

**Механизация, электрификация, автоматизация и цифровизация**

УДК 631.361.43

DOI: 10.31857/S2500262721060120

**МЕТОД РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЗЕРНА В ПНЕВМОМЕХАНИЧЕСКОМ ШЕЛУШИТЕЛЕ**

**Ю.Ф. Лачуга<sup>1</sup>**, академик РАН, **Р.И. Ибятгов<sup>2</sup>**, доктор технических наук,  
**Ю.Х. Шогенов<sup>1</sup>**, член-корреспондент РАН, **Б.Г. Зиганшин<sup>2</sup>**,  
 доктор технических наук, **А.В. Дмитриев<sup>2</sup>**, кандидат технических наук

<sup>1</sup>Российская академия наук,  
 119991, Москва, Ленинский проспект, 32а  
<sup>2</sup>Казанский государственный аграрный университет,  
 420015, Казань, ул. К. Маркса, 65  
 E-mail: zigan66@mail.ru

*Рассматривается движение зерна в рабочем пространстве пневмомеханического шелушителя, образованном вращающимся лопастным диском и реверсивной декой, которая вращается вокруг лопастного диска в обратном направлении. Эффективность шелушения при работе указанного устройства определяют скорость зерновки и направление ее движения при ударе о деку. Из-за вращения лопастного диска и деки в разных направлениях в рабочем пространстве создаются зоны с противоположным движением воздушного потока. Возникают большие градиенты, которые необходимо учитывать через дифференциальные характеристики при расчете траектории полета зерновки. Исследования проводили с целью разработки математической модели движения зерновки, учитывающей изменчивость влияния вращающегося воздушного потока. Обсуждены существующие подходы моделирования многофазных сред, приведены их недостатки. Поэтому для достижения поставленной цели использовали комбинацию рассмотренных подходов, при которой векторное уравнение движения дисперсной частицы в лагранжевой системе координат решается с учетом скорости и дифференциальных характеристик сплошной среды в эйлеровой системе координат. В дифференциальном уравнении движения зерновки, записанном в лагранжевых координатах, вектор ее скорости заменяется относительной скоростью, которая в свою очередь определяют две скалярные величины – модуль относительной скорости и его направление. Для расчета введенных скалярных величин построены дифференциальные уравнения, в составе которых присутствуют скорости и дифференциальные характеристики воздушного потока в эйлеровой системе координат. При увеличении угла между радиус-вектором и направлением вектора скорости зерновки в момент срыва модуль относительной скорости уменьшается, а угол направления относительной скорости возрастает.*

**METHOD FOR CALCULATING THE TRAJECTORY OF GRAIN MOVEMENT IN PNEUMOMECHANICAL PEELING MACHINE**

**Lachuga Yu.F.<sup>1</sup>, Ibyatov R.I.<sup>2</sup>, Shogenov Yu.Kh.<sup>1</sup>, Ziganshin B.G.<sup>2</sup>, Dmitriev A.V.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Russian Academy of Sciences,  
 119991, Moscow, Leninsky prosp., 32a  
<sup>2</sup>Kazan State Agrarian University,  
 420015, Kazan, ul. K. Marxa, 65  
 E-mail: zigan66@mail.ru

*The paper considers the movement of grain in the working space of a pneumomechanical husker formed by a rotating blade disk and a reversible deck that rotates around the blade disk in the opposite direction. The efficiency of peeling in the case of operation of the described pneumomechanical husker is determined by the value of the grain speed and its direction of movement when hitting the deck. Due to the rotation of the blade disk and the deck in different directions, zones with opposite directions of air flow are created in the working space. Large gradients arise, which must be taken into account through its differential characteristics when calculating the grain flight path. The research was carried out in order to develop a mathematical model of grain movement that takes into account the variability of the influence of the rotating air flow. The existing approaches to modeling multiphase media are discussed, their disadvantages are presented. With this in mind, to achieve this goal, a combination of the above-mentioned approaches to modeling is used, when the vector equation of motion of a dispersed particle in a Lagrangian coordinate system is solved taking into account the velocities and differential characteristics of a continuous medium in an Eulerian coordinate system. In the differential equation of grain motion written in Lagrangian coordinates, the grain velocity vector is replaced by the relative velocity, which in turn is determined by two scalar quantities—the module of the relative velocity and its direction. To calculate the introduced scalar quantities, differential equations are constructed, which contain the velocities and differential characteristics of the air flow in the Eulerian coordinate system. The results of the numerical solution of the constructed differential equations are presented. The changes in the relative velocity modulus and its direction are shown for different values of the grain break angle from the edge of the disk.*

