

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ
С ТРАНСЛЯЦИОННОЙ СИММЕТРИЕЙ

© 2019 г. В. А. Сыровой*

ВЭИ – филиал ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ,
Российская Федерация, 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 12

*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 05.04.2018 г.

После доработки 05.04.2018 г.

Принята к публикации 19.09.2018 г.

Среди трехмерных инвариантных решений уравнений нестационарного нерелятивистского пучка выявлены варианты, для которых одна из декартовых координат является циклической при пространственных в общем случае траекториях. Проанализированы уравнения плоских соленоидальных течений, решения которых напрямую не связаны с групповыми свойствами общих уравнений пучка.

DOI: 10.1134/S0033849419060111

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее общий подход к построению максимальных по полноте наборов точных решений уравнений в частных производных связан с исследованием групповых свойств соответствующих систем и понятием инвариантного решения [1]. Результаты, относящиеся к уравнениям плотного электронного пучка, представлены в виде таблиц в работе [2], в которых приведен функциональный вид параметров потока, обеспечивающий трансформацию уравнений в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Исследованию и интерпретации решений уравнений стационарного пучка посвящено значительное количество работ (см. библиографию в [2]). Эти решения привели к пониманию физики явления, были использованы при создании электронно-оптической системы гиротрона [3, 4]; решения [5–8] положены в основу некоторых моделей сильнотоочных релятивистских диодов с магнитной самоизоляцией [9–11]. При рассмотрении задач, где необходима высокая точность вычислений, эти решения являются эталонами для тестирования приближенных и численных моделей.

Решениям уравнений нестационарного пучка в случае нерелятивистских скоростей посвящено гораздо меньше работ [12–17], причем их анализ и возможная интерпретация проведены только в незначительной степени. Двумерные релятивистские решения, носящие аperiодический характер, исследованы в работе [18]. Между тем рабо-

чим режимам приборов СВЧ свойственны осцилляционные состояния потока.

В последнее время внимание исследователей привлечено к приборам с планарной геометрией и ленточным электронным пучком (см., например, библиографию в [19]). В работе [20] среди трехмерных точных решений [17] выявлены случаи осесимметричного вырождения и проанализированы соответствующие решения.

Цель данной работы — дать анализ двумерных решений, для которых одна из декартовых координат является циклической, а также исследовать уравнения плоских соленоидальных потоков, что привело к построению новых нестационарных решений в элементарных функциях.

Нестационарный нерелятивистский пучок во внешнем квазистационарном магнитном поле описывается следующей системой уравнений с частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= \nabla \phi + \vec{v} \times \vec{H}, \quad \nabla \vec{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \quad \Delta \phi = \rho. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\vec{v}$, $\vec{H}$ — векторы скорости и напряженности магнитного поля, ϕ — потенциал электрического поля, ρ — плотность пространственного заряда.

Уравнения (1) и все последующие соотношения записаны в нормировках, исключающих физические константы используемой системы единиц [19].

1. РЕШЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Для проекций компонент скорости на оси декартовой системы x, y, z и цилиндрической системы R, ψ, z примем обозначения u, v, w и v_R, v_ψ, w соответственно.

Электронный поток с параметрами

$$\begin{aligned} u &= xI_1(t), \quad v = xI_2(t), \quad \varphi = x^2I_4(t), \quad \rho = I_5(t), \\ w &= \exp(vy)W(t, \xi), \quad I_1 = \frac{U'}{U}, \quad \xi = \frac{x}{U(t)}, \quad (2) \\ W(t, \xi) &= W(\xi) \exp(-v\xi \int UI_2 dt) \end{aligned}$$

описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} I_5' + I_1^2 &= 2I_4 + I_2H_z, \quad I_2' + I_1I_2 = -I_1H_z, \\ I_5' + I_1I_5 &= 0, \quad 2I_4 = I_5. \end{aligned} \quad (3)$$

Ее решение определено формулами

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\omega}{U}(-A \sin \omega t + B \cos \omega t), \quad I_2 = \frac{V_0}{U} - H_z, \\ I_5 &= \frac{\rho_0}{U}, \quad I_4 = \frac{\rho_0}{2U}, \quad U = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C, \\ C &= \frac{\rho_0 + \omega V_0}{\omega^2}, \quad \omega = H_z, \quad w = \exp(vy)W\left(\frac{x}{U}\right) \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{vx}{U}[(V_0 - C)t - A \sin \omega t + B \cos \omega t]\right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

По умолчанию не поясняемые символы (A, B, C, v в (4)), а также символы с индексом нуль являются константами.

