

УДК 536.421.4

**ВРЕМЯ РЕЛАКСАЦИИ К СТАЦИОНАРНОМУ РОСТУ
ВТОРИЧНЫХ ВЕТВЕЙ ДЕНДРИТА**© 2019 г. *Е. А. Титова^а, Д. В. Александров^{а, *}, П. К. Галенко^а**^аУральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина,
ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002 Россия***e-mail: Dmitri.Alexandrov@urfu.ru*

Поступила в редакцию 19.07.2018

После доработки 27.07.2018

Принята к публикации 02.08.2018

В работе теоретически определено выражение для времени выхода на стационарный режим роста вторичных ветвей дендритных кристаллов. Построены зависимости времени выхода на стационар от ростового числа Пекле и скорости роста вершины для дендритов никеля и сукцинонитрила. Показано, что при высокоскоростной кристаллизации вторичные ветви дендритов выходят на стационарный режим роста быстрее, чем в случае низкоскоростной кристаллизации. Рост вторичных ветвей дендритов можно практически всегда считать стационарным в случаях низкоскоростной, умеренной и высокоскоростной кристаллизации.

Ключевые слова: фазовые превращения, дендриты, переохлажденный расплав.

DOI: 10.1134/S0235010619020051**ВВЕДЕНИЕ**

Определение особенностей микроструктур затвердевающих материалов имеет важное практическое значение [1–6]. В настоящее время экспериментальные методы позволяют достигать больших температурных градиентов, скоростей охлаждения материалов и, следовательно, высоких скоростей роста кристаллов [7]. Так, например, в пленках скорости охлаждения могут достигать 10^7 К/с, в процессах лазерной закалки поверхностей образцов температурные градиенты достигают 10^8 К/с, а безконтейнерные методы кристаллизации переохлажденных капель позволяют получать переохлаждения порядка 200–400 К. В таких процессах затвердевания возникают большие движущие силы, приводящие к сверхбыстрым фазовым трансформациям метастабильных фаз [8]. Так, например, экспериментально измеренные скорости кристаллизации имеют порядок 10^{-1} – 10^2 м/с в переохлажденных каплях с помощью метода электромагнитной левитации [8, 9]. В таких процессах время затвердевания оценивается, как 10^{-5} – 10^{-3} с.

Для аналитических расчетов процессов быстрого затвердевания и теоретических оценок параметров возникающих микроструктур в дендритной и эвтектической кристаллизации используются различные модели равновесного стационарного затвердевания [10–15]. Однако квазистационарное приближение в условиях быстрого затвердевания небольших образцов (пленок, капель и т.п.) является пока необоснованным и часто оспаривается. Общепринятой точкой зрения является такой подход к квазистационару: этот режим безусловно достигается в условиях медленной кристаллизации, но достигается ли в условиях быстрой кристаллизации [16]? Однако детальные расчеты режимов затвердевания показывают, что время нестационарности существенно зависит от скорости границы раздела фаз и переохлаждения в затвердевающих материалах [17]. В частности, для плоской межфазной границы твердая фаза – жидкость время нестационарности быстро уменьшается с увеличением скорости роста, достигая значений порядка милли или микро секунд при скоростях роста порядка сантиметров в секунду [17].

Кроме того, на основе работы [17] можно показать, что время нестационарности сильно увеличивается с уменьшением скоростей роста кристаллов, достигая значений порядка секунд или даже минут для скоростей роста порядка микрометров в секунду. Такая значительная зависимость должна иметь место не только для плоской межфазной поверхности, она должна реализовываться и для других ростовых форм кристаллов. Поскольку одной из основных ростовых форм кристаллов является дендритная форма, в настоящей работе развивается аналитическое описание времени нестационарности, которое может быть сопоставлено со временем затвердевания экспериментально исследуемых образцов. Развиваемая в работе теория ограничена двумерным случаем (трехмерный рост может быть исследован по аналогии с предлагаемым подходом). Отметим, что многие свойства материалов сильно зависят от расстояния между вторичными ветвями дендритов. Учитывая это в настоящей статье приведены оценки времени нестационарности вторичных ветвей дендритов в условиях медленной и быстрой кристаллизации.