**Ключевые слова:** пневмомеханический шелушитель, траектория зерна, интенсивный воздушный поток, лагранжевая система координат, эйлеровая система координат

**Key words:** pneumomechanical husker, grain trajectory, intensive air flow, Lagrangian coordinate system, Eulerian coordinate system

Рабочий орган машин для пневмомеханического шелушения зерна – лопастной диск (ротор), который вращается внутри закрытой сверху цилиндрической рабочей поверхности (деки). На него подается зерновой материал, разгоняемый и выбрасываемый в направлении деки, при ударе о которую происходит шелушение [1]. Результаты теоретических исследова-

ний взаимодействия зерновки с рабочими поверхностями такой машины [2, 3, 4] показали сложный характер ее движения после отрыва от лопастного диска и недостаточную изученность этого процесса.

Свободный полет зерновки после срыва с ротора можно считать горизонтальным из-за достаточно большой скорости и малого расстояния между лопастным

диск и декой, которая вращается вокруг лопастного диска в противоположную сторону. Следовательно, математическую модель ее движения можно строить в двухмерной постановке. При этом следует учитывать, что движение воздушного потока между вращающимися ротором и декой осесимметрично и стационарно.

На сегодняшний день для описания моделей суспензий жидкостей или газов с твердыми или жидкими частицами существуют разные подходы [5, 6, 7]. Согласно одному из них основой для решения множества практических задач служит феноменологическая теория многофазных, многоскоростных взаимопроникающих континуумов [8, 9, 10]. Многофазная среда представляется некоторым идеализированным математическим пространством, в каждой точке которого одновременно находятся частицы всех компонентов. Для каждой из них в каждой точке определяется плотность, скорость и другие параметры, относящиеся к той или иной составляющей смеси. Математическое моделирование такой среды основано на уравнениях типа Навье-Стокса, которые записывают для конкретной геометрической области течения и решают с учетом соответствующих граничных условий. Однако использование для каждой из фаз полной системы уравнений сохранения, записанных в эйлеровой системе координат, вызывает большие затруднения при реализации решения.

Другой подход к моделированию многофазных сред предусматривает использование уравнений динамики материальной точки, записанных в лагранжевой системе координат [11, 12]. Влияние сплошной среды учитывают через коэффициент сопротивления частицы в неоднородной среде, который определяют экспериментальным путем с учетом ее формы, вязкости потока и др. [13, 14, 15]. Однако траектория частицы, как правило, не совпадает с траекторией средней скорости основного потока. Это связано с тем, что локальные компоненты тензора напряжений сплошного потока, влияющие на траекторию частицы, неоднородны. Кроме того, в условиях больших градиентов воздушного потока не учитываются его дифференциальные характеристики, которые также оказывают сильное воздействие на траектории движения частицы. В этом состоит недостаток второго подхода.

Цель исследований – разработка математической модели движения зерна в рабочем пространстве пневмомеханического шелушителя с учетом изменчивости влияния параметров вращающегося воздушного потока.

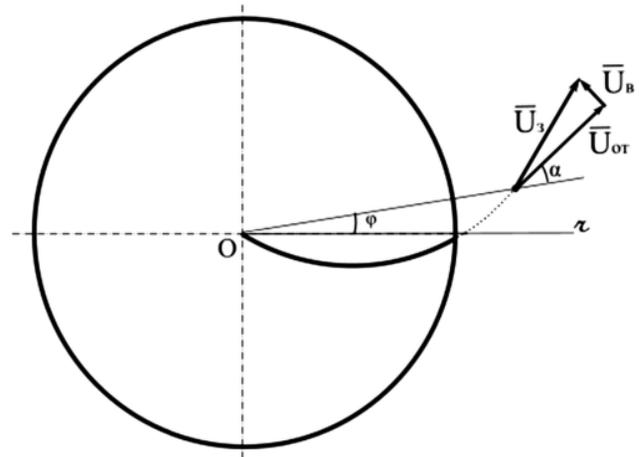
**Методика.** При проведении исследований использовали комбинацию упомянутых подходов к моделированию многофазных сред, при которой векторное уравнение движения дисперсной частицы в лагранжевой системе координат решается с учетом скоростей и дифференциальных характеристик сплошной среды в эйлеровой системе координат.

