

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.396

САМОСОГЛАСОВАННАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ И ВОЛНАХ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ИСТОЧНИКАМ

© 2021 г. А. С. Раевский^{a, *}, С. Б. Раевский^a, А. Ю. Седаков^b, А. А. Титаренко^b

^aНижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,
ул. Минина, 24, Нижний Новгород, 603950 Российская Федерация

^bНаучно-исследовательский институт измерительных систем им. Ю.Е. Седакова
Филиал Всероссийского научно-исследовательского института Российского Федерального ядерного центра,
Бокс № 486, Нижний Новгород, 603950 Российская Федерация

*E-mail: raevsky@nntu.ru

Поступила в редакцию 02.07.2019 г.

После доработки 02.07.2019 г.

Принята к публикации 19.07.2019 г.

Показано, что функция источника, стоящая в правой части уравнения Гельмгольца, являющаяся решением однородной краевой задачи на этом уравнении, обеспечивает возбуждение присоединенной волны (колебания). Поскольку указанная волна (колебание) существует только в присутствии источника обозначенного типа, предложено классифицировать их (волну, колебания) как присоединенные к источнику, а задачу, “порождающую” их, считать самосогласованной, поскольку возбуждаемая волна (колебание) находится в синхронизме с источником по всем волновым числам и по энергетическому балансу.

DOI: 10.31857/S0033849421040112

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–4] показано, что в экранированных волноводах с неоднородным заполнением наряду с собственными волнами могут существовать присоединенные к источнику несобственные волны. Эти волны описываются краевыми задачами на присоединенном уравнении Гельмгольца, под которым понимается уравнение с правой частью, являющейся решением однородной краевой задачи на том же самом уравнении, но с нулевой правой частью. Такие краевые задачи являются самосогласованными, поскольку в них учитывается обратное влияние возбуждаемого поля на первичный источник, а волновые числа в функциях поля и источника совпадают. Источники указанного вида можно классифицировать как источники типа бегущей волны, находящейся в синхронизме с возбуждаемым ею полем. Постоянная “подпитка” поля распределенным (бегущим) источником приводит к его (поля) линейному нарастанию в направлении распространения. Возникает эффект, подобный взаимодействию волноводного поля с полем пространственного заряда, наблюдаемому в лампе бегущей волны. Можно предположить, что эффект возбуждения распределенным источником присоединенной волны должен наблюдаться не только в неоднородных направляющих структурах.

Понятие “собственные и несобственные волны (колебания)” обычно связывают с формулировкой соответствующих краевых задач. Собственные волны (колебания) описываются решениями полностью однородных краевых задач — однородное дифференциальное уравнение и однородные граничные условия, однородное интегральное уравнение. Несобственные волны (колебания) связывают либо с неоднородными краевыми задачами, в которых решается неоднородное уравнение Гельмгольца, либо с полуюднородными краевыми задачами — однородное уравнение и частично неоднородные (ненулевые) граничные условия [5]. Несобственные волны второй категории по классификации, введенной в [6], характерны, например, для открытых направляющих структур — волны, не удовлетворяющие нулевому граничному условию на бесконечности. В данной работе рассматриваются несобственные волны (колебания), описываемые краевыми задачами на присоединенном уравнении Гельмгольца, которые предлагается классифицировать как волны (колебания), присоединенные к источнику.

Таким образом, несобственные волны подразделяются на описываемые краевой задачей на обычном однородном уравнении Гельмгольца и на волны, представляемые краевой задачей на присоединенном уравнении Гельмгольца. Волны второго вида образуют замкнутый через источник

цикл, как в автогенераторе. В этом смысле они, являясь присоединенными к источнику, описываются самосогласованной краевой задачей. При этом присоединенная и самосогласованная краевые задачи становятся тождественными.