ВРЕМЯ РЕЛАКСАЦИИ К СТАЦИОНАРНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Время релаксации τ_T определяет насколько быстро скорость вершины дендрита релаксирует к своему стационарному значению [18]

$$v(t) \propto A_v(t) \exp(-A_m t / \tau_T). \quad (1)$$

Здесь введены следующие обозначения: $A_v(t)$ — амплитуда, зависящая от времени t , A_m — множитель, зависящий от параметров модели, τ_T — время релаксации теплового дендрита к стационарному режиму роста. В настоящей работе будем рассматривать симметричный рост дендритных кристаллов в положительном направлении z с постоянной скоростью v . Введем мгновенное положение (координату) $\zeta = \zeta(x, t)$ фронта затвердевания и радиус кривизны ρ вершины дендрита. Ради удобства будем измерять все длины в единицах ρ , а время в единицах ρ/v .

Отметим, что поверхность дендрита описывается параболой Иванцова [18–22]

$$\zeta_{iv} = -\frac{x^2}{2} \quad (2)$$

при нулевом поверхностном натяжении.

Необходимо видоизменить это решение с помощью введения коррекционной функции $\zeta_0(x)$ при ненулевом поверхностном натяжении. В результате, стационарное решение $\zeta_{iv} + \zeta_0(x)$ будет иметь место, если выполняется критерий отбора

$$\sigma^* = \frac{d_0}{\rho P_g} = \frac{2d_0 D_T}{\rho^2 v} = \frac{d_0 v}{2D_T P_g^2} \quad (3)$$

устойчивой моды кристаллизации дендрита, который определяется из теории микроскопической разрешимости [9–11, 23–28]. Здесь $P_g = \rho v / (2D_T)$ — ростовое число Пекле для теплового дендрита, d_0 — капиллярная длина, D_T — коэффициент температуропроводности.

С теоретической и практической точек зрения важно определить действительное время релаксации параболической поверхности дендрита к стационарному росту. Введем малую зависящую от времени коррекционную поправку $\zeta_1(x, t)$ к стационарному решению и представим $\zeta(x, t)$ для вторичных ветвей в виде

$$\zeta(x, t) = \zeta_{iv} + \zeta_0(x) + \zeta_1(x, t). \quad (4)$$

Зависящая от времени поправка $\zeta_1(x, t)$ была определена в работе [29] на основе ВКБ (WKB) метода

$$\zeta_1(x, t) = f(2z)^{1/8} \sigma^{*1/4} \operatorname{Im} \left(\exp \left(\frac{(2z)^{1/4}}{c^3 \sqrt{\sigma^*}} \left(1 - i \frac{z-t}{\sqrt{2z}} \right)^{3/2} \right) \right), \quad (5)$$

где $c = \sqrt{3/2}$, $z = x^2/2$, а f – константа порядка единицы. Возводя комплексное выражение $1 - i(z-t)/\sqrt{2z}$ в степень $3/2$, разделяя вещественную и мнимую части соотношения (5) и вводя безразмерные переменные

$$\tau = \frac{\rho t}{\nu}, \quad \xi = x\rho, \quad (6)$$

получим

$$\zeta_1(x, t) = A \exp \left[- \left((\beta\delta)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{(\beta\delta)^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{\tau}{\tau_T} \right)^2 \right)^{3/4} \right]. \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\tau_T = \frac{\rho}{\nu(\beta\delta)^{2/3}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\xi}}{c^3 \sigma^* \sqrt{\rho}}, \quad \alpha = \frac{\xi}{2\rho} - \frac{\nu\tau}{\xi}, \quad \delta = |\cos(\varphi/2)|, \quad (8)$$

$$A = \left(\frac{\xi \sigma^*}{\rho} \right)^{1/4} \sin |\beta \sin(\varphi/2)|, \quad \varphi = \arctan \left(\frac{\alpha^2 - 3}{1 - 3\alpha^2} \right).$$

Для определения зависимости τ_T от ростового числа Пекле P_g выразим скорость ν вершины дендрита из критерия микроскопической разрешимости, выведенного для произвольных чисел Пекле в статьях [9–11]

$$\nu(P_g) = \frac{2D_T \alpha_d^{7/4} \sigma_0 P_g^2}{d_0 (1 + a_1 P_g \sqrt{\alpha_d})^2}, \quad (9)$$

где α_d – параметр анизотропии поверхностной энергии, σ_0 – константа отбора, а $a_1 = \sqrt{8\sigma_0/7} (3/56)^{3/8}$.

