ и $\hat{v}_*(t) \equiv \pm 1$, что означает движение по окружности с радиусом r_0. Значение $C_0 = 4r_0^2\Big/(1 + r_0^2)^4$ следует из (2.12) для $\psi(r) \equiv 0$.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда свободно не только значение α_T, но и r_T, т.е. конечное положение материальной точки полностью произвольно, что соответствует (2.6). Тогда из (2.12) с учетом $C_\alpha = 0$ и $\psi(r_T) = 0$ имеем $C_0 = r_T^2\Big/(1 + r_T^2)^2$. Второе соотношение в (2.14) позволяет найти r_T на основании условий (2.6), после чего из первого соотношения в (2.14) можно найти угол α_T, а из (2.15) – значение функции Беллмана, т.е. T как функцию r_0, α_0. Интересно, что в случае (2.6) интегралы для α_T и φ_T в (2.14) не меняют свой вид при замене переменной r на $1/r$.

Однако полученное решение не всегда удобно для применения. В робототехнике особый интерес представляет ситуация, когда $\mu \ll 1$ и $r_T \ll 1$, т.е. когда масса материальной точки P мала по сравнению с массой тела B и точка P находится недалеко от центра масс системы O. В этом случае при движениях тела B величина угла α_T поворота точки P может быть значительной. Тогда возникает вопрос о возможности удовлетворительной аппроксимации формы траектории движения точки P какой-либо простой кривой, что важно как для практических целей, так и для целей дальнейших теоретических исследований. Получить ответ на этот вопрос, основываясь только на формуле для угла α_T в (2.14), затруднительно. Поэтому целесообразно решить задачу оптимального управления для $\mu \ll 1$ отдельно.

3. Решение задачи при $\mu \ll 1$. В этом случае вместо замены переменных (2.1) сделаем замену

$$\tilde{t} = \frac{Vt}{a}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{a}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{V}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{V}, \quad z = \frac{\varphi}{\mu}. \tag{3.1}$$

Тогда, сохранив прежние обозначения, получим из (1.8)

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{z} = \frac{yu - xv}{1 + \mu(x^2 + y^2)}, \quad u^2 + v^2 \le 1. \tag{3.2}$$

Используя то, что $\mu \ll 1$, уравнения (3.2) можно упростить и заменить системой

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{z} = yu - xv, \quad u^2 + v^2 \le 1. \tag{3.3}$$

К системе (3.3) применим принцип максимума Л.С. Понтрягина [9] и запишем гамильтониан

$$H = p_x u + p_y v + p_z(yu - xv), \tag{3.4}$$

где p_x, p_y и p_z – сопряженные переменные, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{p}_x = p_z v, \quad \dot{p}_y = -p_z u, \quad \dot{p}_z = 0. \tag{3.5}$$

Максимум гамильтониана (3.4) как функции управлений u и v с учетом ограничения, указанного в (3.3), достигается, если

$$\begin{gathered} u = (p_x + p_z y)/D, \quad v = (p_y - p_z x)/\Upsilon, \\ \Upsilon = \sqrt{(p_x + p_z y)^2 + (p_y - p_z x)^2}. \end{gathered} \tag{3.6}$$

При этом ограничение в (3.3) превращается в равенство $u^2 + v^2 = 1$, т.е. скорость точки P максимальна, что обычно для управлений, оптимальных по быстродействию.

Из соотношений (3.3) и (3.5) следует, что

$$\dot{p}_x = p_z \dot{y}, \quad \dot{p}_y = -p_z \dot{x}, \quad \dot{p}_z = 0. \tag{3.7}$$