К самосогласованным задачам в форме однородных интегральных уравнений приводят дифракционные задачи, использующие принцип Гюйгенса–Кирхгофа. Краевые задачи относительно функции вторичного источника так или иначе приводят к самосогласованным задачам либо в дифференциальной, либо интегральной, либо в интегро-дифференциальной формулировках. Любые физические процессы с положительной обратной связью, эквивалентной отрицательному сопротивлению в схеме замкнутого цикла, описываются самосогласованными задачами. В самосогласованных задачах об излучении роль указанного отрицательного сопротивления играет обратное влияние на источник поля излучения. Поскольку присоединенные колебания (волны), с одной стороны, “привязаны” к источнику, а с другой стороны, влияют на него (корректируя функцию источника), их следует считать волнами (колебаниями) особого вида. Будучи “привязанными” к источнику, они не являются собственными, однако включенные в общий замкнутый цикл, они являются особыми решениями однородной краевой задачи, которая определяется как присоединенная.

1. САМОСОГЛАСОВАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРИСОЕДИНЕННОМ УРАВНЕНИИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В соответствии с положениями теории присоединенных волн в двухслойных изотропных направляющих структурах [1–4] сформулируем два варианта краевой задачи о присоединенных к источнику бегущих волнах и колебаниях круглых двухслойных экранированного волноводов (КДЭВ) и открытых волноводов. Она состоит из уравнения

$$\frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_z^{e,m}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial z^2} + \epsilon \mu \omega^2 \Pi_z^{e,m} =$$

$$= A^{e,m} R_n^{e,m}(\alpha r) \cos n\varphi \begin{cases} \exp(-i\beta z) \\ \cos \beta_1 z \exp(-\beta_2 z) \end{cases} \quad (1)$$

которое называем присоединенным уравнением Гельмгольца, и граничных условий

$$\Pi_z^e(r=b)=0, \quad \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial r}(r=b)=0;$$

$$\bar{E}_{1\tau}(r=a)=\bar{E}_{2\tau}(r=a); \quad (2)$$

$$\bar{H}_{1\tau}(r=a)=\bar{H}_{2\tau}(r=a),$$

где $\Pi_z^{e,m}$ — продольные компоненты электрического и магнитного векторов Герца; a и b — радиусы внутреннего слоя и экрана; β и $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ — продольные волновые числа присоединенной волны [1] и комплексных волн (КВ) [7] соответственно.

Функции в правой части уравнения (1) в случае КДЭВ имеют [3] вид

$$R_n^{e,m}(\alpha_1 r) = J_n(\alpha_1 r) \quad \text{при } r \in [0, a];$$

$$R_n^e(\alpha_2 r) = \frac{J_n(\alpha_2 r) Y_n(\alpha_2 b) - J_n(\alpha_2 b) Y_n(\alpha_2 r)}{J_n(\alpha_2 a) Y_n(\alpha_2 b) - J_n(\alpha_2 b) Y_n(\alpha_2 a)},$$

$$R_n^m(\alpha_2 r) = \frac{J_n(\alpha_2 r) Y_n'(\alpha_2 b) - J_n'(\alpha_2 b) Y_n(\alpha_2 r)}{J_n(\alpha_2 a) Y_n'(\alpha_2 b) - J_n'(\alpha_2 b) Y_n(\alpha_2 a)},$$

при $r \in [a, b]$,

где $J_n(\alpha_{1,2} r)$, $Y_n(\alpha_2 r)$ — цилиндрические функции первого и второго рода; $\alpha_{1,2}$ — поперечные волновые числа. В открытом диэлектрическом волноводе во внешней области $R_n^{e,m}(\alpha_2 r)$ является функцией Ханкеля.

