УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

УДК 517.956.223

О ЗАДАЧЕ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ ДВУМЕРНЫМ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ[1]

© 2019 г. И. В. Романов[a,*], А. С. Шамаев[b,**]

[a] Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, ИПУ РАН, Москва, Россия

[b] ИПМех РАН, МГУ, Москва, Россия

*e-mail: romm1@list.ru

**e-mail: sham@rambler.ru

Поступила в редакцию 24.04.2018 г.
После доработки 31.08.2018 г.

Представлена задача граничного управления колебаниями плоской мембраны. При этом на управляющее воздействие наложено ограничение на максимум абсолютной величины. Рассмотрим возможность приведения мембраны в состояние покоя. Изложенный в данной работе метод доказательства может быть применен для любой размерности, но мы описываем плоский случай для простоты изложения и наглядности.

DOI: 10.1134/S000233881901013X

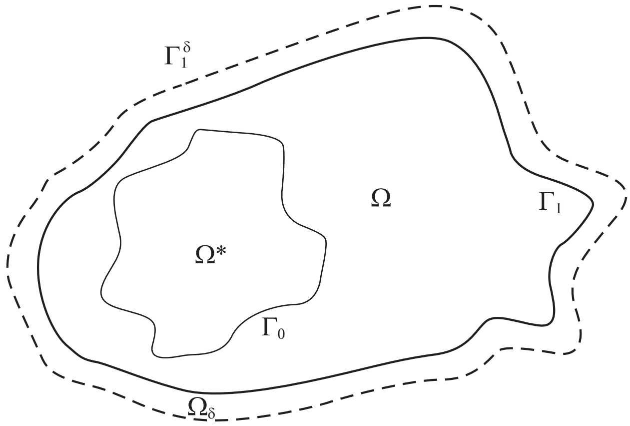
Введение. В ходе исследований была решена проблема о приведении в состояние покоя за конечное время двумерной мембраны с помощью ограниченного по абсолютной величине управляющего силового воздействия, приложенного к границе рассматриваемой мембраны. В постановке задачи управления на функции начальных данных (смещение и скорость) наложены условия гладкости и некоторые граничные условия. Граничное силовое воздействие определяется неоднородным условием Неймана. Заметим, что условия гладкости начальных данных, приведенные в данной работе, существенно более слабые, чем в [1].

Решение задачи делится на два этапа. На первом этапе производится стабилизация решения в достаточно малую окрестность состояния покоя с помощью трения, введенного на границе области. При этом достаточная малость величины управления достигается за счет выбора близкого к нулю значения коэффициента трения. В данном случае используются результаты работ [2–4], посвященные стабилизации энергии мембран посредством граничных условий специального вида. На втором этапе управления производится полное успокоение колебаний мембраны. Здесь существенную роль играет метод продолжения начальных данных на некоторую ограниченную область и рассмотрение некоторой специальной начально-краевой задачи для двумерного волнового уравнения в этой области. Тогда управлением является производная по нормали к границе исходной области, занимаемой мембраной, взятая от решения указанной начально-краевой задачи. Заметим, что способ управления на данном этапе фактически определяется способом продолжения начальных данных на упомянутую ограниченную область. Решающую роль в подобной конструкции играет обратимость классического волнового уравнения по времени. Управление такого рода использовалось в работах многих авторов 70–90-х гг.В данном случае ограничение на абсолютную величину управляющего силового воздействия выполняется в силу того, что решение исходной задачи было приведено в достаточно малую окрестность по норме некоторого соболевского пространства на первом этапе. Точные математические определения будут даны ниже.

Заметим, что изложенный в данной работе метод доказательства может быть применен в случае любой размерности, но мы рассматриваем плоский случай для простоты изложения.

Возможность полной остановки за конечное время в случае распределенного управления доказывается в [5]. Там же дана оценка сверху для оптимального времени управления.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10343).