Движение зерна в рабочем пространстве шелушителя после отрыва от лопастного диска можно описать с помощью дифференциального уравнения записанного в лагранжевых координатах [2, 3, 4]:

$$\frac{d\bar{U}_3}{dt} = -k(\bar{U}_3 - \bar{U}_a)^2, \quad (1)$$

где  $\bar{U}_3, \bar{U}_a$  – вектора скоростей зерна и воздушного потока, м/с;

$k = 3c_\mu \rho_a / 4d\rho_3$  – коэффициент парусности зерновки, 1/м (где  $c_\mu$  – коэффициент сопротивления воздуш-



**Рис. 1.** К расчету траектории движения зерна ( $\bar{U}_3, \bar{U}_a, \bar{U}_{от}$  – вектора скоростей зерновки, воздушного потока и относительной скорости, м/с;  $\alpha$  – угол наклона относительной скорости, рад;  $(r, \varphi)$  – полярные координаты).

ному потоку, зависящий от формы зерна и свойств его поверхности;  $\rho_a$  – плотность воздуха, кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_3$  – плотность зерновки, кг/м<sup>3</sup>;  $d$  – эквивалентный диаметр зерновки, м).

Рассмотрим вектор относительной скорости  $\bar{U}_{om} = \bar{U}_3 - \bar{U}_a$ , который определяется с использованием модуля относительной скорости  $u = |\bar{U}_{om}|$  и его направления. Направления относительной скорости зададим углом  $\alpha$ , равным значению угла поворота от радиальной оси системы координат  $Or$  до вектора относительной скорости зерна (рис. 1). В качестве положительного направления угла поворота возьмем, как это принято в тригонометрии, направление против часовой стрелки. При этом диапазон изменения угла  $\alpha$  в интервале  $(0, \pi/2]$  будет соответствовать полету зерновки по направлению вращения ротора, в интервале  $[-\pi/2, 0)$  – по направлению вращения деки. При  $\alpha=0$  зерновка меняет направление своей окружной скорости. Поскольку ротор и дека вращаются в противоположных направлениях, между ними существует поверхность, где тангенциальная скорость воздушного потока равна нулю. На этой поверхности направление окружной скорости зерновки остается положительным, поскольку изменение ее знака происходит под действием обратного потока сплошной фазы.

Относительную скорость представим в виде вектора:

$$\bar{U}_{om} = (u \cos \alpha, u \sin \alpha) = u\bar{e} \quad (2)$$

где  $\bar{e} = (e_r, e_\varphi) = \cos \alpha \cdot i + \sin \alpha \cdot j$  – единичный вектор относительной скорости ( $\bar{i}$  и  $\bar{j}$  – орты цилиндрической системы координат  $(r, \varphi)$ ).

С учетом введенного обозначения уравнение (1) примет вид:

$$\frac{d\bar{U}_3}{dt} = -ku^2\bar{e}. \quad (3)$$

Поскольку  $\bar{U}_3 = \bar{U}_a + \bar{U}_{om}$ , левую часть этого уравнения с учетом (2) можно представить через относительную скорость и вектора скорости воздушного потока:

$$\frac{d\bar{U}_3}{dt} = \frac{d\bar{U}_a}{dt} + u \frac{d\bar{e}}{dt} + \frac{du}{dt} \bar{e}.$$

Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\left(\frac{du}{dt} + ku^2\right)\bar{e} + u\frac{d\bar{e}}{dt} = -\frac{d\bar{U}_s}{dt}. \quad (4)$$

Распишем правую часть уравнения (4). Для полной производной воздушного потока имеем [9]:

$$\frac{d\bar{U}_s}{dt} = \frac{\partial\bar{U}_s}{\partial t} + \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial t} \cdot \bar{\nabla}\right)\bar{U}_s, \quad (5)$$

где  $\bar{\nabla}$  – векторный дифференциальный оператор Гамильтона, компоненты которого частные производные по координатам

Слагаемое  $\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial t} \cdot \bar{\nabla}\right)\bar{U}_s$  – производная вектора  $\bar{U}_s$  по направлению вектора  $\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}$ . Первое слагаемое правой