Далее, рассматривая окрестность вершины дендрита ($\xi \sim \rho$) и учитывая формулы (8), получим

$$\tau_T \approx \frac{2D_T P_g c^2}{\delta^{2/3} \nu^2(P_g)} \left(\frac{d_0 \nu(P_g)}{2D_T P_g^2} \right)^{1/3}. \quad (10)$$

Константы, входящие в выражение (10), оцениваются таким образом: $\alpha \approx 1/2$, а $\delta \approx 0.738$. Такие оценки справедливы для теплового дендрита с параметрами: время релаксации $\tau_T \approx 10^{-10} \dots 10^{-7}$ с, координата $\xi \approx \rho \approx 10^{-6}$ м, скорость роста $\nu \leq 10^{-2}$ м/с. Учитывая это, из формул (8) имеем $\alpha \approx 1/2 - \nu\tau/\rho$, $\nu\tau/\rho \leq 10^{-3} \ll 1/2$. Выражение (10) определяет время релаксации в зависимости от ростового числа Пекле P_g . Эта зависимость вместе с зависимостью для скорости $\nu(P_g)$, задаваемой формулой (9), позволяет получить оценку времени релаксации к стационарному сценарию дендритного роста.

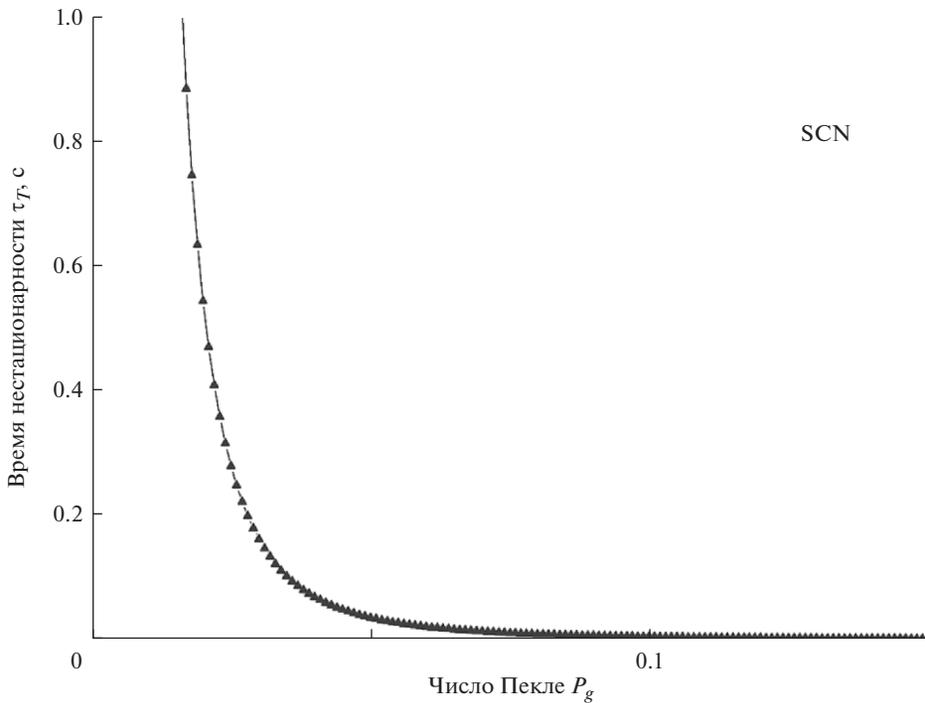


Рис. 1. Зависимость времени нестационарности τ_T от теплового числа Пекле $P_g = \rho v / (2D_T)$ для сукцинонитрила.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На рис. 1 и 2 приведены расчетные данные времен нестационарности для сукцинонитрила (SCN) и никеля (Ni) по данным работ [9, 30–33] (теплофизические значения параметров этих материалов выписаны в табл. 1). Построенные по формулам (9) и (10) зависимости иллюстрируют убывание времени нестационарности с ростом числа Пекле. При этом при достаточно больших значениях P_g , время выхода на стационар

Таблица 1

Материальные параметры сукцинонитрила (SCN) и никеля (Ni) по данным работ [9, 30–33]