Рисунок

Ранее вопрос об управлении колебаниями плоской мембраны с помощью граничных сил рассматривался многими авторами (например, обзорные статьи [2, 6], а также приведенная в них литература). В монографии [7] описывается задача об остановке колебаний ограниченной струны с помощью граничного управления, доказывается, что возможно за конечное время полностью остановить колебания струны при ограничении на абсолютную величину управляющего воздействия и дается оценка времени, необходимого для полной остановки колебаний. В [8] рассматриваются задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами и формулируются условия оптимальности, аналогичные принципу максимума Л.С. Понтрягина для систем с конечным числом степеней свободы. При этом указанные условия далеко не всегда приводят к конструктивному способу построения оптимального управления. В [6] приводится задача о полной остановке движения мембраны, доказывается существование такого граничного управления и оценивается время, необходимое для полной остановки колебаний. Здесь авторы во многих постановках задач отказываются от требований оптимальности управления и рассматривают только проблему управляемости, что существенно облегчает исследование. В работе не берутся задачи с ограничением на абсолютную величину управляющих сил, а также нет явных выражений для управляющих воздействий, а только доказываются теоремы существования.

Постановка задачи данной статьи существенно отличается от представленной в [2, 6], так как величина управляющего силового воздействия на границе области должна удовлетворять условию $|u(t,x)| \le \varepsilon$. Заметим также, что мы ищем здесь не оптимальное, а некоторое допустимое (удовлетворяющее исходным ограничениям) управление.

1. Постановка задачи. Пусть Ω – ограниченная область в R^2 с бесконечно гладкой границей, ν – внешняя единичная нормаль к границе области Ω, Σ – боковая поверхность цилиндра $Q_T = (0,T)\times\Omega$. Пусть также граница Ω состоит из двух частей Γ_0 и Γ_1, т.е.

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1.$$

Предположим дополнительно, что

$$\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \varnothing.$$

Таким образом, Γ_0 должна быть также границей некоторой ограниченной области Ω^*, такой, что $\Omega \cap \Omega^* = \varnothing$ (рисунок).

Обозначим

$$\Sigma_i = (0,T)\times\Gamma_i, \quad i = 0,1.$$

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебаний мембраны:

$$w_{tt}(t,x) - \Delta w(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_T, \tag{1.1}$$

$$w\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad w_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$w(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Sigma_0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = u(t, x), \quad (t, x) \in \Sigma_1. \tag{1.4}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Ставится задача построить такое управляющее воздействие u, удовлетворяющее неравенству

$$|u(t, x)| \leq \varepsilon, \tag{1.5}$$

что соответствующее решение w и его первая производная по t обращаются в нуль в некоторый момент времени T, т.е. $w(T, x) = 0$, $w_t(T, x) = 0$ для всех $x \in \Omega$. Если данная задача имеет решение, то систему (1.1)–(1.3) будем называть *управляемой*.

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{H}_0^3(\Omega) = \{(w_1, w_2) \in H^3(\Omega) \times H^2(\Omega) : w_1(x) = w_2(x) = \Delta w_1 = 0, x \in \Gamma_0\}.$$

Следующая теорема является главным результатом данной работы.

Т е о р е м а. Пусть дополнительно граница Ω удовлетворяет условию: существует точка $x_0 \in R^2$, такая, что:

1) $(x - x_0) \cdot \nu \leq 0$, $x \in \Gamma_0$,

2) $(x - x_0) \cdot \nu \geq \beta > 0$, $x \in \Gamma_1$,

кроме того, $(\varphi(x), \psi(x)) \in \mathcal{H}_0^3(\Omega)$ и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = \Delta\varphi = 0, \quad x \in \Gamma_1. \tag{1.6}$$

Тогда система (1.1)–(1.3) управляема.

Доказательство теоремы состоит из двух этапов. На первом этапе рассматриваемое решение и его первая производная по времени приводятся в достаточно малую окрестность нуля по норме $\mathcal{H}_0^3(\Omega)$, а на втором этапе из малой окрестности система приводится в полный покой.

