

## СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЗАЩИТНЫХ ЛЕСНЫХ НАСАЖДЕНИЙ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОШИ

А.Н. Салугин, доктор сельскохозяйственных наук,  
А.В. Кулик, А.И. Узолин, кандидаты сельскохозяйственных наук

Федеральный научный центр агроэкологии, комплексных мелиораций и защитного лесоразведения РАН,  
400062, г. Волгоград, Университетский просп., 97  
E-mail: kulik-a@vfanc.ru

*Исследование динамики природных объектов в пространстве и времени тесно связано с их стохастическим поведением, обусловленным климатическими и антропогенными факторами. Случайные явления в агролесомелиорации мало изучены. Теорию вероятности используют в этом разделе сельскохозяйственной науки в контексте формальной статистической обработки данных и не более. Распределения вероятностей случайной переменной в пространстве и времени принимают на веру без физического обоснования, используя методы правдоподобия или моментов. Вместе с тем природа случайных явлений может быть математически сформулирована с соответствующей функцией распределения: Пуассона – для вероятности осадков; Гаусса – при описании древостоя; Стьюдента – для малых выборок и др. Распределение Коши, как и нормальное распределение, относится к классическим и имеет своеобразную геометрическую интерпретацию, что весьма важно для практики агролесомелиорации. Оно описывает протяженное в пространстве поведение случайной величины с плотностью вероятности, зависящей от угла наблюдения за источником ее появления. С учетом этого обстоятельства авторы попытались аппроксимировать воздействия лесозащитных насаждений на межполосное пространство. Удаленность от лесной полосы – основной фактор защиты от ветра, эрозии и др. При этом для описания стохастического ветрового воздействия следует принимать во внимание не только удаленность, но и протяженность лесозащитных насаждений. В работе описана процедура регрессии на кривую распределения Коши данных снегопереноса в межполосном пространстве. Зависимость ветрового воздействия лесополос отражена в кумулятивном распределении. Высокая аппроксимирующая способность этого распределения определяет его неоспоримую ценность в практическом приложении.*

## STOCHASTIC MODELING OF THE INFLUENCE OF PROTECTIVE FOREST BELTS. THE CAUCHY DISTRIBUTION

Salugin A.N., Kulik A.V., Uzolin A.I.

Federal Scientific Centre of Agroecology, Complex Melioration, and Protective Afforestation Russian Academy of Sciences,  
400062, Volgograd, Universitetskii prosp., 97  
E-mail: kulik-a@vfanc.ru

*The studies of natural objects behavior dynamics in space and time are closely related to their stochastic behavior, due to climatic and anthropogenic factors. Random phenomena in agroforestry have been studied insufficiently. Probability theory in this section of agricultural science is used in the context of formal statistical data processing and no more. The probabilities distributions of a random variable in space and time are taken to faith without physical explanation, using likelihood or moment methods. However, the random phenomena nature can be mathematically formulated with the corresponding distribution function: Poisson distribution – for the probability of precipitation; Gauss distribution – when describing a tree stand; Student – for small samples, etc. The Cauchy distribution, as well as the normal one, belongs to the classical distribution and has a peculiar geometrical interpretation, which is very important for the practice of agroforestry. This distribution describes the random variable behavior extended in space with a probability density depending on the observation angle for its occurrence source. This circumstance forced the authors to attempt the approximation of the forest protection plantations effects on the interband space by the Cauchy distribution. Distance from the forest strip is the main factor of protection against wind, erosion, etc. At the same time for the stochastic wind impact describing, not only the distance, but also the extent of forest protection plantations should be taken into account. The paper describes a regression procedure on the Cauchy distribution curve of snow transport data in the interstrip space. The dependence of the wind impact of forest belts is reflected in the cumulative distribution. The high approximation ability of this distribution determines its undeniable value in practical applications.*

**Ключевые слова:** защитные лесные полосы, стохастическое моделирование, снегоотложение, снегозапасы, распределение Коши