Постоянные можно подобрать так, чтобы функция U не обращалась в нуль, а при $V_0 = C$, $V_0 = \rho_0/[\omega(\omega - 1)]$ при любом значении параметра v скорость по оси z меняется в конечных пределах; $W(\xi)$ в (4) — произвольная функция указанного аргумента.

Решение (4) определяет осцилляционный режим пучка с экспоненциальной по y зависимостью у z -компоненты скорости. При $v = 0$ оно описывает одномерный нестационарный поток.

Решение со следующей структурой параметров потока:

$$\begin{aligned} u &= xI_1(t), \quad v = xI_2(t), \quad w = \frac{h'}{h}z + \frac{1}{h}W(\xi), \\ \varphi &= \frac{1}{2} \frac{h''}{h} z^2 + x^2 I_4(t), \quad \rho = I_5(t), \quad I_1 = \frac{U'}{U}, \quad (5) \\ \xi &= \frac{x}{U(t)} \end{aligned}$$

удовлетворяет системе уравнений с произвольной функцией времени $h(t)$

$$\begin{aligned} I_1' + I_1^2 &= 2I_4 + I_2H_z, \quad I_2' + I_1I_2 = -I_1H_z, \\ I_5' + \left(I_1 + \frac{h'}{h}\right)I_5 &= 0, \quad 2I_4 = I_5 - \frac{h''}{h}. \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) может быть трансформирована к виду

$$\begin{aligned} I_2 &= -H_z + \frac{V_0}{U}, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{hU}, \\ U'' + \left(H_z^2 + \frac{h''}{h}\right)U &= \frac{\rho_0}{h} + V_0H_z. \end{aligned} \quad (7)$$

Получение решения, носящего осцилляционный характер, связано с интегрированием уравнения

$$h''/h = F(t) \quad (8)$$

и однотипного неоднородного уравнения для U из (7). Требуемые свойства имеют функции Бесселя, причем при апериодических функциях чисто мнимого аргумента в z -компоненте скорости в выражение для U будут входить вследствие перемены знака функции действительного аргумента. Дополнительная возможность получения интересных временных зависимостей у продольной скорости предоставляет произвольная функция $W(\xi)$. Приведем несколько примеров подобного рода. При $H_z = 0$ имеем

$$\begin{aligned} F(t) &= F_0^2 t^{2v}, \quad h = \sqrt{t} I_\mu(\tau), \quad \tau = 2\mu F_0 t^{v+1}, \\ \mu &= \frac{1}{2(v+1)}, \quad \frac{h'}{h} = \frac{1}{2t} + F_0 t^v \left[I_{\mu-1}(\tau) - \frac{\mu}{t} I_\mu(\tau) \right]; \\ F(t) &= \frac{1}{t^4} \exp\left(\frac{2}{t}\right), \quad h = t I_0(\tau), \quad \tau = \exp\left(\frac{1}{t}\right), \\ \frac{h'}{h} &= \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \exp\left(\frac{1}{t}\right) I_1(\tau); \\ F(t) &= b^2 c^2 \exp(2ct), \\ h &= I_0(\tau), \quad \tau = b \exp(ct), \quad \frac{h'}{h} = bc \exp(ct) I_1(\tau). \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим более подробно первый случай из (9). Общее решение для функции U при $V_0 = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{t} [AJ_\mu(\tau) + BY_\mu(\tau)] + \rho_0 \sqrt{t} \int \frac{1}{\sqrt{\eta} I_\mu(\tau(\eta))} \times \\ &\times [Y_\mu(\tau(\eta)) J_\mu(\tau(\eta)) - J_\mu(\tau(\eta)) Y_\mu(\tau(\eta))] d\eta, \end{aligned} \quad (10)$$

где $Y_\mu(\tau)$ — бесселева функция второго рода.