Заметим, что на начальные данные в задаче управления накладываются условия достаточно большой гладкости. Это связано с тем, что в процессе доказательства будет использоваться теорема С.Л. Соболева о вложении для перехода от соболевской нормы к норме в пространстве гладких функций. В этом случае будет происходить потеря порядка гладкости.

2. Первый этап управления. На первом этапе поставим задачу приведения решения системы (1.1)–(1.4) и ее первой производной по переменной t в сколь угодно малую окрестность нуля по норме пространства $\mathcal{H}_0^3(\Omega)$. При этом на управляющее воздействие наложено ограничение (1.5).

Для этого воспользуемся результатами работ [3, 4]. Суть этих результатов состоит в том, что на Γ_1 вводится трение, заданное первой производной от $w(t, x)$ по переменной t, т.е. рассматривается начально-краевая задача (1.1)–(1.3) с краевым условием

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial \nu} = -k \frac{\partial w(t, x)}{\partial t}, \quad x \in \Gamma_1, \tag{2.1}$$

где $k > 0$ – коэффициент трения. Опишем коротко вопросы разрешимости данной начально-краевой задачи и регуляризации ее решения.

Введем следующие обозначения:

$$H = L_2(\Omega), \quad V = H^1_{\Gamma_0}(\Omega),$$

где

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega) : \ v(x) = 0, \, x \in \Gamma_0\right\}.$$

В пространстве $V \times H$ определим неограниченный оператор

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

с областью определения

$$D(\mathfrak{A}) = \left\{(w_1, w_2) \in H^2(\Omega)\times H^1(\Omega):\ w_1(x) = w_2(x) = 0,\ x\in\Gamma_0;\ \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = -kw_2,\ x\in\Gamma_1\right\}.$$

Известно, что квадрат нормы в пространстве $D(\mathfrak{A})$ может быть задан следующим образом:

$$\|(w_1, w_2)\|^2_{D(\mathfrak{A})} = \|(w_1, w_2)\|^2_{V\times H} + \|\mathfrak{A}(w_1, w_2)\|^2_{V\times H}. \tag{2.2}$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\overline{w}_t = \mathfrak{A}\overline{w}, \tag{2.3}$$

где $\overline{w} = (w_1, w_2)$,

Известно (см., например, [4] и цитируемую там работу [9]), что оператор $\mathfrak{A}$ – производящий оператор сжимающей полугруппы $e^{t\mathfrak{A}}$, т.е. такой полугруппы, для которой

$$\|e^{t\mathfrak{A}}\| \le 1.$$

Заметим также, что оператор $\mathfrak{A}$ является диссипативным. Действительно, для любого $\overline{v}\in D(\mathfrak{A})$ имеем

$$(\mathfrak{A}\overline{v}, \overline{v})_{V\times H} = \big((v_2, \Delta v_1), (v_1, v_2)\big)_{V\times H} = \int_\Omega \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}dx + (\Delta v_1, v_2)_H =$$
$$= \int_{\Gamma_1}\frac{\partial v_1}{\partial \nu}v_2 d\Gamma = -k\int_{\Gamma_1} v_2^2 d\Gamma \le 0,$$

что и означает диссипативность.

Из теории непрерывных полугрупп известно, что если пара начальных данных (φ,ψ) является элементом пространства $D(\mathfrak{A}^k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то для соответствующего решения системы (2.3) верно включение

$$(w_1(t), w_2(t)) \in C([0, T]; D(\mathfrak{A}^k)).$$

Предположим, что $(\varphi,\psi)\in V\times H$. Доказано (см. [3] или [4], но для более слабых условий на границу области), что для энергии системы верно неравенство

$$E(t) \le Me^{-2\gamma t}E(0), \quad t\ge 0, \tag{2.4}$$

где

$$E(t) = \int_\Omega \{w^2_{1,x_1}(t,x) + w^2_{1,x_2}(t,x) + w_2^2(t,x)\}dx$$

– энергия системы и положительные постоянные M и γ не зависят от начальных данных.