Параметр	Сукцинонитрил	Никель
Температура плавления, T_A (К)	331.233 [30]	1728 [31]
Скрытая теплота, L (Дж/м ³)	$4781 \cdot 10^4$ [30]	$267 \cdot 10^4$ [33]
Теплоемкость, c_p (Дж/(м ³ К))	$208 \cdot 10^4$ [30]	6390 [33]
Поверхностная энергия, σ (Дж/м ²)	$8.9 \cdot 10^{-3}$ [30]	0.275 [33]
Капиллярная длина, d_0 , (м)	$2.821 \cdot 10^{-9}$ [30]	$4.92 \cdot 10^{-10}$ [32]
Параметр анизотропии, α_d (–)	0.0825 [30]	0.27 [33]
Коэффициент температуропроводности, D_T (м ² /с)	$1.13 \cdot 10^{-7}$ [30]	$1.2 \cdot 10^{-5}$ [33]
Константа отбора, σ_0 (–)	0.1 [9]	0.191 [32]

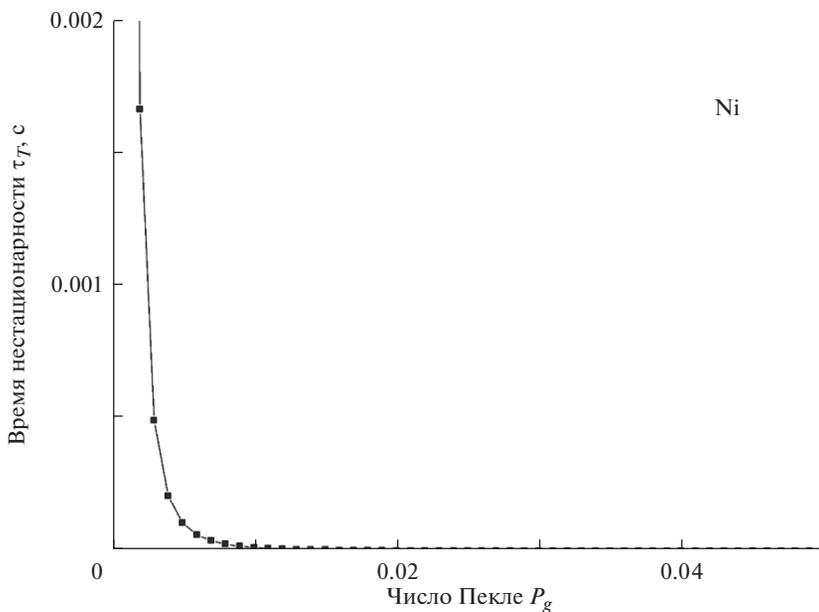


Рис. 2. Зависимость времени нестационарности τ_T от теплового числа Пекле $P_g = \rho v / (2D_T)$ для никеля.

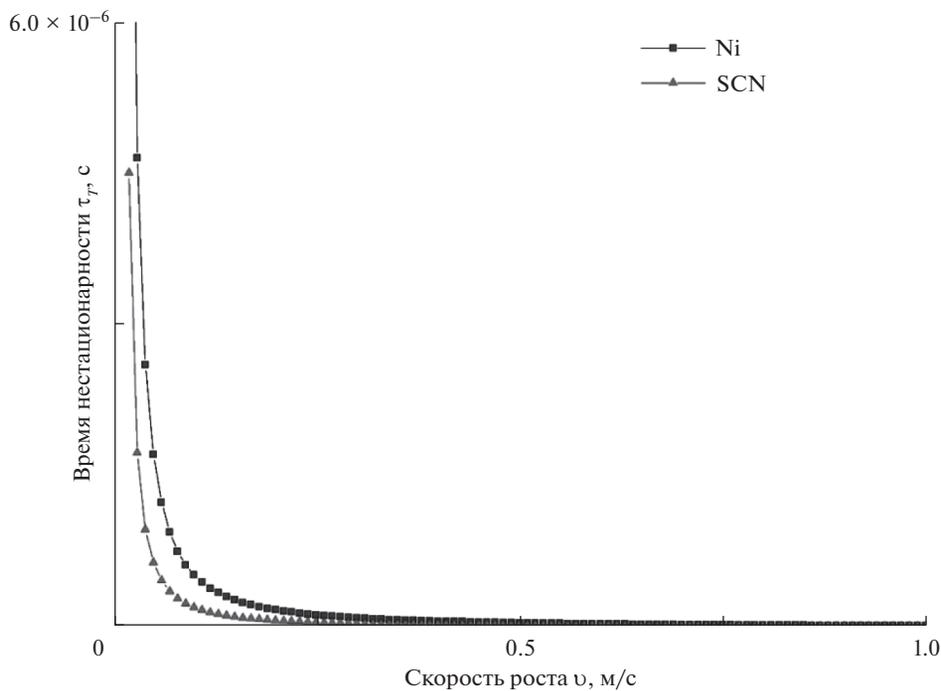


Рис. 3. Зависимость времени нестационарности τ_T от скорости роста v вершины дендрита для сукцинонитрила и никеля.