Функции Бесселя с полуцелыми индексами выражаются через элементарные функции [21]:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{2n}{1+2n}; \quad n=1, \quad v = -\frac{2}{3}, \quad \mu = \frac{3}{2}; \\ h &= \sqrt{t} I_{3/2}(\tau), \quad \tau = 3F_0 \sqrt[3]{t}; \\ I_{1/2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi\tau}} \operatorname{sh}\tau, \quad I_{3/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi\tau}} \left(\operatorname{ch}\tau - \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau} \right); \\ \frac{h'}{h} &= \frac{1}{2t} (1 - 3F_0 t^{-2/3}) + F_0 t^{-2/3} \frac{\tau \operatorname{sh}\tau}{\tau \operatorname{ch}\tau - \operatorname{sh}\tau}. \end{aligned} \quad (11)$$

При $A = 1, B = 0$ получаем

$$\begin{aligned} J_{3/2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi\tau}} \left(\frac{\sin\tau}{\tau} - \cos\tau \right), \quad Y_{3/2} = -J_{-3/2} = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi\tau}} \left(\sin\tau + \frac{\cos\tau}{\tau} \right); \quad U = \sqrt{\frac{2}{3\pi F_0}} \left(\frac{\sin\tau}{\tau} - \cos\tau \right) + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho_0 \tau \left[-\left(\sin\tau + \frac{\cos\tau}{\tau} \right) \int \frac{\sin\eta - \eta \cos\eta}{\eta \operatorname{ch}\eta - \operatorname{sh}\eta} \eta^{-3/2} d\eta + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\sin\tau}{\tau} - \cos\tau \right) \int \frac{\eta \sin\eta + \cos\eta}{\eta \operatorname{ch}\eta - \operatorname{sh}\eta} \eta^{-3/2} d\eta \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

При $H_z \neq 0$ решение, выражаемое через функции Бесселя, существует при следующей специализации функции $F(t)$ в (8):

$$\frac{h''}{h} = F_0^2 t, \quad h = \sqrt{t} I_{1/3}(\tau), \quad \tau = \frac{2}{3} t^{3/2}. \quad (13)$$

Решение однородного уравнения для функции U из (7) описывается формулой

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{t} [AJ_{1/3}(\tau) + BY_{1/3}(\tau)], \\ \bar{t} &= \frac{1}{F_0^2} (F_0^2 t + H_z^2)^{-2/3}, \quad \tau = \frac{2}{3} \bar{t}^{3/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

При $h = \exp(at)$ решение вида (5) может быть выражено в элементарных функциях:

$$\begin{aligned} u &= xI_1(t), \quad v = xI_2(t), \quad w = az + \exp(-at)W(\xi), \\ \varphi &= \frac{1}{2} a^2 z^2 + x^2 I_4(t), \quad \rho = I_5(t), \quad \xi = \frac{x}{U(t)}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$U = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{\rho_0}{a^2 + \omega^2} \exp(-at) + \frac{V_0 H_z}{\omega^2},$$

$$I_2 = -H_z + \frac{V_0}{U}, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{U} \exp(-at), \quad \omega^2 = a^2 + H_z^2.$$

При $a < 0$ и $t \rightarrow \infty$ плотность ρ стремится к постоянному значению, соответствующему следующему стационарному состоянию пучка при $W = W_0 \xi$:

$$\begin{aligned} u &= -ax, \quad v = -H_z x, \quad w = az + W_0 x, \\ \varphi &= \frac{1}{2} a^2 z^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2, \quad \rho = 2a^2 + H_z^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Течение (15) является немонотонноэнергетическим с полной энергией

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \bar{v}^2 - \varphi = \frac{1}{2} W_0 z (2ax + W_0 z). \quad (17)$$

Траектории частиц проецируются прямыми на плоскость (x, y) и гиперболами на плоскость (x, z) :

$$\begin{aligned} y - y_0 &= (H_z/a)x, \quad \left(\sqrt{16 + W_0^2} + W_0 \right) \bar{x}^2 - \\ &- \left(\sqrt{16 + W_0^2} - W_0 \right) \bar{z}^2 = \text{const}, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= 4/W_0, \end{aligned} \quad (18)$$

где оси $\bar{x}, \bar{z}$ повернуты на угол α относительно x, z . Эквипотенциальными поверхностями являются эллиптические цилиндры с осью y и отношением полуосей сечения по x, z , равным a/ω .