Пусть $(\varphi,\psi)\in D(\mathfrak{A})$ и $(w_1(t), w_2(t))$ – соответствующее этим начальным данным решение. Подействуем на уравнение (2.3) и начальные условия (1.2) оператором $\mathfrak{A}$. Следовательно, получим

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{A}\overline{w}(t) = \mathfrak{A}^2\overline{w}(t), \quad \mathfrak{A}\overline{w}(0) = \mathfrak{A}(\varphi,\psi).$$

Заметим, что

$$\mathfrak{A}(w_1(t), w_2(t)) = (w_2(t), \Delta w_1(t)). \tag{2.5}$$

Тогда из (2.4) и (2.5) имеем

$$\int_\Omega \{w^2_{2,x_1}(t) + w^2_{2,x_2}(t) + (\Delta w_1(t))^2\}dx \le Me^{-2\gamma t}\int_\Omega \{\psi^2_{x_1} + \psi^2_{x_2} + (\Delta\varphi)^2\}dx. \tag{2.6}$$

Объединяя (2.2), (2.4) и (2.6), получим:

$$\|(w_1(t), w_2(t))\|_{D(\mathfrak{A})} \le M_1 e^{-\gamma t}\|(\varphi,\psi)\|_{D(\mathfrak{A})}, \quad t\ge 0. \tag{2.7}$$

Пусть начальные данные являются элементом $D(\mathfrak{A})$, тогда для соответствующего решения из теории эллиптических краевых задач (см. [10, с. 98]) верна оценка

$$\|w_1(t)\|_{H^2(\Omega)} \le N_1\left(\|\Delta w_1(t)\|_{L_2(\Omega)} + k\|w_2(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} + \|w_1(t)\|_{L_2(\Omega)}\right), \tag{2.8}$$

где константа N_1 не зависит от выбора w_1. Из последней оценки, а также из (2.4) и (2.6) следует, что $w_1(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ по норме в $H^2(\Omega)$, так как w_1 закреплено на части границы.

Следствием этих оценок и рассуждений является эквивалентность норм в пространствах $D(\mathfrak{A})$ и $H^2 \times H^1$.

Перейдем теперь к рассмотрению пространства $D(\mathfrak{A}^2)$. Как и прежде, используя теорию разрешимости эллиптических краевых задач, данное пространство можно эффективно описать следующим образом:

$$D(\mathfrak{A}^2) = \left\{(w_1, w_2) \in H^3(\Omega)\times H^2(\Omega) : w_1(x) = w_2(x) = \Delta w_1(x) = 0, x \in \Gamma_0;\right.$$
$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial \nu} = -kw_2, \frac{\partial w_2}{\partial \nu} = -k\Delta w_1, x \in \Gamma_1\right\}.$$

Пусть $(w_1(t), w_2(t))$ – решение задачи (1.1)–(1.3), (2.1), тогда оно принадлежит пространству $C([0,T]; D(\mathfrak{A}^2))$. Имеем

$$\mathfrak{A}^2(w_1, w_2) = (\Delta w_1, \Delta w_2). \tag{2.9}$$

Из (2.9) и [4] следует:

$$\int_\Omega \{(\Delta w_{1,x_1}(t))^2 + (\Delta w_{1,x_2}(t))^2 + (\Delta w_2(t))^2\}dx \le Me^{-2\gamma t}\int_\Omega \{(\Delta\varphi_{x_1})^2 + (\Delta\varphi_{x_2})^2 + (\Delta\psi)^2\}dx. \tag{2.10}$$

Объединяя (2.7) и (2.10), получим

$$\|(w_1(t), w_2(t))\|_{D(\mathfrak{A}^2)} \le M_2 e^{-\gamma t}\|(\varphi,\psi)\|_{D(\mathfrak{A}^2)}, \quad t \ge 0. \tag{2.11}$$

Применяя теорию эллиптических граничных задач (см. [10, с. 98]), можно написать

$$\|w_1(t)\|_{H^3(\Omega)} \le N_2\left(\|\Delta w_1(t)\|_{H^1(\Omega)} + k\|w_2(t)\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} + \|w_1(t)\|_{L_2(\Omega)}\right), \tag{2.12}$$

$$\|w_2(t)\|_{H^2(\Omega)} \le N_3\left(\|\Delta w_2(t)\|_{L_2(\Omega)} + k\|\Delta w_1(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} + \|w_2(t)\|_{L_2(\Omega)}\right), \tag{2.13}$$

где константы N_2 и N_3 не зависят от выбора (w_1, w_2).