Проинтегрируем (3.7) и получим

$$p_x = cy + c_x, \quad p_y = -cy + c_y, \quad p_z = c, \tag{3.8}$$

где c_x, c_y и c – постоянные интегрирования. Подставив равенства (3.8) в формулы (3.6), имеем

$$\begin{gathered} u = (2cy + c_x)/\Upsilon, \quad v = (-2cx + c_y)/\Upsilon, \\ \Upsilon = \sqrt{(2cy + c_x)^2 + (-2cx + c_y)^2}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Соотношения (3.9) определяют оптимальные управления. Если подставить их в выражение для гамильтониана (3.4), то можно получить, что $H = \Upsilon$. Поскольку система дифференциальных уравнений (3.3) автономна, гамильтониан (3.4) для рассматриваемой задачи при оптимальном управлении является, согласно [9], постоянным и положительным. Кроме того, вектор сопряженных переменных может быть нормирован на любую постоянную положительную величину. Поэтому без потери общности можно положить $H = \Upsilon = 1$. Теперь заметим, что, согласно формуле для Υ из (3.9), равенство $\Upsilon^2 = 1$ можно записать в виде

$$4c^2(x^2 + y^2) + 4c(c_x y - c_y x) + c_x^2 + c_y^2 = 1. \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) при $c \neq 0$ задает окружность. Следовательно, в общем случае оптимальные траектории точки P по отношению к телу B представляют собой дуги окружностей.

Подставим $\Upsilon = 1$ в формулы (3.9) для u и v, а получившиеся в результате этой подстановки выражения – в уравнения (3.3) для x и y. Получим

$$\dot{x} = 2cy + c_x, \quad \dot{y} = -2cx + c_y. \tag{3.11}$$

Сначала рассмотрим общий случай. Интегрирование системы дифференциальных линейных уравнений (3.11) дает

$$\begin{gathered} x(t) = c_y/(2c) + A\cos 2ct + D\sin 2ct, \\ y(t) = -c_x/(2c) - A\sin 2ct + D\cos 2ct, \quad c \neq 0, \end{gathered} \tag{3.12}$$

где A и D – произвольные постоянные, которые необходимо определить на основании граничных условий (1.9). Начальные условия дают соотношения

$$c_x = -2c(y_0 - D), \quad c_y = 2c(x_0 - A), \quad c \neq 0. \tag{3.13}$$

Подставив формулы (3.13) в уравнения (3.12), найдем

$$\begin{gathered} x(t) = x_0 - A + A\cos 2ct + D\sin 2ct, \\ y(t) = y_0 - D - A\sin 2ct + D\cos 2ct, \quad c \neq 0. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Подставим соотношения (3.14) в уравнения (3.3) для получения оптимальных управлений. Имеем

$$\begin{gathered} u(t) = 2c(-A\sin 2ct + D\cos 2ct), \\ v(t) = 2c(-A\cos 2ct - D\sin 2ct), \quad c \neq 0. \end{gathered} \tag{3.15}$$

С учетом связи $u^2 + v^2 = 1$ между оптимальными управлениями формулы (3.15) дают

$$4c^2(A^2 + D^2) = 1, \quad c \neq 0. \tag{3.16}$$

Теперь подставим выражения (3.14) и (3.15) в уравнение для $\dot{z}$ из (3.3) и получим

$$\dot{z} = 2c((A^2 + D^2)(1 - \cos 2ct) + (x_0 A + y_0 D)\cos 2ct + (x_0 D - y_0 A)\sin 2ct), \quad c \neq 0. \tag{3.17}$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (3.17) и найдем

$$\begin{gathered} z(T) - z(0) = (A^2 + D^2)(2cT - \sin 2cT) + \\ + (x_0 A + y_0 D)\sin 2ct + (x_0 D - y_0 A)(1 - \cos 2ct), \quad c \neq 0. \end{gathered} \tag{3.18}$$

Перед тем, как решить поставленную задачу для краевых условий (1.9), рассмотрим случай, когда конечное положение системы фиксировано:

$$x(T) = x_1, \quad y(T) = y_1, \quad z(T) = z_1. \tag{3.19}$$

Подставив решение (3.14) в граничные условия (1.9) и (3.19), получим

$$A = \frac{1}{2}(x_0 - x_1 + (y_0 - y_1)\operatorname{ctg}\phi), \quad \phi = cT,$$
$$D = \frac{1}{2}(y_0 - y_1 - (x_0 - x_1)\operatorname{ctg}\phi), \quad c \neq 0. \tag{3.20}$$