При $H_z = 0$ решение вида

$$\begin{aligned} u &= \frac{f'}{f} x + I_1(t), \quad \varphi = \frac{1}{2} \frac{f''}{f} x^2 + \frac{\Psi'}{f} x, \quad \rho = I_5(t), \\ v &= V(\xi), \quad w = W(\xi), \quad \xi = \frac{x}{f} - \int \frac{I_1}{f} dt \end{aligned} \quad (19)$$

с произвольными функциями $f(t), \Psi(t)$ и $V(\xi), W(\xi)$ описывается уравнениями

$$I_1' + \frac{f'}{f} I_1 = \frac{\Psi'}{f}, \quad I_5' + \frac{f'}{f} I_5 = 0, \quad I_5 = \frac{f''}{f}. \quad (20)$$

Для функций из (20) получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Psi}{f}, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{f}, \quad f'' = \rho_0, \\ f &= \frac{1}{2} \rho_0 t^2 + f_1 t + f_0, \quad \xi = \frac{x}{f} - \int \frac{\Psi}{f^2} dt. \end{aligned} \quad (21)$$

За счет произвольной функции $\Psi(t)$ при убывающей плотности можно построить осциллирующее решение, например,

$$\Psi = f^2 \sin \omega t, \quad \xi = \frac{x}{f} + \frac{1}{\omega} \cos \omega t. \quad (22)$$

Решение со следующими искомыми функциями:

$$\begin{aligned} u &= \frac{f'}{f} x + I_1(t), \quad \varphi = \frac{1}{2} \frac{h''}{h} z^2 + \frac{1}{2} \frac{f''}{f} x^2 + \frac{\Psi'}{f} x, \\ \rho &= I_5(t), \quad v = V(\xi), \quad w = \frac{h'}{h} z + \frac{1}{h} W(\xi), \\ \xi &= \frac{x}{f} - \int \frac{I_1}{f} dt \end{aligned} \quad (23)$$

удовлетворяет уравнениям

$$I_1' + \frac{f'}{f} I_1 = \frac{\Psi'}{f}, \quad I_5' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} \right) I_5 = 0, \quad (24)$$

$$\frac{f''}{f} + \frac{h''}{h} = I_5.$$

Система (24) может быть трансформирована к соотношениям

$$I_1 = \frac{\Psi}{f}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{fh}, \quad f'' + \frac{h''}{h} f = \frac{\rho_0}{h}. \quad (25)$$

Для функции f в (25) имеет место то же уравнение, что и для U в (7), если $V_0 = H_z = 0$. При специализациях произвольной функции Ψ зависимость от времени параметра ξ может быть очень разнообразной, например

$$\Psi = f^{k+2} f, \quad \xi = \frac{x}{f} - \frac{1}{k+1} f^{k+1}, \quad \frac{h''}{h} = F_0^2 t^{2\nu},$$

$$\varphi = \frac{1}{2} F_0^2 t^{2\nu} (z^2 - x^2) + \frac{\rho_0}{2fh} x^2 +$$

$$+ f^{k+2} \left[(k+2) \frac{f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f} \right] x; \quad (26)$$

$$\Psi = f^2 f' \cos f, \quad \xi = \frac{x}{f} + \sin f,$$

$$\varphi = \frac{1}{2} F_0^2 t^{2\nu} (z^2 - x^2) + \frac{\rho_0}{2fh} x^2 +$$

$$+ \left[f^2 \left(\frac{f''}{f} + 2 \frac{f'^2}{f^2} \right) \cos f - f f'^2 \sin f \right] x.$$

Решение, параметры которого имеют вид

$$v_R = R I_1(t), \quad v_\psi = R I_2(t),$$

$$w = R^\nu W(\xi) \exp(-\nu \int I_1 dt), \quad (27)$$

$$\varphi = R^2 I_4(t), \quad \rho = I_5(t), \quad \xi = \psi - \int I_2 dt$$

описывается уравнениями

$$I_1' + I_1^2 - I_2^2 = 2I_4 + I_2 H_z, \quad I_2' + 2I_1 I_2 = -I_1 H_z, \quad (28)$$

$$I_5' + 2I_1 I_5 = 0, \quad 4I_4 = I_5.$$

Полагая $I_1 = U'/U$, трансформируем систему (28) следующим образом:

$$I_2 = \frac{V_0}{U^2} - \frac{1}{2} H_z, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{U^2}, \quad (29)$$

$$U'' - \frac{V_0^2}{U^3} - \frac{\rho_0}{2U} + \frac{1}{4} H_z^2 U = 0.$$

Первый интеграл уравнения для U определен формулой

$$U'^2 = -\frac{V_0^2}{U^2} + \frac{\rho_0}{2} \ln U - \frac{1}{4} H_z^2 U^2 + C \equiv C - G(U). \quad (30)$$

Соотношение (30) с точностью до смысла констант совпадает с уравнением, описывающим эволюцию параксиального релятивистского пучка в дрейфовом пространстве во внешнем магнитном поле $\Omega_z = H_z$, который стартовал с катода с начальным радиусом δ_0 при магнитном поле Ω_{z0} . Соответствие прочих констант устанавливают выражения

$$\frac{V_0^2}{2} = \frac{1}{4} \frac{\Omega_{z0}^2}{\delta_0^4}, \quad \frac{\rho_0}{2} = \frac{J}{\tilde{V}}, \quad (31)$$

где J — плотность тока пучка, $\tilde{V}$ — импульс.