**Key words:** protective forest shelter-belts, stochastic modeling, snow deposition, snow reserves, Cauchy distribution

В научных исследованиях по агролесомелиорации встречаются задачи по изучению пространственного влияния защитных лесных насаждений (ЗЛН) на биотические факторы защищаемых территорий, к числу которых относятся плодородие почвы, влажность, водная эрозия, дефляция и др. [1]. Как правило, при оценке влияния ЗЛН учитывают их конструкцию, высоту и расстояние до точки наблюдения. Математическое аналитическое моделирование в этом случае затруднено сложностью аэро- и гидродинамики процессов, а также неоднородностью среды. В связи с этим может оказаться весьма плодотворным использование стохастических приемов. При изучении хаотического по-

ведения природных объектов используют нормальное распределение случайных величин, хотя метод правдоподобия может дать иные результаты [2, 3, 4]. К оригинальным, на наш взгляд, можно отнести наблюдения по определению влияния лесозащитных насаждений в зависимости от удаленности до точки наблюдения. Одна из основных задач агролесомелиорации – изучение эффективности ЗЛН в связи с ее конструкцией, представляющей собой протяженную пространственную линейную систему насаждений с заданными параметрами строения, и выявление механизма влияния насаждения на межполосное пространство.

Цель исследований – стохастическое моделиро-

вание процесса снегопереноса на межполосном пространстве защитных лесополос различных конструкций с использованием распределения Коши.

**Методика.** Наблюдатель, находящийся в межполосном пространстве ЗЛН, отмечает изменения ее влияния по мере удаления от наблюдаемого элементарного участка  $dx$  (рис. 1), видимого под некоторым элементарным углом  $da$ . Поскольку мы рассматриваем процессы, имеющие случайный характер, можно перейти к поиску закономерностей проявления такой случайности как функции расположения элемента  $dx$ . В нашем случае это может быть, например, воздействие ветроломной полосы на дефляционные потери гумуса или интенсивность снегозадержания. Такое влияние выражается зависимостью элементарного угла  $da$ , под которым виден элемент  $dx$ . Будем считать, что для углов  $a$  нет выделенного направления (значения направлений  $a$  равновероятны – изотропность пространства). Тогда для функции распределения по углам наблюдения вдоль ЗЛН слева направо можно записать (см. рис. 1) [5]:  $f(a) \cdot da = \frac{da}{\pi}$ ;  $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ , где  $f(a)$  – вероятность проявления действия элементарного участка  $dx$ , видимого под углом  $da$ .

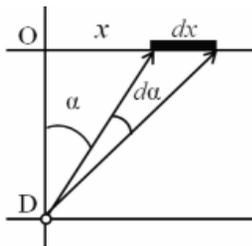


Рис. 1. Пространственное распределение влияния ЗЛН.

Чтобы перейти к межполосному пространству, рассмотрим связь между элементом  $dx$  и углом  $a$  (расстояние до полосы OD примем равным единице). Элемент угла  $da$  при этом связан с  $x$  равенством:

$\frac{da}{dx} = \frac{d}{dx}(\arctg x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Таким образом, плотность распределения вероятности случайной величины как функции от  $x$  равна:

$$f(x)dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{dx}{1+x^2}; -\infty \leq x \leq +\infty. \quad (1)$$

Формула (1) переводит равномерное распределение по углам к нелинейному распределению с ярко выраженным максимумом по координате  $x$  вдоль ЗЛН. Нетрудно подсчитать, что полная вероятность при охвате всех углов наблюдения равна единице, что соответствует адекватности полученной плотности распределения:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{\pi} \arctg x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{\pi} = 1.$$

Зависимость кумулятивного влияния лесозащитных насаждений от их протяженности можно представить в виде:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{\pi} \arctg x. \quad (2)$$

Множитель 2 в этом выражении появился из-за четности подынтегральной функции. Это важно в практическом приложении, так как исследователю предоставляется возможность изучать одну из симметричных ветвей дифференциального распределения  $f(x)$ .