Подставим (3.20) в условие (3.16). Тогда

$$T^2 = \rho_1^2\left(\frac{\phi}{\sin\phi}\right)^2, \quad \rho_1 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}. \tag{3.21}$$

Теперь подставим соотношения (3.20) в формулу (3.18) и получим

$$4F = \rho_1^2 f(\phi), \quad f(\phi) = \frac{2\phi - \sin 2\phi}{\sin^2\phi},$$
$$F = z_1 - z_0 - y_0x_1 + x_0y_1, \quad z_0 = z(0). \tag{3.22}$$

На интервале $|\phi| < \pi$ функция $f(\phi)$ – нечетная и монотонная, причем растет от $-\infty$ до ∞.

Теперь опишем процедуру решения задачи оптимального быстродействия при терминальных условиях (3.19). Сначала рассмотрим общий случай $F \neq 0$ и $\rho_1 > 0$. В этом случае уравнение (3.22) для поиска ϕ имеет единственное решение на интервале $\phi \in (-\pi, \pi)$, такое, что $\phi \neq 0$, $\operatorname{sign}\phi = \operatorname{sign} F$. После нахождения ϕ можно вычислить T, используя соотношение

$$T = \frac{\rho_1\phi}{\sin\phi}, \tag{3.23}$$

следующее из (3.21), а также найти $c = \phi/T \neq 0$. Постоянные A и D заданы соотношениями (3.20), оптимальные управления – формулами (3.15), а оптимальная траектория – уравнениями (3.14).

Теперь рассмотрим вырожденный случай $F = 0$, $\rho_1 > 0$. В этом случае из определения ϕ в (3.20), соотношения для F в (3.22), а также уравнения (3.23) следует, что $\phi = 0$, $c = 0$ и $T = \rho_1$. Тогда из формул (3.6) и (3.11) вытекает, что оптимальная траектория – отрезок прямой. С учетом граничных условий получим

$$u = (x_1 - x_0)/T, \quad v = (y_1 - y_0)/T, \quad T = \rho_1,$$
$$x = x_0 + t(x_1 - x_0)/T, \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0)/T.$$

В этом случае решение также единственно.

Остается рассмотреть особый случай, когда $\rho_1 = 0$ и $F \neq 0$. В соответствии с (3.21) и (3.22)

$$x_1 = x_0, \quad y_1 = y_0, \quad F = z_1 - z_0 \neq 0. \tag{3.24}$$

Учитывая, согласно (3.22), асимптотическое поведение функции $f(\phi)$ при $|\phi| \to \pi$, а также (3.24), получаем

$$\phi = \pi \operatorname{sign} F, \quad T = \sqrt{2\pi|F|}, \quad c = \phi/T. \tag{3.25}$$

В этом случае уравнения (3.20) для A и D содержат особенности. Обращаясь к соотношениям (3.14) в случае (3.24), можно заметить, что они удовлетворяют терминальным условиям (3.19) для любых A и D при условии, что выполнено соотношение (3.16). В итоге оптимальную траекторию и оптимальное управление можно записать в следующем виде:

$$x(t) = x_0 + R_1(\cos(2ct - \theta) - \cos\theta), \quad R_1 = T/(2\pi),$$
$$y(t) = y_0 - R_1(\sin(2ct - \theta) + \sin\theta),$$
$$u(t) = -\operatorname{sign} F \sin(2ct - \theta), \quad v(t) = -\operatorname{sign} F \cos(2ct - \theta), \tag{3.26}$$

где θ – любая величина, принадлежащая полуинтервалу $[0, 2\pi)$. В данном случае оптимальная траектория неединственна и представляет собой любую окружность радиуса R_1, проходящую через начальную точку с координатами x_0 и y_0.