Уравнение типа (30) описывает движение в потенциальной яме “частицы” с координатой U и “интегралом энергии” $U'^2 + G(U) = C$. Амплитуда колебаний A и их период T определены формулами

$$G(A) = C, \quad T = 4 \int_0^A \frac{dU}{\sqrt{C - G(U)}}. \quad (32)$$

2. РЕШЕНИЯ С НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Нестационарное решение при $H_z = 0$ с параметрами вида

$$u = x^{1-\gamma} I_1(\xi), \quad v = x^\alpha I_2(\xi), \quad w = \frac{c}{t} z + x^\beta I_3(\xi),$$

$$\varphi = \frac{c(c-1)}{t^2} z^2 + x^{2(1-\gamma)} I_4(\xi), \quad (33)$$

$$\rho = x^{-2\gamma} I_5(\xi), \quad \xi = tx^{-\gamma}$$

удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$(1 - \gamma \xi I_1) I_1' + (1 - \gamma) I_1^2 = -\gamma \xi I_4' + 2(1 - \gamma) I_4,$$

$$(1 - \gamma \xi I_1) I_2' + \alpha I_1 I_2 = 0,$$

$$(1 - \gamma \xi I_1) I_3' + \beta I_1 I_3 + \frac{c}{\xi} I_3 = 0,$$

$$(1 - \gamma \xi I_1) I_5' - \gamma \xi I_5 I_1' + \left[(1 - 3\gamma) I_1 - \frac{c}{\xi} \right] I_5 = 0, \quad (34)$$

$$\gamma^2 \xi^2 I_4'' + \gamma(5\gamma - 3) \xi I_4' +$$

$$+ 2(1 - \gamma)(1 - 2\gamma) I_4 = I_5 - \frac{c(c-1)}{\xi^2}.$$

Решение может быть получено только численными методами.

При произвольных функциях $V(\xi)$, $W(\xi)$ рассмотрим поток с параметрами

$$u = \frac{1}{t} I_1(x), \quad v = V(\xi), \quad w = \frac{c}{t} z + t^{-c} W(\xi),$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{c(c-1)}{t^2} z^2 + \frac{1}{t^2} I_4(x), \quad \rho = \frac{1}{t^2} I_5(x), \quad (35)$$

$$\xi = t \exp\left(-\int \frac{dx}{I_1}\right),$$

причем функции в (35) подчиняются уравнениям

$$I_1 I_1' - I_1 = I_4', \quad (I_1 I_5)' + (c-2) I_5 = 0, \quad (36)$$

$$I_4'' = I_5 - c(c-1).$$

Полагая $I_1 = dx/d\tau \equiv \dot{x}$, $I_1 I_1' = \dot{I}_1$, проинтегрируем уравнение для I_5 :

$$I_1 I_5 = J_0 \exp[(2-c)\tau] \quad (37)$$

и представим уравнение для I_4 в виде

$$\left(I_4'\right)' = J_0 \exp[(2-c)\tau] - c(c-1)\dot{x}, \quad (38)$$

$$I_4' = \frac{J_0}{2-c} \exp[(2-c)\tau] - c(c-1)x + E_0.$$

Первое соотношение в (36) теперь можно преобразовать, сведя его к линейному уравнению относительно переменной x :

$$\ddot{x} - \dot{x} + \beta x = \frac{J_0}{\alpha} \exp(\alpha\tau) + E_0, \quad (39)$$

$$\alpha = 2-c, \quad \beta = c(c-1).$$

При $\beta > 1/4$ характеристическое уравнение имеет комплексные корни

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \beta}, \quad -\infty < c < \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (40)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} < c < \infty; \quad \omega = \sqrt{c(c-1) - 1/4}.$$