становится достаточно малым. Относительно большие значения этого времени наблюдаются для низкоскоростной кристаллизации при малых числах Пекле. В случае же высокоскоростного затвердевания вторичные ветви дендритов выходят на стационарный режим роста быстрее, чем в случае низкоскоростной кристаллизации.

Из формул (9), (10) и определения числа Пекле $P_g = \rho v / (2D_T)$ можно построить зависимость времени нестационарности τ_T от скорости роста вершины вторичных ветвей дендрита v . Такие зависимости для сукцинонитрила и никеля показаны на рис. 3. Отсюда хорошо видно, что абсолютные значения времен выхода на стационарный режим роста для обоих материалов весьма малы, как в низкоскоростном, так и в высокоскоростном сценариях затвердевания. В целом, результаты настоящей работы свидетельствуют о том, что рост вторичных ветвей дендритов можно практически всегда считать стационарным (в случаях низкоскоростной, умеренной и высокоскоростной кристаллизации). Развитое аналитическое описание роста дендритных структур может быть использовано для моделирования процессов затвердевания при наличии протяженной области фазового перехода – двухфазной зоны, где происходит эволюция элементов твердой фазы в форме дендритоподобных образований [34–38].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 16-11-10095).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chalmers B. *Physical Metallurgy*. N.Y.: Wiley, 1959.
2. Chernov A. A. *Modern Crystallography III*. Berlin: Springer, 1984.
3. Trivedi R., Kurz W. Dendritic growth // *Int. Mater. Rev.* 1994. **39**. P. 49–74.
4. Herlach D. M. Non-equilibrium solidification of undercooled metallic melts // *Mater. Sci. Eng. R.* 1994. **12**. P. 177–272.
5. Alexandrov D. V. The large-time behaviour of coarsening of a particulate assemblage due to Ostwald ripening and coagulation // *Phil. Mag. Lett.* 2016. **96**. P. 355–360.
6. Alexandrov D. V. Kinetics of particle coarsening with allowance for Ostwald ripening and coagulation // *J. Phys.: Condens. Matter.* 2016. **28**. P. 035102.
7. Herlach D. M., Galenko P., Holland-Moritz D. *Metastable solids from undercooled melts* // Amsterdam: Elsevier. 2007. 432 p.
8. Hartmann H., Galenko P. K., Holland-Moritz D., Kolbe M., Herlach D. M., Shuleshova O. Nonequilibrium solidification in undercooled $Ti_{45}Al_{55}$ melts // *J. Appl. Phys.* 2008. **103**. P. 073509.
9. Alexandrov D. V., Galenko P. K. Dendrite growth under forced convection: analysis methods and experimental tests // *Phys.-Usp.* 2014. **57**. P. 771–786.
10. Alexandrov D. V., Galenko P. K. Selection criterion of stable dendritic growth at arbitrary Péclet numbers with convection // *Phys. Rev. E.* 2013. **87**. P. 062403.
11. Alexandrov D. V., Galenko P. K. Thermo-solutal and kinetic regimes of an anisotropic dendrite growing under forced convective flow // *Phys.Chem. Chem. Phys.* 2015. **17**. P. 19149–19161.
12. Gao J., Han M., Kao A., Pericleous K., Alexandrov D. V., Galenko P. K. Dendritic growth velocities in an undercooled melt of pure nickel under static magnetic fields: A test of theory with convection // *Acta Mater.* 2016. **103**. P. 184–191.
13. Alexandrov D. V., Danilov D. A., Galenko P. K. Selection criterion of a stable dendrite growth in rapid solidification // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2016. **101**. P. 789–799.
14. Galenko P. K., Danilov D. A., Reuther K., Alexandrov D. V., Rettenmayr M., Herlach D. M. Effect of convective flow on stable dendritic growth in rapid solidification of a binary // *J. Cryst. Growth.* 2017. **457**. P. 349–355.
15. Alexandrov D. V., Galenko P. K. Selected mode for rapidly growing needle-like dendrite controlled by heat and mass transport // *Acta Mater.* 2017. **137**. P. 64–70.
16. Das A. K. Some non-Fickian diffusion equations: theory and applications // *Defect and Diffusion Forum* 1998. **162**. P. 97–118.