Теперь рассмотрим задачу с исходными граничными условиями (1.9). В этом случае для поиска значений $x(T)$ и $y(T)$ нужно использовать соответствующие условия трансверсальности. Тогда вместо (3.21) получим

$$A = (x_0 - y_0 \operatorname{tg} \phi)/2, \quad D = (x_0 \operatorname{tg} \phi + y_0)/2. \tag{3.27}$$

Введем обозначения

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad g(\phi) = (2\phi + \sin 2\phi)/\cos^2 \phi.$$

Функция $g(\phi)$ – нечетная и монотонная при $|\phi| < \pi/2$. На этом интервале она растет от $-\infty$ до ∞.

В общем случае при $z(T) \neq z(0)$ и $\rho_0 \neq 0$ решение можно получить аналогично тому, как это было сделано для случая фиксированной конечной точки. Сначала необходимо найти величину ϕ из уравнения

$$4(z_1 - z_0) = \rho_0^2 g(\phi). \tag{3.28}$$

Значение $\phi \neq 0$ единственно и $|\phi| < \pi/2$, а $\operatorname{sign}\phi = \operatorname{sign}(z_1 - z_0)$. Тогда можно найти T и c, используя соотношения

$$T = \rho_0\phi/\cos\phi, \quad c = \phi/T \neq 0.$$

Постоянные A и D заданы формулами (3.27), а единственная оптимальная траектория и соответствующее ей оптимальное управление заданы соотношениями (3.14) и (3.15).

Вырожденный случай $z_1 = z_0$ тривиален, поскольку начальное положение точки P совпадает с конечным и $T = 0$.

В особом случае, когда $\rho_0 = 0$ и $z_1 \neq z_0$, точка P в начальный момент времени $t = 0$ находится в центре масс O рассматриваемой механической системы, который в данном случае совпадает с центром масс C тела B. Тогда по аналогии с (3.25) получим

$$\phi = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(z_1 - z_0), \quad T = \sqrt{\pi|z_1 - z_0|}, \quad c = \frac{\phi}{T}. \tag{3.29}$$

Соответствующие оптимальные управления и оптимальные траектории неединственны. Их можно найти с помощью соотношений, похожих на формулы (3.26):

$$x(t) = R_2(\cos(2ct + \theta) - \cos\theta), \quad y(t) = -R_2(\sin(2ct + \theta) - \sin\theta),$$
$$u(t) = \operatorname{sign}(z_0 - z_1)\sin(2ct + \theta), \quad v(t) = \operatorname{sign}(z_0 - z_1)\cos(2ct + \theta),$$

где $R_2 = T/\pi$, а угол θ – любой, откуда следует, что оптимальной траекторией является любая полуокружность радиуса R_2, начинающаяся в точке O.

Заметим, что можно распространить использованный при $\mu \ll 1$ подход и на общий случай, когда параметр $\mu < 1$, но не является малым. Полученные выше траектории (3.14) и соответствующие им законы управления (3.15) также могут быть использованы в этом случае, но с учетом следующего замечания. Для определенности рассмотрим ситуацию, когда конечное состояние системы фиксировано (3.19) и $c \neq 0$. Как и прежде, постоянные A и D заданы формулами (3.20). Для поиска значений двух постоянных c и T есть два соотношения: условие (3.16) и равенство

$$z_1 - z_0 = \int_0^T \omega(t)dt, \quad \omega(t) = \frac{yu - xv}{1 + \mu(x^2 + y^2)}, \tag{3.30}$$

которое следует из последнего уравнения в (3.2), а также граничных условий (1.9) и (3.14) для z. Подставляя (3.14), (3.15) и (3.20) в выражение (3.30) для $\omega(t)$, получим из (3.30) второе условие для вычисления постоянных c и T (или ϕ и T). В случае, когда конечное положение точки P не задано, следует заменить соотношения (3.20) на (3.27). Найденное в итоге управление будет удовлетворять граничным условиям, но, конечно, не будет оптимальным.

4. Сравнение точного решения с приближенным. Хотя уравнения (3.3) и можно рассматривать как приближенные для исходной системы (1.8) при $\mu \ll 1$, однако траектории движения точки P, получающиеся в результате решения оптимизационной задачи для (3.3), нельзя без дополнительного доказательства считать непрерывно стремящимися при $\mu \to 0$ к траекториям, являющимся решением такой же задачи для (1.8). Это объясняется существенно нелинейным характером систем (1.8) и (3.3) и свойствами оптимального решения, которое может сложным образом зависеть от параметра μ.