В результате зависимость $x(\tau)$ содержит периодические функции

$$x = \exp\left(\frac{\tau}{2}\right) (A \cos \omega\tau + B \sin \omega\tau) + \frac{J_0}{\gamma} \exp(\alpha\tau) + \frac{E_0}{\beta},$$

$$\gamma = \alpha^2 (\alpha - \beta) = (2-c)^2 (2-c^2);$$

$$I_1 = \dot{x} = \exp\left(\frac{\tau}{2}\right) \times \quad (41)$$

$$\times \left[\left(\frac{1}{2} A + B\omega\right) \cos \omega\tau + \left(\frac{1}{2} B - A\omega\right) \sin \omega\tau \right] +$$

$$+ \frac{\alpha J_0}{\gamma} \exp(\alpha\tau).$$

Функция I_4 вычисляется из уравнений (38):

$$\dot{I}_4 = I_1 I_4' = \frac{J_0}{\alpha} \exp(-\alpha\tau) \dot{x} - \beta x \dot{x} + E_0 \dot{x}, \quad (42)$$

$$I_4 = -\frac{1}{2} \beta x^2 + E_0 x + \frac{J_0}{\alpha} \int \exp(-\alpha\tau) \dot{x} d\tau.$$

Случай, когда $c = 2$, рассмотрим отдельно:

$$I_1 I_5 = J_0, \quad \left(I_4'\right)' = J_0 - 2\dot{x}, \quad I_4' = -2x + J_0\tau + E_0, \quad (43)$$

$$\dot{I}_4 = I_1 I_4' = -2x\dot{x} + J_0\tau\dot{x} + E_0\dot{x},$$

$$I_4 = -x^2 + E_0 x + J_0 \int \tau \dot{x} d\tau.$$

Интегралы в (42), (43) легко выражаются через элементарные функции.

Стационарное решение с параметрами потока вида

$$u = u(x), \quad v = v(x), \quad w = az + W(x), \quad (44)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} a^2 z^2 + \Phi(x), \quad \rho = \rho(x)$$

описывается следующей системой уравнений:

$$uu' = \Phi' + v H_z, \quad v' = -H_z, \quad (\rho u)' + a\rho = 0, \quad (45)$$

$$\Phi'' = \rho - a^2, \quad uW' + aW = 0.$$

Полагая $u = dx/dt \equiv \dot{x}$, получим преобразованную систему (45)

$$\dot{u} = \Phi' + v H_z, \quad v = -H_z x + V_0, \quad (\rho u)' + a\rho u = 0,$$

$$(\Phi')' = \rho u - a^2 \dot{x}; \quad \rho u = J_0 \exp(-at), \quad (46)$$

$$\Phi' = -\frac{J_0}{a} \exp(-at) - a^2 x + E_0.$$

Соотношения (46) сводятся к одному уравнению относительно координаты x

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{J_0}{a} \exp(-at) + E_0 + V_0 H_z, \quad \omega^2 = H_z^2 + a^2,$$

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t - \bar{J}_0 \exp(-at) + \bar{E}_0; \quad (47)$$

$$\bar{J}_0 = \frac{J_0}{a(a^2 + \omega^2)}, \quad \bar{E}_0 = \frac{E_0 + V_0 H_z}{\omega^2}.$$

Дополним параметрическое представление траекторий соотношениями для $y(t)$, $z(t)$:

$$y - y_0 = -\frac{H_z}{\omega} (A \sin \omega t - B \cos \omega t) -$$

$$- \frac{H_z \bar{J}_0}{a} \exp(-at) - H_z \bar{E}_0 t, \quad (48)$$

$$z = C \exp(at) - \frac{W_0}{2a} \exp(-at).$$

Потенциал определен выражениями с легко вычисляемым интегралом

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{J_0}{a} \dot{x} \exp(-at) - a^2 x \dot{x} + E_0 \dot{x}, \\ \Phi &= -\frac{1}{2} a^2 x^2 + E_0 x - \frac{J_0}{a} \int \dot{x} \exp(-at) dt.\end{aligned}\quad (49)$$

Пусть на стартовой поверхности $x = 0$ выполнены условия

$$\begin{aligned}x &= 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \\ \Phi' &= 0 \quad (V_0 = 0, E_0 = J_0/a).\end{aligned}\quad (50)$$