части (5) характеризует локальное изменение скорости во времени из-за нестационарности поля скорости. Второе слагаемое называется конвективным членом, так как оно появляется только при движении сплошной среды. Так как слагаемое (5) – составная часть или осколок уравнения движения (3), который описывает конвекцию сплошной среды на траектории движения зерновки, можно представить  $\frac{\partial\bar{x}}{\partial t} = \bar{U}_s$ . Тогда, с учетом зависимости  $\bar{U}_s = \bar{U}_s + \bar{U}_{om}$ , соотношение (5) для стационарного случая запишется так:

$$\frac{d\bar{U}_s}{dt} = (\bar{U}_s \cdot \bar{\nabla})\bar{U}_s + (\bar{U}_{om} \cdot \bar{\nabla})\bar{U}_s.$$

В итоге, уравнение (4) примет вид:

$$\left(\frac{du}{dt} + ku^2\right)\bar{e} + u\frac{d\bar{e}}{dt} = -(\bar{U}_s \cdot \bar{\nabla})\bar{U}_s - (\bar{U}_{om} \cdot \bar{\nabla})\bar{U}_s. \quad (6)$$

Распишем правую часть уравнения (6) в цилиндрической системе координат  $(r; \varphi)$ . Для этого в начале выразим его через векторные функции. Воспользуемся известными формулами векторного анализа [16]:

$$\text{grad}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\bar{a} \cdot \bar{\nabla})\bar{b} + (\bar{b} \cdot \bar{\nabla})\bar{a} + \bar{a} \times \text{rot}\bar{b} + \bar{b} \times \text{rot}\bar{a}$$

$$\text{rot}(\bar{a} \times \bar{b}) = -(\bar{a} \cdot \bar{\nabla})\bar{b} + (\bar{b} \cdot \bar{\nabla})\bar{a} + \bar{a} \text{div}\bar{b} - \bar{b} \text{div}\bar{a}$$

Сумма этих уравнений дает:

$$\frac{(\bar{b} \cdot \bar{\nabla})\bar{a} + (\bar{a} \cdot \bar{\nabla})\bar{b}}{\bar{a} - \bar{a} \text{div}\bar{b} + \bar{b} \text{div}\bar{a}} = [\text{grad}(\bar{a} \cdot \bar{b}) + \text{rot}(\bar{a} \times \bar{b}) - \bar{a} \times \text{rot}\bar{b} - \bar{b} \times \text{rot}\bar{a}] / 2 \quad (7)$$

Отсюда, при  $\bar{a} = \bar{b} = \bar{U}_s$ , после ряда достаточно громоздких преобразований получим [5, 9]:

$$(\bar{U}_s \cdot \bar{\nabla})\bar{U}_s = P_r \cdot \bar{i} + P_\varphi \cdot \bar{j}, \quad (8)$$

где  $P_r = V_s \frac{\partial V_s}{\partial r} + \frac{W_s}{r} \frac{\partial V_s}{\partial \varphi} - \frac{W_s^2}{r}$ ,

$$P_\varphi = V_s \frac{\partial W_s}{\partial r} + \frac{W_s}{r} \frac{\partial W_s}{\partial \varphi} + \frac{V_s W_s}{r}.$$

Здесь через  $V_s, W_s$  обозначены компоненты вектора скорости воздушного потока, направленные по осям  $r$  и  $\varphi$ .

Если принять  $\bar{a} = \bar{U}_s, \bar{b} = \bar{U}_{om}$ , то зависимость (8) можно привести к виду

$$(\bar{U}_{om} \cdot \bar{\nabla})\bar{U}_s = E_r \cdot \bar{i} + E_\varphi \cdot \bar{j},$$

где  $E_r = u \left[ \cos \alpha \frac{\partial V_s}{\partial r} + \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial V_s}{\partial \varphi} - \sin \alpha \frac{W_s}{r} \right]$ ,

$$E_\varphi = u \left[ \cos \alpha \frac{\partial W_s}{\partial r} + \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial W_s}{\partial \varphi} + \sin \alpha \frac{V_s}{r} \right].$$

С учетом полученных соотношений векторное уравнение (6) запишем по координатам  $r$  и  $\varphi$ . Так как

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = (-\sin \alpha \cdot \bar{i} + \cos \alpha \cdot \bar{j}) \frac{d\alpha}{dt},$$

уравнение (6) примет вид:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{du}{dt} + ku^2 \right) \cos \alpha - u \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \right] \cdot \bar{i} + \\ & + \left[ \left( \frac{du}{dt} + ku^2 \right) \sin \alpha + u \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} \right] \cdot \bar{j} = \\ & = -(P_r + E_r) \cdot \bar{i} - (P_\varphi + E_\varphi) \cdot \bar{j}. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\left( \frac{du}{dt} + ku^2 \right) \cos \alpha - u \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -P_r - E_r, \quad (9)$$

$$\left( \frac{du}{dt} + ku^2 \right) \sin \alpha + u \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -P_\varphi - E_\varphi. \quad (10)$$