Точное решение, заданное формулами (2.14) и (2.15) в случае свободного правого конца траектории, т.е. при $C_\alpha = 0$, после замены переменных (3.1) имеет вид

$$\begin{gathered}\alpha(r) = \pm\int_{r_0}^{r}\frac{d\varrho}{\sqrt{\psi(\varrho)}}, \quad \varphi(r) = \mp\int_{r_0}^{r}\frac{\mu\varrho^2 d\varrho}{(1+\mu\varrho^2)\sqrt{\psi(\varrho)}},\\ t(r) = \left|\int_{r_0}^{r}\frac{(1+\mu\varrho^2)\sqrt{C_0}d\varrho}{\sqrt{\psi(\varrho)}}\right|, \quad C_0 = \mu r_T^2\Big/(1+\mu r_T^2)^2,\\ \psi(\varrho) = C_0(1/(\mu r_T^2) - \mu\varrho^2)(r_T^2-\varrho^2), \quad r_T = \sqrt{x_T^2+y_T^2}.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь α и r – полярные координаты точки P в системе Cxy. Заметим, что по-прежнему для упрощения записей будем полагать $\alpha(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$.

С точки зрения робототехники наибольший интерес представляет случай, когда $r_T < 1$, что с учетом условия $\mu \ll 1$ дает $r_T\sqrt{\mu} < 1$. Кроме того, без ограничения общности можно полагать $\alpha \geq 0$. Тогда $r \leq r_T$ и интегралы в (4.1) можно записать, используя обычную [12] подстановку $\varrho = r_T \sin\eta$, в следующей форме:

$$\begin{gathered}\alpha(r) = \int_{\eta_0}^{\eta_r}\frac{(1+\mu r_T^2)d\eta}{\sqrt{1-\mu^2 r_T^4\sin^2\eta}}, \quad \eta_r = \arcsin\frac{r}{r_T},\\ \varphi(r) = -\alpha(r) + \int_{\eta_0}^{\eta_r}\frac{(1+\mu r_T^2)d\eta}{(1+\mu r_T^2\sin^2\eta)\sqrt{1-\mu^2 r_T^4\sin^2\eta}},\\ t(r) = r_T\int_{\eta_0}^{\eta_r}\frac{(1+\mu r_T^2\sin^2\eta)d\eta}{\sqrt{1-\mu^2 r_T^4\sin^2\eta}}, \quad \eta_0 = \arcsin\frac{r_0}{r_T}.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Как было указано выше, все интегралы в (4.2) – эллиптические и не могут быть взяты в элементарных функциях. Однако можно воспользоваться тем, что все они содержат выражение $1-\mu^2 r_T^4\sin^2\eta$, которое, в силу допущений $r_T < 1$ и $\mu \ll 1$, можно положить тождественно равным единице. Тогда нетрудно найти все интегралы в (4.2) аналитически и записать

$$\begin{gathered}\alpha(r) = \chi^2(\eta_r - \eta_0) + O(\mu^2), \quad \chi = \sqrt{\mu r_T^2 + 1},\\ \varphi(r) = -\alpha(r) + \chi(\operatorname{arctg}(\chi\operatorname{tg}\eta_r) - \operatorname{arctg}(\chi\operatorname{tg}\eta_0)) + O(\mu^2),\\ \varphi(r_T) = -\alpha(r_T) + \chi\pi/2 - \chi\operatorname{arctg}(\chi\operatorname{tg}\eta_0) + O(\mu^2),\\ t(r) = r_T(\eta_r - \eta_0) + r_T^3\left(-\frac{1}{4}\sin 2\eta_r + \frac{1}{2}\eta_r + \frac{1}{4}\sin 2\eta_0 - \frac{1}{2}\eta_0\right)\mu + O(\mu^2).\end{gathered} \tag{4.3}$$