Из (2.6) и (2.10) получаем, что $\Delta w_1(t)$ стремится к нулю (при $t \to +\infty$) по норме в $H^1(\Omega)$. Следовательно, по теореме С.Л. Соболева о следах $\Delta w_1(t)$ будет стремиться к нулю и по норме $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Тогда, используя также (2.4), (2.13) и снова (2.10), получаем, что $w_2(t)$ стремится к нулю (при $t \to +\infty$) по норме в $H^2(\Omega)$. Таким образом из оценки (2.12) вытекает, что $w_1(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ по норме в $H^3(\Omega)$, так как w_1 закреплено на части границы.

Следствием этих оценок и рассуждений является эквивалентность норм в пространствах $D(\mathfrak{A}^2)$ и $H^3 \times H^2$.

При заданных начальных условиях решим задачу (1.1)–(1.3), (2.1), затем данное решение подставим *только* в правую часть равенства (2.1), получим краевое условие (1.5) для начально-краевой задачи (1.1)–(1.4). Другими словами, управляющее воздействие в задаче (1.1)–(1.4) на первом этапе мы положим равным

$$u^{(1)}(t,x) = -k\frac{\partial w_1^0(t,x)}{\partial t}$$

на Γ_1. Здесь w_1^0 – решение задачи (1.1)–(1.3), (2.1).

Следовательно, доказано, что, управляя достаточно долго, можно сделать величину

$$\|(w(T_1,\cdot), w_t(T_1,\cdot))\|_{\mathcal{H}_0^3(\Omega)}$$

сколь угодно малой в некоторый момент времени $t = T_1$. Заметим, что для функций $\phi(x)$, $\psi(x)$ должны выполняться следующие условия:

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\nu} = -k\psi(x), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\nu} = -k\Delta\varphi x \in \Gamma_1. \tag{2.14}$$

Посредством (1.6) условие (2.14) выполнено для любого k.

Покажем теперь, что граничное управляющее воздействие $u(t,x)$ можно сделать также достаточно малым, т.е. удовлетворить ограничению (1.5). Для этого заметим, что в силу сжимаемости полугруппы, порожденной оператором $\mathfrak{A}$, верно равенство

$$\max_{t\in[0,+\infty)} E(t) = E(0) = \int_\Omega (\varphi_{x_1}^2(x) + \varphi_{x_2}^2(x) + \psi^2(x))dx.$$

Следовательно, можно написать

$$\left\| e^{t\mathfrak{A}}(\varphi,\psi) \right\|_{D(\mathfrak{A}^2)} \le \|(\varphi,\psi)\|_{D(\mathfrak{A}^2)}.$$

Таким образом, используя теоремы С. Л. Соболева о вложении и (2.13), получим

$$\begin{gathered}\|w_2(t)\|_{C(\bar\Omega)} \le C_1\|w_2(t)\|_{H^2(\Omega)} \le C_2\|\Delta w_2(t)\|_{L_2(\Omega)} + kC_2\|\Delta w_1(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} + C_2\|w_2(t)\|_{L_2(\Omega)} \le \\ \le C_2\|w_2(t)\|_{H^1(\Omega)} + C_2\|\Delta w_2(t)\|_{L_2(\Omega)} + kC_3\|\Delta w_1(t)\|_{H^1(\Omega)} + C_2\|w_2(t)\|_{L_2(\Omega)} \le \\ \le (C_4 + kC_5)\left\|e^{t\mathfrak{A}}(\varphi,\psi)\right\|_{D(\mathfrak{A}^2)} \le (C_4 + kC_5)\|(\varphi,\psi)\|_{D(\mathfrak{A}^2)}.\end{gathered}$$