Рассмотрим сумму уравнений (8) и (9), умноженных соответственно на  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$ . После несложных преобразований получим обыкновенное дифференциальное уравнение для модуля относительной скорости:

$$\frac{du}{dt} = -ku^2 - (P_r + E_r) \cos \alpha - (P_\varphi + E_\varphi) \sin \alpha. \quad (11)$$

Теперь из уравнения (9), умноженного на  $\cos \alpha$ , вычтем уравнение (8), умноженное на  $\sin \alpha$ . В результате дальнейших преобразований получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно угла  $\alpha$ :

$$\frac{d\alpha}{dt} = (P_r + E_r) \frac{\sin \alpha}{u} - (P_\varphi + E_\varphi) \frac{\cos \alpha}{u}. \quad (12)$$

Таким образом, для определения модуля относительной скорости зерновки и ее направления получена система двух скалярных уравнений (11)-(12), которые могут быть решены численно. Для этого с учетом скоростей зерновки и воздушного потока у кромки диска были выбраны следующие начальные условия:

$$u(0) = \sqrt{|\bar{U}_s|^2 + |\bar{U}_s|^2 - 2|\bar{U}_s||\bar{U}_s| \sin \beta},$$

$$\alpha(0) = \beta - \arcsin \left( \frac{|\bar{U}_s|}{u(0)} \cos \beta \right).$$

Через  $\beta$  обозначен угол между радиус-вектором и направлением вектора скорости зерновки в момент срыва. Характеристики воздушного потока задавали по результатам ранее проведенных исследований [4].

**Результаты и обсуждение.** Анализ влияния направления вектора скорости зерна в момент ее срыва с кромки диска на модуль относительной скорости  $u$  и угол ее наклона  $\alpha$  свидетельствует, что при увеличении

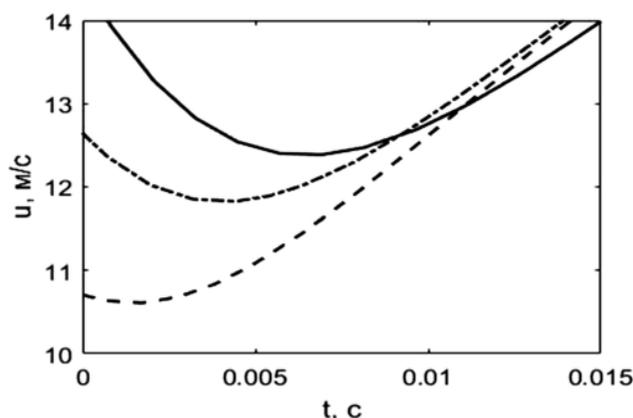


Рис. 2. Изменение модуля относительной скорости зерновки при различных значениях угла срыва: сплошная линия –  $\beta = 20^\circ$ , штрихпунктирная линия –  $\beta = 30^\circ$ , пунктирная линия –  $\beta = 40^\circ$ .

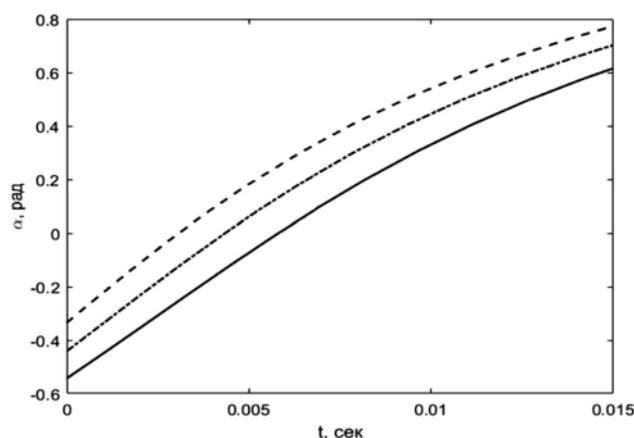


Рис. 3. Изменение угла наклона относительной скорости зерновки при различных значениях угла срыва: сплошная линия –  $\beta = 20^\circ$ , штрихпунктирная линия –  $\beta = 30^\circ$ , разрывная линия –  $\beta = 40^\circ$ .