Из выражения для $\alpha(r)$ в (4.3) можно получить

$$r(\alpha) = r_T\sin\left(\frac{\alpha}{\chi^2} + \eta_0 + O(\mu^2)\right) = r_T\sin((1-\mu r_T^2)\alpha + \eta_0) + O(\mu^2). \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) аппроксимирует окружность радиусом $r_T/2$, проходящую через начало системы координат Cxy. На рис. 2 центр этой окружности – точка Q. Траектория материальной точки P – дуга этой окружности, начинающаяся в точке S и кончающаяся в точке F. Как следует из формул (4.3), тело B при этом поворачивается на угол

$$\varphi(r) = -\frac{1}{4}r_T^2(2\eta_r - 2\eta_0 - \sin 2\eta_r + \sin 2\eta_0)\mu + O(\mu^2). \tag{4.5}$$

В случае, когда $r_0 = 0$, в конечный момент времени T из формул (4.3) и (4.5) получаем

$$\alpha(r_T) = \frac{\pi}{2} + r_T^2\mu + O(\mu^2), \quad z(T) \equiv \frac{\varphi(r_T)}{\mu} = -\frac{\pi}{4}r_T^2 + O(\mu), \quad T = \frac{\pi}{2}r_T + \frac{\pi}{4}r_T^3\mu + O(\mu^2). \tag{4.6}$$

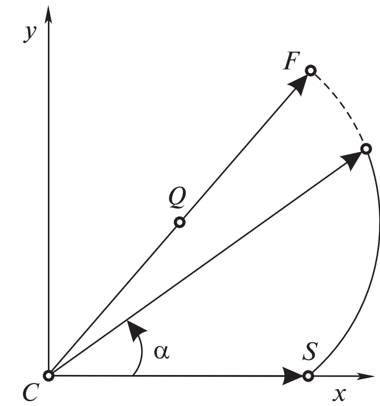

Рис. 2. Аппроксимация оптимальной траектории в случае $\mu \ll 1$

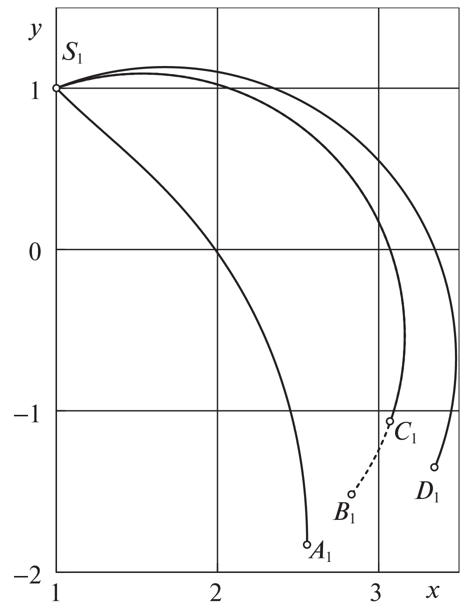

Рис. 3. Пример 1

Если исключить слагаемые, зависящие от μ, из соотношений (4.4) и (4.6), то можно заметить, что при $r_0 = 0$ оптимальная траектория является половиной окружности радиуса $r_T/2$ с центром на оси ординат, причем эта окружность проходит через начало системы координат Cxy.

Итак, приближенное решение, полученное для случая $\mu \ll 1$, близко к оптимальному в следующем смысле: оптимальная траектория является окружностью с точностью до слагаемых порядка $O(\mu^2)$; оптимальные значения полярных координат точки P и величина угла поворота тела B отличаются от соответствующих приближенных значений на величины порядка $O(\mu)$; приближенная величина функционала равна оптимальному значению с точностью до слагаемых порядка $O(\mu)$.