17. Galenko P. K., Danilov D. A. Selection of the dynamically stable regime of rapid solidification front motion in an isothermal binary alloy // *J. Cryst. Growth* 2000. **216**. P. 512–526.
18. Langer J. S. Instabilities and pattern formation in crystal growth // *Rev. Mod. Phys.* 1980. **52**. P. 1–28.
19. Pelce P., Pomeau Y. Dendrites in the small undercooling limit // *Stud. Appl. Math.* 1986. **74**. P. 245–258.
20. Galenko P. K., Danilov D. A., Alexandrov D. V. Solute redistribution around crystal shapes growing under hyperbolic mass transport // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2015. **89**. P. 1054–1060.
21. Alexandrov D. V., Galenko P. K. Boundary integral approach for propagating interfaces in a binary non-isothermal mixture // *Physica A*. 2017. **469**. P. 420–428.
22. Galenko P. K., Alexandrov D. V., Titova E. A. The boundary integral theory for slow and rapid curved solid/liquid interfaces propagating into binary systems // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2018. **376**. P. 20170218.
23. Alexandrov D. V., Pinigin D. A. Selection of stable growth conditions for the parabolic dendrite tip in crystallization of multicomponent melts // *Technical Physics*. 2013. **58**. P. 309–315.
24. Alexandrov D. V., Galenko P. K. Selection criterion for the growing dendritic tip at the inner core boundary // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2013. **46**. P. 195101.
25. Alexandrov D. V., Galenko P. K., Toropova L. V. Thermo-solutal and kinetic modes of stable dendritic growth with different symmetries of crystalline anisotropy in the presence of convection // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2018. **376**. № 2013. 20170215.
26. Alexandrov D. V., Galenko P. K. Selected mode of dendritic growth with n-fold symmetry in the presence of a forced flow // *EPL*. 2017. **119**. 16001.
27. Alexandrov D. V., Galenko P. K. Dendritic growth with the six-fold symmetry: Theoretical predictions and experimental verification // *J. Phys. Chem. Solids*. 2017. **108**. 98–103.
28. Alexandrov D. V., Galenko P. K. Thermo-solutal growth of an anisotropic dendrite with six-fold symmetry // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2018. **30**. 105702.
29. Barber M. N., Barbieri A., Langer J. S. Dynamics of dendritic sidebranching in the two-dimensional symmetric model of solidification // *Phys. Rev. A*. 1987. **36**. P. 3340–3349.
30. Koss M. B., LaCombe J. C., Tennenhouse L. A., Glicksman M. E., Winsa E. A. Dendritic growth tip velocities and radii of curvature in microgravity // *Metall. Mater. Trans. A*. 1999. **30A**. P. 3177–3190.
31. Hultgren R., Desai P. D., Hawkins D. T., Gleiser M., Kelley K. K., Wagman D. D. Selected values of the thermodynamic properties of the elements // Ohio: ASM International, Metals Park. 1973.
32. Gao J., Kao A., Bojarevics V., Pericleous K., Galenko P. K., Alexandrov D. V. Modeling of convection, temperature distribution and dendritic growth in glass-fluxed nickel melts // *J. Cryst. Growth*. 2017. **471**. P. 66–72.
33. Galenko P. K., Phanikumar G., Funke O., Chernova L., Reutzel S., Kolbe M., Herlach D. M. Dendritic solidification and fragmentation in undercooled Ni–Zr alloys // *Mater. Sci. Eng. A*. 2007. **449–451**. P. 649–653.
34. Alexandrov D. V., Bashkirtseva I. A., Malygin A. P., Ryashko L. B. Sea Ice Dynamics Induced by External Stochastic Fluctuations // *Pure Appl. Geophys.* 2013. **170**. P. 2273–2282.
35. Alexandrov D. V., Nizovtseva I. G. Nonlinear dynamics of the false bottom during seawater freezing // *Dokl. Earth Sci.* 2008. **419**. P. 359–362.
36. Alexandrov D. V., Ivanov A. A. The Stefan problem of solidification of ternary systems in the presence of moving phase transition regions // *J. Exper. Theor. Phys.* 2009. **108**. P. 821–829.
37. Alexandrov D. V., Malygin A. P. Convective instability of directional crystallization in a forced flow: The role of brine channels in a mushy layer on nonlinear dynamics of binary systems // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2011. **54**. P. 1144–1149.
38. Alexandrov D. V., Malygin A. P. Coupled convective and morphological instability of the inner core boundary of the Earth // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2011. **189**. P. 134–141.