Краевые задачи, описывающие поля в неоднородных электродинамических структурах в общем случае являются несамосопряженными [7, 8]. Для экранированных структур эти задачи, будучи однородными, являются [5] задачами, определяющими спектры собственных волн (колебаний). Для открытых структур несамосопряженные краевые задачи, являясь полунормированными, могут описывать наряду с собственными волнами несобственные волны дискретного спектра [6, 7]. В экранированных волноводах с неоднородным заполнением наряду с собственными волнами могут [1–3] существовать присоединенные к источнику волны, описываемые присоединенным уравнением Гельмгольца, под которым здесь понимаем уравнение (1) с правой частью, являющейся решением однородной краевой задачи, т.е. задачи на однородном уравнении Гельмгольца с однородными граничными условиями. При этом могут быть два варианта присоединенной задачи: первый, когда поле, присоединенное к источнику, образуется суперпозицией собственных волн [9]; второй, когда оно является полем собственной и присоединенной волн [2], имеющим [10] линейную зависимость амплитуды от продольной координаты. Линейное нарастание по продольной координате амплитуды поля присоединенной волны происходит за счет перекачки в нее энергии из распределенного источника типа бегущей волны, функция которого стоит в верхней правой части уравнения (1). И в том, и в другом случае поля оказываются присоединенными к источнику [3], т.е. несобственными — не существующими без него. Собственные значения несамосопряженных краевых задач в общем случае

являются [11] комплексными величинами и соответствуют различным видам КВ [5, 7, 8], которые в зависимости от признаков несамосопряженности краевой задачи [5] могут иметь различную природу и свойства. Как показано в [7] теоретически и экспериментально, собственные КВ слоистых экранированных волноводов при возбуждении источниками, описываемыми действительными функциями пространственных координат, возникают комплексно-сопряженными парами [12], приводя к возникновению явления комплексного резонанса (КР), описанного в [13]. Резонансным признаком явления служит факт увеличения запасенной энергии во всем диапазоне существования КВ, что позволяет ввести понятие добротности (в энергетической формулировке), вычислить ее и измерить косвенным методом. Понятие КР было введено в [12]. КР в неоднородных направляющих структурах (например, в КДЭВ), отличающийся от обычного резонанса своим существованием не в точке, а во всем диапазоне существования КВ, имеет место [9] только при наличии источника, через который замыкаются прямой и обратный потоки мощности [14]. Таким образом, две взаимодействующие между собой КВ оказываются “привязанными” к источнику, а поле КР — можно назвать “присоединенным” к источнику электромагнитным колебанием. Задача о возбуждении КР является самосогласованной — источник создает пару КВ, образующих замкнутые через этот источник потоки мощности. Она относится к первому указанному выше варианту присоединенной краевой задачи, которому соответствует (1) с нижней правой частью.

Собственные КВ КДЭВ индивидуально, как показано в [12], возбуждаются распределенным источником бегущей волны. В том случае, когда этому источнику соответствует верхняя функция в правой части уравнения (1), возбуждаются одновременно [2] и комплексная, и присоединенная волны. Последнюю называем волной, присоединенной к источнику.

Поля двух КВ с комплексно сопряженными волновыми числами и амплитудами образуют “присоединенное” к источнику колебание, которое в силу обязательного присутствия источника не является собственным. КР, соответствующий этому колебанию, образуется полем, локализованным вблизи источника, т.е. имеющим вид стоячей волны с амплитудой, экспоненциально убывающей при удалении от источника в соответствии с продольной зависимостью поля КВ. Этому колебанию соответствует краевая задача на присоединенном уравнении Гельмгольца (1) с нижней функцией источника в правой части.

Таким образом, первому варианту присоединенной краевой задачи (когда поле образуется суперпо-

зицией собственных КВ) соответствует нижняя функция в правой части уравнения (1), второму варианту (когда возбуждается поле присоединенной волны) соответствует верхняя функция в правой части уравнения (1). В первом случае имеем колебание, присоединенное к источнику, во втором — волну. Термин “волны (колебания), присоединенные к источнику”, предлагается с целью приблизить математическое понятие “присоединенное решение” к его физическому (в данной конкретной ситуации) смыслу. Присоединенное решение связывается с возбуждением волны (колебания) источником особого вида, соответствующего присоединенной краевой задаче, которая ввиду совпадения волновых чисел в функциях поля и источника является самосогласованной.