5. Результаты вычислений. На рис. 3–5 и связанной с ними таблице показаны три примера применения полученных результатов для различных значений параметров μ и φ_T, а также разных начальных положений точки P. В дальнейшем всюду будем понимать под i номер примера, причем первый из них соответствует рис. 3. Точки S_i на рисунках показывают начальные положения материальной точки P, а координаты этих точек, как и соответствующие значения величин M_i,

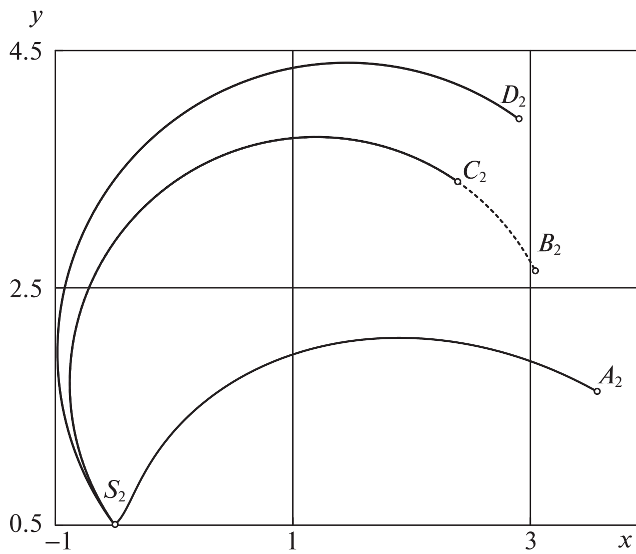

Рис. 4. Пример 2

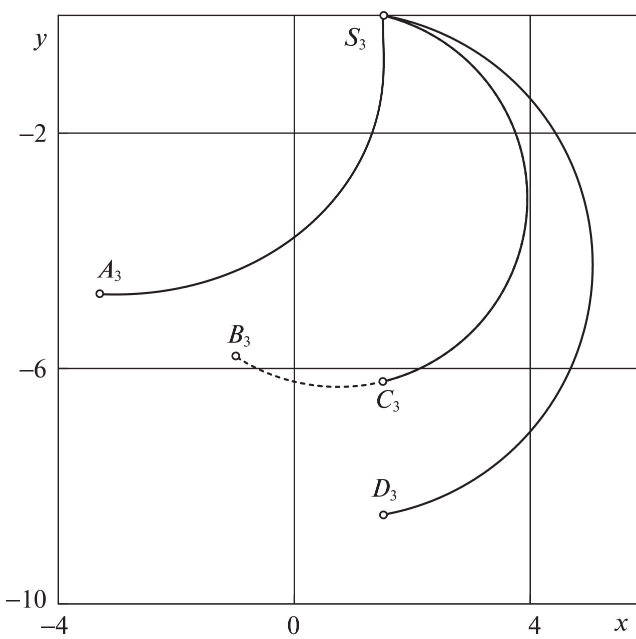

Рис. 5. Пример 3

m_i, μ_i и a_i, даны в таблице. Значения φ_{Ti} – требуемые углы поворота твердого тела B для каждого из примеров. Во всех случаях значение V было принято равным единице. Точки A_i – конечные положения материальной точки P, вычисленные, согласно первой из формул (2.16). Траектории, начинающиеся в S_i и кончающиеся в A_i, оптимальны и дают значения времени оптимального быстродействия, равные T_{Ai}. Траектории, начинающиеся в точках S_i и кончающиеся в точках C_i, соответствуют точному решению упрощенной задачи (3.3) и величинам времени оптимального быстродействия, равным T_{Ci}. Эти траектории являются дугами окружностей. Значения угла поворота твердого тела B для них всегда меньше φ_{Ti} и равны φ_{Ci}. Для удобства сравнения с остальными решениями на рисунках отмечены точки B_i, которые получены продолжением по окружности оптимальных фрагментов окружностей, т.е. соответствующим перемещением материаль-