Так как коэффициент k можно выбрать сколь угодно близким к нулю, то в силу последней оценки величина $\|w_2(t)\|_{C(\bar\Omega)}$ ограничена. Также заметим, что в силу краевых условий (1.6) начальные данные (φ,ψ) будут элементом пространства $D(\mathfrak{A}^2)$ при любом k. Выбирая коэффициент трения k достаточно малым, получим, что условие (1.5) выполнено.

3. Второй этап управления. Поставим теперь задачу о приведении рассматриваемой системы в полный покой. Функции $w|_{t=0} = w(T_1,x)$ и $w_t|_{t=0} = w_t(T_1,x)$ будем считать новыми начальными данными в задаче (1.1)–(1.4). Напомним, что, согласно доказанному выше, эти начальные условия (пара функций) достаточно малы по норме пространства $\mathscr{H}_0^3(\Omega)$.

Рассмотрим область Ω_δ, которая по определению является δ-окрестностью области Ω без точек множества $\bar\Omega^*$ (рисунок). Область Ω_δ построим так, чтобы внешний контур ее границы (назовем его Γ_1^δ) удовлетворял п. 2) условия, которое содержится в формулировке теоремы. Пусть также ν_δ – внешняя единичная нормаль к границе области Ω_δ.

Определим пространство

$$\mathscr{H}_0^3(\Omega_\delta) = \{(w,v)\in H^3(\Omega_\delta)\times H^2(\Omega_\delta){:}\ w(x) = v(x) = \Delta w(x) = 0,\ x\in\Gamma_0\}.$$

Рассмотрим также произвольную пару функций

$$(f(x), g(x))$$

из пространства $\mathscr{H}_0^3(\Omega)$. Продолжим эту пару к нулю (линейный оператор продолжения

$$E : \mathscr{H}_0^3(\Omega) \to \mathscr{H}_0^3(\Omega_\delta)$$

существует и ограничен) на область Ω_δ с сохранением гладкости. Конструкция оператора продолжения E хорошо известна и подробно описана в [11].

Продолженные таким образом функции начальных данных будем, следуя Д.Л. Расселу, обозначать соответственно $f^e(x)$ и $g^e(x)$.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебания мембраны в области Ω_δ:

$$w_{tt}(t,x) - \Delta w(t,x) = 0, \quad (t,x)\in Q = (0,+\infty)\times\Omega_\delta, \tag{3.1}$$

$$w|_{t=0} = f^e(x), \quad w_t|_{t=0} = g^e(x), \quad x\in\Omega_\delta, \tag{3.2}$$

$$w(t,x) = 0, \quad (t,x)\in(0,+\infty)\times\Gamma_0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial \nu_\delta} = -k\frac{\partial w(t,x)}{\partial t}, \quad x \in \Gamma_1^\delta. \tag{3.4}$$

Для решения задачи (3.1)–(3.4) аналогично предыдущему разделу имеет место оценка

$$\|(w(t), w_t(t))\|_{V_\delta \times H_\delta} \le M_4 e^{-\gamma t} \|(f^e, g^e)\|_{V_\delta \times H_\delta}, \quad t \ge 0, \tag{3.5}$$

где

$$V_\delta = \{v \in H^1(\Omega_\delta): v(x) = 0,\ x \in \Gamma_0\}, \quad H_\delta = L_2(\Omega_\delta).$$

Далее будем использовать метод (в измененном виде), описанный в [2] и примененный в задачах граничного управления для волнового уравнения.