Из рисунка 1 видно, что влияние ЗЛН возрастает по мере удаления от нее. Это происходит из-за увеличения угла обзора (угла наблюдения, под которым видна полоса). Непосредственное (контактное) влияние полосы убывает по закону:  $1/\pi \cdot 1/(1+x^2)$ . Полученное пространственное распределение относится к числу классических [2], будучи частным случаем распределения Стьюдента и близким по своим параметрам к нормальному распределению. Однако практического применения оно не получило. Вместе с тем существуют более общие формы такого распределения, которые включают в себя параметр медианы (аналог среднего в нормальном распределении) и параметр размерности (дисперсии). Рассмотрим это более подробно.

Общий вид плотности распределения будет двухпараметрическим:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}; \quad (3)$$

где  $a$  и  $b$  – параметры ( $a$  – медиана,  $b$  – аналог дисперсии).

Интегральная (кумулятивная) кривая выражается формулой:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \arctg x \left( \frac{x-a}{b} \right) \quad (4)$$

Воздействие лесополосы на любой агрофизический параметр объектов, расположенных в межполосном пространстве, определяет так называемый геометрический фактор стохастического происхождения. В рассмотренном варианте расстояние до лесной полосы было взято равным единице, и фактически рассматривали одну точку, из которой осуществлялось наблюдение. При изменении положения наблюдателя (приближение к ЗЛН или удаление) реализуется перемещение по кумулятивной кривой Коши.

Определение параметров  $a$  и  $b$  в (3) на множестве наблюдений за случайной величиной  $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$  представляет некоторые трудности. Это объясняется тем, что стандартные методы здесь не применимы [6, 7]. А.Н. Колмогоров [8] отмечает важность применения такой характеристики, как медиана. По определению медиана  $m(Y)$  случайной величины  $Y$  есть такое число  $t$ , когда вероятность  $p(Y < m) = p(Y \geq m) = 1/2$ . В работе [6] показано, что если имеется распределение Коши с параметрами  $a$  и  $b$ , то для  $Y$  медиана будет равна  $m(Y) = a$ , а для распределения  $|Y-a|$ ,  $m|Y-a| = b$ . Таким образом, если экспериментальные данные значений какой-либо случайной величины упорядочить по возрастанию:  $y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n$ , то медиана принимается равной  $y_k$  при  $n=2k-1$  и  $(y_k + y_{(k+1)})/2$ , если  $n$  четно  $n=2k$ . Для двухпараметрического распределения Коши можно получить, что выборочная медиана распределена нормально при  $n \rightarrow \infty$  с математическим ожиданием  $a$  и среднеквадратичным отклонением  $\sigma = \pi b / (2\sqrt{n})$  [2]. Таким образом, параметры  $a$  и  $b$  двухпараметрического распределения по данным наблюдений равны  $a = \text{median}(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ ,  $b = a = \text{median}(|y_1 - a|, |y_2 - a|, |y_3 - a|, \dots, |y_n - a|)$  с дисперсией  $\sigma = \pi b / (2\sqrt{n})$ .

Результаты анализа двухпараметрических кривых Коши с различными параметрами  $a$  и  $b$  свидетельствуют о качественном совпадении распределения Коши с нормальным распределением (рис. 2). При этом большей чувствительностью для анализа данных обладает плотность распределения  $f(x)$  (рис. 2 а). Положение центра (максимума) распределения определяется как медиана, что соответствует математическому ожиданию распределения Гаусса (нормальному распределе-

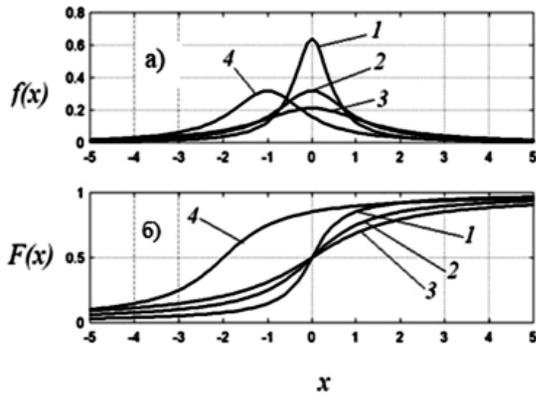


Рис. 2. Двухпараметрическое распределение Коши: а) дифференциальное, б) кумулятивное; 1 –  $a=0, b=0,5$ ; 2 –  $a=0; b=1$ ; 3 –  $a=0; b=1,5$ ; 4 –  $a=-1; b=1$ .