Таблица 1. Исходные данные и результаты вычислений

i	1	2	3
M_i	900	800	1200
m_i	100	200	400
μ_i	0.10	0.20	0.25
a_i	2	3	4
S_i	(1.0; 1.0)	(−0.5; 0.5)	(1.5; 0.0)
A_i	(2.56; −1.83)	(3.57; 1.62)	(−3.30; −4.74)
B_i	(2.82; −1.53)	(3.04; 2.65)	(−1.07; −5.74)
C_i	(3.07; −1.07)	(2.39; 3.39)	(1.50; −6.22)
D_i	(3.35; −1.35)	(2.91; 3.91)	(1.50; −8.48)
φ_{Ti}	0.2	0.3	0.5
φ_{Ci}	0.166	0.234	0.342
T_{Ai}	4.15	6.73	10.9
T_{Bi}	4.17	6.81	11.2
T_{Ci}	3.64	5.81	8.54
T_{Di}	4.22	6.96	12.0

ной точки P и связанным с ним поворотом твердого тела B, вплоть до получения требуемых величин φ_{Ti}. Эти траектории также являются дугами окружностей. Значения времени движения для них равны T_{Bi}. Траектории, начинающиеся в S_i и кончающиеся в D_i, соответствуют приближенному решению, полученному с использованием формулы (3.30). Значения времени движения для них равны T_{Di}.

Из таблицы видно, что решениям, оканчивающимся в точках A_i, действительно соответствуют меньшие значения времени движения по сравнению со значениями для точек T_{Bi} и T_{Di}. С другой стороны, несмотря на то, что траектории для различных алгоритмов значительно отличаются друг от друга, величины времени движения близки друг к другу. Интересно, что значения T_{Bi} во всех трех случаях оказались лучше значений T_{Di} и отличаются от оптимальных всего лишь на несколько тысячных.

Заключение. Итак, для получения решения поставленной задачи о повороте твердого тела при помощи внутренней массы можно использовать три алгоритма. Первый представляет собой точное оптимальное решение (2.16) исходной задачи. Его недостаток – необходимость вычисления значения эллиптического интеграла. Второй алгоритм является точным оптимальным решением приближенной задачи (3.3). Его преимущество в том, что оптимальные траектории представляют собой дуги окружности, а недостаток состоит в том, что реальный угол поворота твердого тела оказывается меньше требуемого. Третий алгоритм основан на том же самом решении, что и второй, но в его рамках краевое условие на угол поворота тела выполняется точно. Однако это решение является приближенным. В рассмотренных численных примерах различие между этими алгоритмами с точки зрения времени движения мало, но траектории отличаются значительно.

Полученные результаты могут представлять интерес с точки зрения робототехники для так называемых капсульных роботов, не имеющих внешних движителей и способных перемещаться за счет движения внутренних масс. Такие роботы могут быть герметичными.

Эти результаты, в принципе, могут быть приложимы для управления ориентацией космических аппаратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Filaretov V.F., Yukhimets D.A.* Planning Smooth Paths for Mobile Robots in an Unknown Environment // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. V. 56. № 4. P. 738–748.
2. *Lapshin V.V.* Robot Motion Control in Zero-Gravity Conditions // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. V. 56. № 1. P. 157–163.
3. *Vorochaeva L.Yu., Yatsun A.S., Yatsun S.F.* Simulation of the Motion of a Five-Link Crawling Robot with Controlled Friction on a Surface Having Obstacles // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. V. 56. № 3. P. 527–552.
4. *Schmoeckel F., Worn H.* Remotely Controllable Microrobots Acting as Nano Positioners and Intelligent Tweezers in Scanning Electron Microscopes (SEMs) // Proc. Intern. Conf. Robotics and Automation, IEEE. V. 4. N.Y., 2001. P. 3903–3913.
5. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Dynamics, Design and Simulation of a Novel Microrobotic Platform Employing Vibration Microactuators // Transactions of ASME. J. Dynamical Systems, Measurement and Control. 2006. V. 128. P. 122–133.
6. *Chernousko F.L.* Two-dimensional Motions of a Body Containing Internal Moving Masses // Meccanica. 2016. V. 51. № 12. P. 3203–3209.
7. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление движением двухмассовой системы // ДАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
8. *Шматков А.М.* Поворот тела за кратчайшее время перемещением точечной массы // ДАН. 2018. Т. 481. С. 498–502.
9. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
11. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.
12. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.