Тогда выражения для x, y принимают вид

$$\begin{aligned}x &= \bar{J}_0 \left[\cos \omega t - \exp(-at) - \frac{a}{\omega} \sin \omega t \right] + \\ &+ \frac{J_0}{a\omega^2} (1 - \cos \omega t), \quad y - y_0 = -\frac{H_z \bar{J}_0}{a} \times \\ &\times \left[\frac{a^2}{\omega^2} \left(\cos \omega t - \frac{a}{\omega} \sin \omega t \right) + \exp(-at) \right] - \frac{H_z J_0}{a\omega^2} t.\end{aligned}\quad (51)$$

Асимптотика формул (51) соответствует режиму ограничения эмиссии пространственным зарядом при старте в z -направлении по касательной с неэвипотенциальной плоскости $x = 0$, на которой $\phi \sim z^2$:

$$x \sim t^3, \quad \Phi \sim t^4, \quad y - y_0 \sim t^4, \quad z - z_0 \sim t. \quad (52)$$

При $a > 0$ скорость по оси x может обращаться в нуль, что приводит к появлению виртуального эмиттера и соответствующему ограничению области существования решения. Для $a = w = 1$ условие $u = 0$ выполняется при $t = 225.8^\circ$. Из формул (47) следует, что при $a > 0, t \rightarrow \infty$ координата x меняется в конечных пределах, это свидетельствует об образовании виртуального эмиттера и без выполнения условий (50). При отрицательных значениях a образования плоскостей отражения можно избежать.

Одномерное нестационарное электростатическое течение с параметрами

$$\begin{aligned}u &= t^\beta I_1(\xi), \quad v = t^\alpha I_2(\xi), \quad w = t^\gamma I_3(\xi), \\ \varphi &= t^{2\alpha} I_4(\xi), \quad \rho = \frac{1}{t^2} I_5(\xi), \quad \xi = y t^{-\alpha-1}\end{aligned}\quad (53)$$

удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}[I_2 - (\alpha + 1)\xi] I_1' + \beta I_1 &= 0, \\ [I_2 - (\alpha + 1)\xi] I_2' + \alpha I_2 &= I_4', \\ [I_2 - (\alpha + 1)\xi] I_3' + \gamma I_3 &= 0, \\ [I_2 - (\alpha + 1)\xi] I_5' + (I_2' - 2) I_5 &= 0, \\ I_4'' &= I_5.\end{aligned}\quad (54)$$

Построим частное решение системы (54) при $I_1 \equiv 0$. Введем вместо ξ новую переменную $\tau = \tau(\xi)$ при помощи соотношения

$$I_2 - (\alpha + 1)\xi = \frac{d\xi}{d\tau} \equiv \dot{\xi}, \quad I_2 = \ddot{\xi} + (\alpha + 1)\dot{\xi}. \quad (55)$$

Система (54) при этом примет вид

$$\begin{aligned}I_2 + \alpha I_2 &= I_4', \quad I_3 + \gamma I_3 = 0, \\ I_5 + \left(\frac{\ddot{\xi}}{\dot{\xi}} - 2 \right) I_5 &= 0, \quad \left(\frac{\dot{\xi}}{I_4'} \right) = \xi I_5.\end{aligned}\quad (56)$$

Интегрируя уравнения для I_3, I_5 и пользуясь затем двумя оставшимися соотношениями (56), получим

$$\begin{aligned}I_3 &= W_0 \exp(-\gamma\tau), \quad I_5 = \frac{\rho_0}{\dot{\xi}} \exp(2\tau), \\ I_4' &= \frac{\rho_0}{2} \exp(2\tau) + E_0;\end{aligned}\quad (57)$$

$$\ddot{\xi} + (2\alpha + 1)\dot{\xi} + \alpha(\alpha + 1)\xi = \frac{\rho_0}{2} \exp(2\tau) + E_0.$$

Решение для функции $\xi(\tau)$ определено формулой

$$\begin{aligned}\xi &= A\tau^{-\alpha} + B\tau^{-\alpha-1} + \bar{\rho}_0 \exp(2\tau) + \bar{E}_0, \\ \bar{\rho}_0 &= \rho_0 / [2(\alpha^2 + 5\alpha + 6)], \\ \bar{E}_0 &= E_0 / [\alpha(\alpha + 1)].\end{aligned}\quad (58)$$