Функции в правой части уравнения (1) можно рассматривать либо как функцию распределенного источника типа бегущей волны, а присоединенную краевую задачу (1), (2) — как задачу о возбуждении волн, “присоединенных” к указанному источнику, либо как функцию источника (нижняя действительная функция координаты z), создающего КР.

2. РЕШЕНИЯ СФОРМУЛИРОВАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Решения сформулированных краевых задач записываем в виде

$$P_{z_{1,2}}^{e,m} = \left[C_{n_{1,2}}^{e,m} R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r) + D_{n_{1,2}}^{e,m} \left(-\frac{iz}{2\beta} \right) \times \right. \\ \left. \times R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r) + \rho^{e,m}(\alpha_{1,2}r) \right] \times \\ \times \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \exp(-i\beta z), \quad (3)$$

где функции $\rho^{e,m}(\alpha_{1,2}r)$ удовлетворяют уравнениям

$$\rho''(\alpha_{1,2}r) + \frac{1}{r} \rho'(\alpha_{1,2}r) + \left(\alpha_{1,2}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \rho(\alpha_{1,2}r) = \\ = \bar{D}_{n_{1,2}}^{e,m} R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r), \quad (4)$$

и граничным условиям Дирихле и Неймана соответственно на экранирующей поверхности $r = b$. Уравнения (4) можно рассматривать как присоединенные уравнения Бесселя. В открытом волноводе во внешней области $R_n^{e,m}(\alpha_2 r)$ являются функциями Ханкеля. В этом случае не требуется наложение условий Дирихле и Неймана на функции $\rho^{e,m}(\alpha_2 r)$ заданные на внешней границе.

Верхнее решение в (3) описывает присоединенные волны, нижнее — присоединенное колебание,

соответствующее комплексному резонансу. Подставляя решения (3) в уравнения (1), получаем

$$\begin{aligned} C_{n_{1,2}}^{e,m} \left[R_n^{e,m''}(\alpha_{1,2}r) + \frac{1}{r} R_n^{e,m'}(\alpha_{1,2}r) + \right. \\ \left. + \left(\alpha_{1,2}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r) \right] + \\ + D_{n_{1,2}}^{e,m} \left[R_n^{e,m''}(\alpha_{1,2}r) + \frac{1}{r} R_n^{e,m'}(\alpha_{1,2}r) + \right. \\ \left. + \left(\alpha_{1,2}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r) \right] + \left[\rho^{e,m''}(\alpha_{1,2}r) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \rho^{e,m'}(\alpha_{1,2}r) + \left(\alpha_{1,2}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \rho^{e,m}(\alpha_{1,2}r) \right] - \\ - D_{n_{1,2}}^{e,m} R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r) = A^{e,m} R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r). \end{aligned} \quad (5)$$

Характер возбуждаемой заданным источником волны определяется амплитудой $A^{e,m}$ этого источника — условием, накладываемым на эту амплитуду. Из (5) видно, что решения (3) удовлетворяют с учетом уравнения (4) присоединенным уравнениям Гельмгольца (1) при условии

$$\bar{D}_{n_{1,2}}^{e,m} - D_{n_{1,2}}^{e,m} = A^{e,m}. \quad (6)$$

В том случае, когда

$$\bar{D}_{n_{1,2}}^{e,m} = D_{n_{1,2}}^{e,m}, \quad (7)$$

решения (3) удовлетворяют обычному (однородному) уравнению Гельмгольца и соответствуют точке жордановой кратности волновых чисел [15], обеспечивая полноту системы волн направляющей структуры [16, 17].

Условия (6), (7) являются естественными дополнительными условиями, накладываемыми на источник, поскольку от последнего зависит вид возбуждаемого им поля: поля присоединенных волн или колебаний.

Граничные условия при $r = a$ дают систему функциональных уравнений, зависящих от продольной координаты. Приравнявая в них члены, имеющие линейную зависимость от координаты z , получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $D_{n_{1,2}}^{e,m}$, условие нетривиальности решений которой дает уравнение, совпадающее с дисперсионным уравнением нормальных волн КДЭВ.