нию). Дисперсию при переходе к нормальному распределению можно вычислить по формуле:  $\sigma = \pi b / (2\sqrt{n})$ , где  $n$  – число наблюдений,  $b$  – параметр распределения Коши, определяемый при обработке экспериментальных данных.

Приведем некоторые данные, отражающие справедливость отмеченного утверждения на примере распределения снегозапасов между лесными полосами. Объект исследования расположен на северо-восточном склоне с уклоном  $2...3^\circ$  и длиной 1,5 км восточнее ст. Клетской Волгоградской области на 2,8 км. Лесные полосы двух-трехрядные (плотной, продуваемой и комбинированной конструкции) состоят из робинии лжеакация (*Robinia pseudoacacia*), ясеня зеленого (*Fraxinus lanceolata*), смородины золотистой (*Ribes aureum*). Конструкцию насаждений формировали путем проведения необходимых рубок [9].

Снегомерные съемки проводили в 2014–2019 гг. После снегопадов перпендикулярно защитным лесным насаждениям прокладывали снегомерные профили. На их протяжении определяли высоту снежного покрова в трехкратной повторности снегомерной рейкой через каждые 4 м в полевой части, через 2 м в шлейфовых зонах и через 1 м внутри насаждения. В каждой зоне в трехкратной повторности весовым снегомером ВС-43М проводили замеры снегозапасов.

**Результаты и обсуждение.** При анализе метеоданных было установлено, что на долю метельных ветров (скорость ветра более 3 м/с) приходилось 58,6 %, то есть снегоперенос был достаточно активным. Наибольшие средние скорости характерны для метелей южного (6,6 м/с), юго-юго-восточного (5,5 м/с) и северо-северо-западного (5,1 м/с) направлений. Эффективность расположения лесной полосы по отношению к розе ветров оценивается углом подхода потока к лесонасаждению. Ветроломная эффективность при этом зависит от отклонения направления от перпендикуляра к направлению ветра. Дальность ветроломного влияния лесополосы также зависит от угла между направлением ветра и лесополосой. По результатам анализа расположения лесополосы относительно основных направлений снегопереноса установлено, что при отклонении на угол более  $30^\circ$  (при метелях восточного направления –  $50^\circ$ , северо-северо-западного –  $65^\circ$ , южного –  $40^\circ$ ) дальность ветроломного влияния уменьшается на 20...30 %, при  $30^\circ$  – на 13 % (западно-юго-западные –  $29^\circ$ ), при  $20^\circ$  – на 2...6 % (юго-западные –  $6^\circ$ ).

Установленные закономерности можно интерпретировать как процесс формирования снегозапаса под

воздействием метельных ветров. При этом учет направления и скорости ветров описывается математической динамико-стохастической моделью. Суть этой модели состоит в том, что процесс переноса снега начинается с некоторой критической скорости ветра, при которой происходит его отрыв и перенос [10, 11]. Как уже отмечалось, ветроломное влияние ЗЛН зависит от угла между направлением ветра и лесной полосой. С учетом случайных ветровых направлений эффект от ЗЛН можно моделировать Коши-распределением, имеющим такую же физическую интерпретацию [5]. Используя двухпараметрическое распределение с привлечением медианы и дисперсии (см. рис. 2), представляется возможным описание влияния ЗЛН на снегозадержание.

Математический пакет Matlab имеет приложение Curve Fitting Toolbox для подгонки теоретических кривых к экспериментальным данным [12]. Этот инструментарий позволяет выполнять предварительный анализ исходной информации и сравнивать результаты моделирования с использованием аппроксимаций. Программа позволяет проводить регрессионный анализ с применением линий нелинейного метода наименьших квадратов с заданными пользователем аналитическими функциями аппроксимации.