Пусть имеются некоторые начальные условия $f(x)$ и $g(x)$, $x \in \Omega$. Продолжим их на Ω_δ с помощью линейного ограниченного оператора E. Тогда $(f^e, g^e) = E(f, g)$. Получаем начально-краевую задачу (3.1)–(3.4). Пусть $w^s(t,x)$ – решение данной задачи. Для области Ω_δ рассмотрим оператор $\mathfrak{A}_\delta$, который строится совершенно аналогично оператору $\mathfrak{A}$ для области Ω. Тогда выполнена оценка

$$\|(w_1^s(t), w_2^s(t))\|_{D(\mathfrak{A}_\delta^2)} \le M_5 e^{-\gamma_1 t} \|(f^e, g^e)\|_{D(\mathfrak{A}_\delta^2)}, \quad t \ge 0. \tag{3.6}$$

А в силу эквивалентности норм верно

$$\|(w_1^s(t), w_2^s(t))\|_{\mathcal{H}_0^3(\Omega_\delta)} \le M_6 e^{-\gamma_1 t} \|(f^e, g^e)\|_{\mathcal{H}_0^3(\Omega_\delta)}, \quad t \ge 0. \tag{3.7}$$

Рассмотрим достаточно большой момент времени $t = T_2$ и ограничение решения и его производной по времени в момент T_2 на область Ω. Очевидно, что для $t = T_2$ в силу (3.7) и непрерывности оператора E верна оценка

$$\|(w_1^s(T_2,\cdot), w_2^s(T_2,\cdot))\|_{\mathcal{H}_0^3(\Omega)} \le M_7 e^{-\gamma_1 T_2} \|(f, g)\|_{\mathcal{H}_0^3(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Пусть по определению

$$(w_1^{s,e}(T_2,x), w_2^{s,e}(T_2,x)) = E(w_1^s(T_2,x)|_\Omega, w_2^s(T_2,x)|_\Omega).$$

Приведем теперь начально-краевую задачу в обратном времени (т.е. при $t \leqslant T_2$) для уравнения (остается неизменным)

$$\frac{d}{dt}(w_1, w_2) = (w_2, \Delta w_1) \tag{3.9}$$

с краевым условием на Γ_1^δ

$$\frac{\partial w_1}{\partial \nu_\delta} = k w_2, \tag{3.10}$$

условием (3.3) на Γ_0 и начальными условиями

$$w_1(t)\big|_{t=T_2} = -w_1^{s,e}(T_2,x), \quad w_2(t)\big|_{t=T_2} = -w_2^{s,e}(T_2,x). \tag{3.11}$$

Пусть $(w_1^i(t), w_2^i(t))$ – решение начально-краевой задачи (3.3), (3.9), (3.10) (3.11) в обратном времени. Аналогично предыдущему выполнена оценка

$$\|(w_1^i(0,\cdot), w_2^i(0,\cdot))\|_{\mathcal{H}_0^3(\Omega)} \le M_7 e^{-\gamma_1 T_2} \|(w_1^s(T_2,x), w_2^s(T_2,x))\|_{\mathcal{H}_0^3(\Omega)}. \tag{3.12}$$

Рассмотрим сумму решений в прямом и обратном времени, ограниченную на область Ω:

$$w(t,x) = w^s(t,x) + w^i(t,x), \quad x \in \Omega. \tag{3.13}$$

Эта сумма удовлетворяет уравнению (1.1), а в качестве искомого граничного управляющего воздействия $u(t,x)$ можно взять ограничение производной по внешней нормали от $w(t,x)$ на боковую поверхность цилиндра.

Очевидно, что решение (3.13) с начальными условиями вида

$$w\big|_{t=0} = f^e(x) + w^{i,r}(0,x), \quad w_t\big|_{t=0} = g^e(x) + w_t^{i,r}(0,x), \quad x \in \Omega, \tag{3.14}$$

(индекс r означает ограничение на Ω) тождественно равно нулю в Ω вместе со своей первой производной по t в момент времени $t = T_2$. Заметим, что значение соответствующего решения начально-краевой задачи с начальными условиями (3.14) на границе области Ω и определяет искомое управление.