угла  $\beta$  модуль относительной скорости уменьшается (рис. 2), поскольку направления векторов  $\vec{U}_3$  и  $\vec{V}_3$  становятся более согласованными. При увеличении угла срыва  $\beta$  угол направления относительной скорости  $\alpha$  тоже возрастает (рис. 3). Такое изменение естественно, поскольку угол наклона вектора  $\vec{U}_{om}$  отсчитывается от радиальной оси системы координат  $Ox$ .

При известных значениях  $u$ ,  $\alpha$  и характеристик воздушного потока, траектория зерновки может быть рассчитана с использованием следующих уравнений:

$$\frac{dr}{dt} = V_6 + u \cdot \cos \alpha + (W_6 + u \cdot \sin \alpha) \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{W_6 + u \cdot \sin \alpha}{r}.$$

Таким образом, получены обыкновенные дифференциальные уравнения для расчета траектории движения зерновки в лагранжевой системе координат. Построенная математическая модель позволяет учитывать компоненты скоростей воздушного потока, описываемых в эйлеровой системе координат, а также его дифференциальные характеристики.

### Литература.

1. Нуруллин Э.Г. Пневмомеханические шелушители зерна (теория, конструкция, расчет). Казань: Казан. ун-т, 2011. 308 с.
2. Simulation of the Grain Trajectory along Working Bodies of the Pneumatic Mechanical Dehuller / Y.F. Lachuga, R.I. Ibyatov, B.G. Ziganshin, et al. // Russian Agricultural Sciences. 2020. Vol. 46. P. 534–538.
3. Mathematical modeling of the grain trajectory in the workspace of the sheller with rotating decks / R. Ibyatov, A. Dmitriev, B. Ziganshin, et al. // International Scientific-Practical Conference «Agriculture and Food Security: Technology, Innovation, Markets, Human Resources». 2020. Vol. 17. 00093. URL: [https://www.bio-conferences.org/articles/bioconf/full\\_html/2020/01/bioconf\\_fies2020\\_00093/bioconf\\_fies2020\\_00093.html](https://www.bio-conferences.org/articles/bioconf/full_html/2020/01/bioconf_fies2020_00093/bioconf_fies2020_00093.html) (дата обращения: 08.06.2021). doi: 10.1051/bioconf/20201700093.
4. Ибятов Р.И., Дмитриев А.В., Лотфуллин Р.Ш. Исследование движения зерна в рабочем пространстве пневмомеханического шелушителя // Техника и оборудование для села. 2018. №2. С. 18–21.
5. Дейч М.Е., Филиппов Г.А. Газодинамика двухфазных сред. М.: Энергоиздат, 1981. 472 с.
6. Струминский В.В. К кинетической теории газов и дисперсных сред // Прикладная математика и механика. 1986. Т. 50, № 6. С. 911–917.
7. Нгуен В. Д. К обобщенной диффузионной теории смесей // Успехи механики. 1988. Т. 11. № 1/2. С. 55–79.
8. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч.1. 464 с.
9. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
10. Шугрин С.М. Двухскоростная гидродинамика и термодинамика // Прикладная механика и техническая физика. 1994. № 4. С. 41–59.
11. Упрощенная модель движения капли в газовом потоке / А.М. Бренер, Н.П. Болгов, М.Т. Казиев и др. // Теоретические основы химических технологий. 1987. Т. 21. № 1. С. 126–130.
12. Холпанов Л.П., Ибятов Р.И. Математическое моделирование динамики дисперсной фазы // Теоретические основы химических технологий. 2005. Т. 39. № 2. С. 206–215.
13. Ibyatov R.I., Kholpanov L.P., Murtazin T.Sh. Mathematical simulation of a twisted flow in a cylindrical-conical hydrocyclone // Heat Transfer Research. 2010. Vol. 41. № 1. С. 41–57.
14. Некрасов А.К., Некрасова Е.И., Холпанов Л.П. Математическое моделирование динамики дисперсной фазы при неизотермической свободной конвекции гетерогенной среды в вертикальном цилиндрическом реакторе // Теоретические основы химической технологии. 2008. Т. 42. № 2. С. 152–160.
15. Холпанов Л.П., Некрасов А.К. Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена в реакторе плазматрона при высокотемпературной обработке дисперсных материалов // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. № 17. С. 78–86.
16. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 427 с.

Поступила в редакцию 04.09.2021  
 После доработки 25.09.2021  
 Принята к публикации 08.10.2021