Результаты приближения распределения Коши к данным наблюдений показали, что оно достаточно точно описывает пространственное накопление снега для трех изученных типов конструкций ЗЛН (плотной, продуваемой и комбинированной), обладающих различными аэродинамическими свойствами [13, 14]. Отмечается сходная для всех типов ЗЛН картина – снижение скорости ветра при приближении к лесной полосе, что способствует осаждению снежных частиц и формированию сугробов (рис. 3). При этом кривые распределения Коши  $F(x) = \text{atan}((x-a)/b)$  на графиках достаточно близко располагаются к данным по снегоотложению.

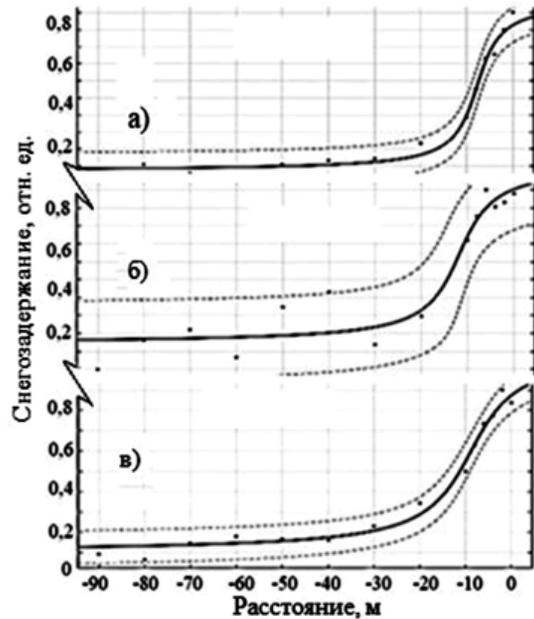


Рис. 3. Кумулятивные кривые влияния лесных полос на снегозадержание, полученные нелинейным методом наименьших квадратов с использованием распределения Коши для трех типов ЗЛН: а) – плотная; б) – продуваемая; в) – комбинированная; пунктиром на графиках отражены 95 %-ые доверительные интервалы.

**Параметры Коши-распределения и точность аппроксимации**

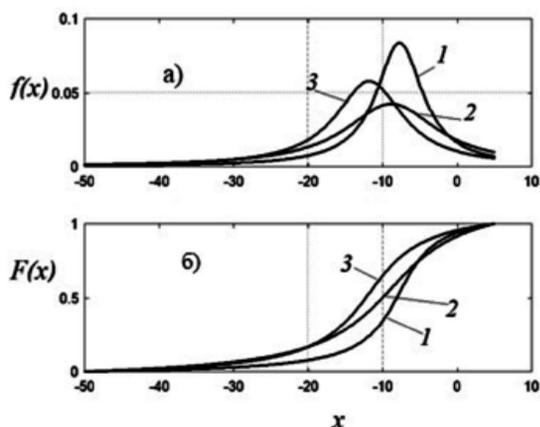
Конструкции ЗЛН	Параметры распределения		RMSE*	R <sup>2</sup>
	a	b		
Плотная	-7,74 ± 1,2	3,8 ± 0,54	0,051	0,98
Продуваемая	-11,77 ± 2,2	5,5 ± 1,8	0,115	0,92
Комбинированная	-8,81 ± 2,3	7,5 ± 2,1	0,042	0,98

\*среднеквадратичная ошибка метода наименьших квадратов.

Результаты анализа параметров Коши-распределения и точности аппроксимации свидетельствуют, что значения медианы ( $a$ ) для разных типов конструкций существенно различаются, отражая дальность влияния ЗЛН. Значения дисперсий ( $b$ ) изменяются от 3,8 до 7,5 (см. табл.).

Визуальный анализ регрессии (см. рис. 3) указывает на различие форм кривых распределения. Наиболее точно аппроксимируются кривые (а) и (в). Для плотной и комбинированной ЗЛН  $R^2$  равен 0,98, в то время как для продуваемой  $R^2=0,92$ . Параметр  $a$  для продуваемой конструкции принимает наибольшее значение, что свидетельствует о наибольшем отклонении распределения от нулевого значения.

Более наглядно видны различия для плотностей распределения при графическом отображении (рис. 4). Для плотной ЗЛН  $f(x)$  смещена вправо, относительно других конструкций, свидетельствуя о том, что ее влияние на снегоотложение начинается раньше и захватывает большее межполосное пространство.