Пара $(w_1^{i,r}(0,x), w_2^{i,r}(0,x))$ получается из пары $(f(x), g(x))$ применением некоторого линейного непрерывного оператора, назовем его L с нормой, меньшей единицы (следствие оценок (3.8) и (3.12)). Очевидно, что суммы в правых частях (3.14) дают все элементы пространства $\mathcal{H}_0^3(\Omega)$. Действительно, (3.14) можно записать как

$$(I+L)(f(x), g(x)) = (w|_{t=0}, w_t|_{t=0}), \tag{3.15}$$

где I – тождественный оператор. Следовательно, так как $\|L\| < 1$, то оператор $I+L$, действующий из $\mathcal{H}_0^3(\Omega)$ в себя, обратим.

Теперь представим искомую функцию управления (на втором этапе) в следующем виде:

$$u^{(2)}(t,x) = \frac{\partial}{\partial \nu} P[(S_+(t) - S_-(T_2 - t)ERS_+(T_2))E(I+L)^{-1}\{w|_{t=0}, w_t|_{t=0}\}], \tag{3.16}$$

$x \in \Gamma_1$, где R – оператор ограничения из Ω_δ на область Ω, $S_+(t)$, $S_-(T_2 - t)$ – разрешающие операторы диссипативной задачи в прямом и обратном времени соответственно, P – проекция: $(a,b) \mapsto a$ и

$$L = -RS_-(T_2)ERS_+(T_2)E.$$

Таким образом, доказана возможность приведения в покой системы с произвольными гладкими начальными данными. Покажем теперь, что, выбирая начальные данные достаточно малыми, можно привести систему в покой малым по модулю граничным управлением.

Пусть пара $(w|_{t=0}, w_t|_{t=0})$ достаточно мала по норме пространства $\mathcal{H}_0^3(\Omega)$. Из формулы (3.16) автоматически следует достаточная малость управления $u^{(2)}(t,x)$, так как все операторы, входящие в эту формулу, непрерывны.

Следовательно, ограничение нормальной производной от решения начально-краевой задачи на границу области Ω (условие Неймана в задаче управления) будет меньше наперед заданного ε по абсолютной величине, если время управления на первом этапе выбрать достаточно большим. Последнее и означает, что выполнено требуемое ограничение на управляющее воздействие $u(t,x)$. Теорема доказана.

Заключение. Доказано существование граничного управления, приводящего колебания мембраны в покой за конечное время. При этом на само управляющее воздействие наложено ограничение по абсолютной величине. В формулировке основной теоремы начальное смещение, начальная скорость и геометрия границы мембраны удовлетворяют некоторым условиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Romanov I., Shamaev A.* Exact Bounded Boundary Controllability to Rest for the Two-Dimensional Wave Equation. arXiv. doi 1603.01212. 2018.
2. *Russell D. L.* Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations: Recent Progress and Open Questions // SIAM Review. 1978. V. 20. № 4. P. 639–739.
3. *Chen G.* Energy Decay Estimates and Exact Boundary Value Controllability for the Wave Equation in a Bounded Domain // J. Math. Pures Appl. 1979. № 58. P. 249–274.
4. *Lagnese J.* Decay of Solutions of Wave Equations in a Bounded Region with Boundary Dissipation // J. Differential Equations. 1983. № 50. P. 163–182.
5. *Черноусько Ф.Л.* Ограниченное управление в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1992. Т. 56. № 5. С. 810–826.
6. *Lions J.L.* Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems // SIAM Review. 1988. V. 30 № 1. P. 1–68.
7. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
8. *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
9. *Quinn J.P., Russell D.L.* Asymptotic Stability and Energy Decay Rates for Solutions of Hyperbolic Equations with Boundary Damping // Proc. Roy. Sot. Edinburgh Sect. A. 1977. V. 77. P. 97–127.
10. *Агранович М.С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М.: МЦНМО, 2013.
11. *Lions J. L., Madgenes E.* Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications.V. 1. N.Y: Springer-Verlag, 1972.