Не зависящие от продольной координаты части указанных выше функциональных уравнений при условии (4) дают систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $C_{n_{1,2}}^{e,m}$. Главные определители двух указанных систем уравнений (однородной и неоднородной) совпадают. Равенство их нулю дает дисперсионное уравнение нормальных волн. Нетривиальные решения системы линейных одно-

родных алгебраических уравнений (коэффициенты $D_{n_{1,2}}^{e,m}$) подставляются в систему неоднородных уравнений, решаемую относительно коэффициентов $C_{n_{1,2}}^{e,m}$.

Граничные условия рассматриваемой краевой задачи выполняются в том случае, когда системы однородных и неоднородных линейных алгебраических уравнений имеют совместные решения. Система однородных уравнений имеет нетривиальные решения только при равенстве нулю ее определителя. Поскольку главный определитель системы неоднородных уравнений совпадает с определителем системы однородных уравнений, система неоднородных уравнений может иметь решения только при равенстве нулю ее дополнительных определителей.

Следовательно, собственные значения краевой задачи, определяющие волновые числа волн, описываемых ею (задачей), находятся как совместные решения трех трансцендентных дисперсионных уравнений, решаемых совместно с уравнениями, связывающими волновые числа

$$\epsilon_{1,2} \mu_{1,2} \omega^2 = \alpha_{1,2}^2 + \beta^2$$

и обеспечивающими выполнение условий Дирихле и Неймана для функций $\rho^{e,m}$.

Численные исследования [1] показали существование таких решений, соответствующих волнам и колебаниям, которые можно назвать присоединенными к источнику, поскольку они описываются уравнениями (1), в правой части которых стоят функции, являющиеся решениями соответствующих краевых задач на однородном уравнении Гельмгольца.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, решая краевые задачи на присоединенных уравнениях Гельмгольца, получаем волны и колебания, существующие только при наличии источника, т.е. присоединенные (привязанные) к нему. Поскольку волновые числа, присутствующие в правых частях уравнения (1), находятся из указанных дисперсионных уравнений, рассматриваемую краевую задачу следует называть самосогласованной — поле источника и поле присоединенной волны (колебания) образуют единый (замкнутый) электромагнитный процесс. Присоединенные волны (колебания) не следует классифицировать как собственные, поскольку они описываются решениями неоднородных краевых задач на уравнениях (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малахов В.А., Раевский А.С., Раевский С.Б. // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. № 2. С. 71.

2. *Malakhov V.A., Raevskii A.S., Raevskii S.B.* // Int. J. Electromagnetics and Appl. 2012. V. 2. № 5. P. 114.
3. *Раевский А.С., Раевский С.Б.* // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39. № 23. С. 13.
4. *Раевский А.С., Раевский С.Б., Седаков А.Ю.* // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17. № 3. С. 6.
5. *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988.
6. *Шевченко В.В.* // РЭ. 1969. Т. 12. № 12. С. 1768.
7. *Раевский А.С., Раевский С.Б.* Комплексные волны. М.: Радиотехника, 2010.
8. *Раевский А.С., Раевский С.Б.* Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами. М.: Радиотехника, 2004.
9. *Иванов А.Е., Раевский С.Б.* // РЭ. 1991. Т. 36. № 8. С. 1463.
10. *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электродинамических системах. М.: Изд-во МГУ, 1983.
11. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
12. *Веселов Г.И., Калмык В.А., Раевский С.Б.* // Радиотехника. 1980. Т. 35. № 9. С. 59.
13. *Веселов Г.И., Калмык В.А., Раевский С.Б.* // Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 8. С. 900.
14. *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* // Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 9. С. 1041.
15. *Краснушкин П.Е., Федоров Е.Н.* // РЭ. 1972. Т. 17. № 6. С. 1129.
16. *Шевченко В.В.* // Радиофизика. 1971. Т. 14. № 8. С. 1242.
17. *Шевченко В.В.* // РЭ. 1986. Т. 31. № 3. С. 456.