**Рис. 4. Теоретические кривые распределений:**  
а) плотности вероятностей и  
б) кумулятивные кривые; 1 – плотная, 2 – продуваемая,  
3 – комбинированная конструкции ЗЛН.

Таким образом, возможность использования распределения Коши при описании снегораспределения в межполосном пространстве обусловлено статистическим характером геометрического происхождения этого процесса. Угловые распределения влияния ЗЛН, моделируемые кривой Коши, как и распределения ветровой направленности снегопереноса необходимо учитывать одновременно. При выводе распределения Коши предполагается, что приоритетных направлений не существует – изотропность пространства. Это означает равновероятные угловые испытания. Вместе с тем полученные при переходе к пространственному распределению влияния ЗЛН результаты могут быть

использованы для измерения угловой корреляции между преимущественным направлением ветра из «крызы ветров», снегозадержанием и распределением Коши. Для этого на кривой распределения Коши необходимо перейти от координаты  $x$  к соответствующим углам наблюдения  $\alpha$  ( $x=tg\alpha$ ). Таким образом, стохастическая природа снегопереноса и ее геометрический характер адекватно моделируются распределением Коши, позволяющем, как показано в статье, получать количественные данные при расчетах снегонакопления. Результаты, полученные по снегозадержанию – частный случай использования распределения Коши, которое может найти применение для динамико-стохастического моделирования в агроэкологии.

### Литература.

- Кулик К.Н., Салугин А.Н. Математические модели процессов деградации почвенно-растительных систем // Труды Института геологии Дагестанского научного центра РАН. 2016. № 67. С. 261–264.
- Ван дер Варден. Математическая статистика. М.: изд-во Иностранной литературы, 1960. 436 с.
- Анализ данных и математическое моделирование в экологии и природопользовании / И.С. Белюченко, А.В. Смагин, Л.Б. Попок и др. Краснодар: КубГАУ, 2015. 313 с.
- Шинкеев М.Л. Оценка параметров распределения Коши // Научное обозрение. 2012. № 3. С. 77–80.
- Худсон Д. Статистика для физиков: лекции по теории вероятностей и элементарной статистике. М.: Мир, 1970. 296 с.
- Галкин В.М., Ерофеева Л.Н., Лецева С.В. Оценки параметров распределения Коши // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. 2014. №2(104). С. 314–319.
- Некоторые оценки параметров распределения Коши / Е.Д. Галкина, С.В. Лецева, Н.С. Лукичев и др. // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. 2015. № 3(110). С. 322–325.
- Колмогоров А.Н. Метод медианы в теории ошибок // Матем. сб. 1931. Т. 38. №3-4. С. 47–50.
- Узолин А.И., Кулик А.В. Эффективность защитных лесных полос в формировании и перераспределении снежного покрова на водосборах // Известия Нижегородского агроуниверситетского комплекса: Наука и высшее профессиональное образование. 2018. №2 (50). С. 100–106.
- Гельфан А.Н. Динамико-стохастическое моделирование формирования талого стока. М.: Наука, 2007. 294 с.
- Гельфан А.Н., Морейдо В.М. Динамико-стохастическое моделирование формирования снежного покрова на Европейской территории России // Лёд и снег. 2014. Т. 54. №2. С.44–52. doi: 10.15356/2076-6734-2014-2-44-52.
- Matlab // MathWorks om 02.12.2019. URL: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>.
- Барабанов А.Т., Кулик А.В. Роль стокорегулирующих лесополос в регулировании снегоотложения и промерзания почв в европейской части РФ // Известия Нижегородского агроуниверситетского комплекса: Наука и высшее профессиональное образование. 2017. №2 (46). С. 85–90.
- Иващенко Н.Н. Влияние лесных полос различных конструкций на ветро-вой поток и снегораспределение // Известия Оренбургского государственного аграрного университета. 2013. №3 (41). С. 16–19.

Поступила в редакцию 24.02.2021  
После доработки 30.03.2021  
Принята к публикации 12.05.2021