Relaxation Time to the Steady-State Growth of Secondary Dendritic Branches

E. A. Titova¹, D. V. Alexandrov¹, P. K. Galenko¹

¹*Ural Federal University, Mira st., 19, Yekaterinburg, 620002 Russia*

In this paper, the expression for the time of reaching the stationary mode of growth of secondary branches of dendritic crystals is theoretically determined. The dependences of the time of transition to the stationary mode on the Peclet growth number and the tip growth rate for nickel and succinonitrile dendrites are plotted. It was shown that during high-speed crystallization, the secondary branches of dendrites enter the steady-state growth mode faster than in the case of low-speed crystallization. The growth of the secondary branches of dendrites can almost always be considered stationary in cases of low-speed, moderate and high-speed crystallization.

Keywords: phase transformations, dendrites, supercooled melt

REFERENCES

1. Chalmers B. *Physical Metallurgy*. N.Y.: Wiley, 1959.
2. Chernov A.A. *Modern Crystallography III*. Berlin: Springer, 1984.
3. Trivedi R., Kurz W. Dendritic growth // *Int. Mater. Rev.* 1994. **39**. P. 49–74.
4. Herlach D.M. Non-equilibrium solidification of undercooled metallic melts // *Mater. Sci. Eng. R.* 1994. **12**. P. 177–272.
5. Alexandrov D.V. The large-time behaviour of coarsening of a particulate assemblage due to Ostwald ripening and coagulation // *Phil. Mag. Lett.* 2016. **96**. P. 355–360.
6. Alexandrov D.V. Kinetics of particle coarsening with allowance for Ostwald ripening and coagulation // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2016. **28**. P. 035102.
7. Herlach D.M., Galenko P., Holland-Moritz D. *Metastable solids from undercooled melts* // Amsterdam: Elsevier. 2007. 432 p.
8. Hartmann H., Galenko P.K., Holland-Moritz D., Kolbe M., Herlach D.M., Shuleshova O. Nonequilibrium solidification in undercooled $Ti_{45}Al_{55}$ melts // *J. Appl. Phys.* 2008. **103**. P. 073509.
9. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Dendrite growth under forced convection: analysis methods and experimental tests // *Phys.-Usp.* 2014. **57**. P. 771–786.
10. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selection criterion of stable dendritic growth at arbitrary Péclet numbers with convection // *Phys. Rev. E.* 2013. **87**. P. 062403.
11. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Thermo-solutal and kinetic regimes of an anisotropic dendrite growing under forced convective flow // *Phys.Chem. Chem. Phys.* 2015. **17**. P. 19149–19161.
12. Gao J., Han M., Kao A., Pericleous K., Alexandrov D.V., Galenko P.K. Dendritic growth velocities in an undercooled melt of pure nickel under static magnetic fields: A test of theory with convection // *Acta Mater.* 2016. **103**. P. 184–191.
13. Alexandrov D.V., Danilov D.A., Galenko P.K. Selection criterion of a stable dendrite growth in rapid solidification // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2016. **101**. P. 789–799.
14. Galenko P.K., Danilov D.A., Reuther K., Alexandrov D.V., Rettenmayr M., Herlach D.M. Effect of convective flow on stable dendritic growth in rapid solidification of a binary // *J. Cryst. Growth.* 2017. **457**. P. 349–355.
15. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selected mode for rapidly growing needle-like dendrite controlled by heat and mass transport // *Acta Mater.* 2017. **137**. P. 64–70.
16. Das A.K. Some non-Fickian diffusion equations: theory and applications // *Defect and Diffusion Forum* 1998. **162**. P. 97–118.
17. Galenko P.K., Danilov D.A. Selection of the dynamically stable regime of rapid solidification front motion in an isothermal binary alloy // *J. Cryst. Growth* 2000. **216**. P. 512–526.
18. Langer J.S. Instabilities and pattern formation in crystal growth // *Rev. Mod. Phys.* 1980. **52**. P. 1–28.
19. Pelce P., Pomeau Y. Dendrites in the small undercooling limit // *Stud. Appl. Math.* 1986. **74**. P. 245–258.
20. Galenko P.K., Danilov D.A., Alexandrov D.V. Solute redistribution around crystal shapes growing under hyperbolic mass transport // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2015. **89**. P. 1054–1060.

21. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Boundary integral approach for propagating interfaces in a binary non-isothermal mixture // *Physica A*. 2017. **469**. P. 420–428.
22. Galenko P.K., Alexandrov D.V., Titova E.A. The boundary integral theory for slow and rapid curved solid/liquid interfaces propagating into binary systems // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2018. **376**. P. 20170218.
23. Alexandrov D.V., Pinigin D.A. Selection of stable growth conditions for the parabolic dendrite tip in crystallization of multicomponent melts // *Technical Physics*. 2013. **58**. P. 309–315.
24. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selection criterion for the growing dendritic tip at the inner core boundary // *J. Phys. A: Math. Theor*. 2013. **46**. P. 195101.
25. Alexandrov D.V., Galenko P.K., Toropova L.V. Thermo-solutal and kinetic modes of stable dendritic growth with different symmetries of crystalline anisotropy in the presence of convection // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2018. **376**. № 2013. 20170215.
26. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selected mode of dendritic growth with n-fold symmetry in the presence of a forced flow // *EPL*. 2017. **119**. 16001.
27. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Dendritic growth with the six-fold symmetry: Theoretical predictions and experimental verification // *J. Phys. Chem. Solids*. 2017. **108**. 98–103.
28. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Thermo-solutal growth of an anisotropic dendrite with six-fold symmetry // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2018. **30**. 105702.
29. Barber M.N., Barbieri A., Langer J.S. Dynamics of dendritic sidebranching in the two-dimensional symmetric model of solidification // *Phys. Rev. A*. 1987. **36**. P. 3340–3349.
30. Koss M.B., LaCombe J.C., Tennenhouse L.A., Glicksman M.E., Winsa E.A. Dendritic growth tip velocities and radii of curvature in microgravity // *Metall. Mater. Trans. A*. 1999. **30A**. P. 3177–3190.
31. Hultgren R., Desai P.D., Hawkins D.T., Gleiser M., Kelley K.K., Wagman D.D. Selected values of the thermodynamic properties of the elements // Ohio: ASM International, Metals Park. 1973.
32. Gao J., Kao A., Bojarevics V., Pericleous K., Galenko P.K., Alexandrov D.V. Modeling of convection, temperature distribution and dendritic growth in glass-fluxed nickel melts // *J. Cryst. Growth*. 2017. **471**. P. 66–72.
33. Galenko P.K., Phanikumar G., Funke O., Chernova L., Reutzel S., Kolbe M., Herlach D.M. Dendritic solidification and fragmentation in undercooled Ni–Zr alloys // *Mater. Sci. Eng. A*. 2007. **449–451**. P. 649–653.
34. Alexandrov D.V., Bashkirtseva I.A., Malygin A.P., Ryashko L.B. Sea Ice Dynamics Induced by External Stochastic Fluctuations // *Pure Appl. Geophys*. 2013. **170**. P. 2273–2282.
35. Alexandrov D.V., Nizovtseva I.G. Nonlinear dynamics of the false bottom during seawater freezing // *Dokl. Earth Sci*. 2008. **419**. P. 359–362.
36. Alexandrov D.V., Ivanov A.A. The Stefan problem of solidification of ternary systems in the presence of moving phase transition regions // *J. Exper. Theor. Phys*. 2009. **108**. P. 821–829.
37. Alexandrov D.V., Malygin A.P. Convective instability of directional crystallization in a forced flow: The role of brine channels in a mushy layer on nonlinear dynamics of binary systems // *Int. J. Heat Mass Trans.* 2011. **54**. P. 1144–1149.
38. Alexandrov D.V., Malygin A.P. Coupled convective and morphological instability of the inner core boundary of the Earth // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2011. **189**. P. 134–141.