Для I_2, I_4 имеем

$$\begin{aligned}I_2 &= \dot{\xi} + (\alpha + 1)\xi = \{-(\alpha + 1)B + \\ &+ [B + \alpha(B - A)]\tau + (\alpha + 1)A\tau^2\}\tau^{-\alpha-2} + \\ &+ (\alpha + 3)\bar{\rho}_0 \exp(2\tau) + \frac{E_0}{\alpha}, \\ I_4 &= \left[\frac{\rho_0}{2} \exp(2\tau) + E_0 \right] \dot{\xi}, \\ I_4 &= \frac{\rho_0}{2} \left\{ \left[\left(A + \frac{2B}{\alpha} \right) \tau^{-\alpha} + B\tau^{-\alpha-1} \right] \exp(2\tau) - \right. \\ &- 2 \left(A + \frac{2B}{\alpha} \right) \int \exp(2\tau) \tau^{-\alpha} d\tau + \frac{\bar{\rho}_0}{2} \exp(4\tau) \Big\} + \\ &+ E_0 \left[\bar{\rho}_0 \exp(2\tau) + A\tau^{-\alpha} + B\tau^{-\alpha-1} \right].\end{aligned}\quad (59)$$

При натуральных отрицательных $\alpha = -k$ интеграл в (59) выражается через элементарные функции, например, при $\alpha = -2$:

$$\int \exp(2\tau) \tau^2 d\tau = \frac{1}{4} (2\tau^2 - 2\tau + 1) \exp(2\tau). \quad (60)$$

Для потока с параметрами вида

$$\begin{aligned} u &= \exp(\alpha t) I_1(\xi), \quad v = \exp(\alpha t) I_2(\xi), \\ w &= az + \exp(\gamma t) I_3(\xi), \\ \varphi &= \frac{1}{2} a^2 z^2 + \exp(2\alpha t) I_4(\xi), \\ \rho &= I_5(\xi), \quad \xi = x \exp(-\alpha t) \end{aligned} \quad (61)$$

справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} (I_1 - \alpha \xi) I_1' + \alpha I_1 &= I_4' + H_z I_2, \\ (I_1 - \alpha \xi) I_2' + \alpha I_2 &= -H_z I_1, \\ (I_1 - \alpha \xi) I_3' + (\alpha + \gamma) I_3 &= 0, \\ (I_1 - \alpha \xi) I_5' + (I_1' + a) I_5 &= 0, \\ I_4'' &= I_5 - a^2. \end{aligned} \quad (62)$$

Подобно предыдущему случаю введем новую переменную $\tau = \tau(\xi)$

$$I_1 - \alpha \xi = \xi \quad (63)$$

и представим систему (62) в новой форме

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 + \alpha I_1 &= I_4' + H_z I_2, \quad \dot{I}_2 + \alpha I_2 = -H_z I_1, \\ \dot{I}_3 + (a + \gamma) I_3 &= 0, \quad \dot{I}_5 + \left(\frac{\ddot{\xi}}{\dot{\xi}} + \alpha + a \right) I_5 = 0, \\ (I_4')' &= (I_5 - a^2) \dot{\xi}. \end{aligned} \quad (64)$$

Уравнения для I_3, I_5 , а затем для I_4' можно проинтегрировать

$$\begin{aligned} I_3 &= W_0 \exp[-(\alpha + \gamma) \tau], \\ I_5 &= \frac{\rho_0}{\dot{\xi}} \exp[-(\alpha + a) \tau], \\ I_4' &= -\frac{\rho_0}{\alpha + a} \exp[-(\alpha + a) \tau] - a^2 \xi + E_0. \end{aligned} \quad (65)$$

Первые два уравнения в (64) в общем случае приводятся к интегро-дифференциальному уравнению для ξ . Рассмотрим частный случай

$$\begin{aligned} I_2 &= -H_z \xi, \quad \ddot{\xi} + 2\alpha \dot{\xi} + (\alpha^2 + a^2 + H_z^2) \xi = \\ &= -\frac{\rho_0}{\alpha + a} \exp[-(\alpha + a) \tau] + E_0, \\ \xi &= \bar{\rho}_0 \exp[-(\alpha + a) \tau] + \exp(-\alpha \tau) \times \\ &\times [A \cos \omega \tau + B \sin \omega \tau], \\ \bar{\rho}_0 &= -\rho_0 / [(a^2 + \omega^2)(\alpha + a)], \quad \bar{E}_0 = E_0 / (\alpha^2 + \omega^2); \\ \omega^2 &= a^2 + H_z^2, \quad \alpha + a \neq 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Теперь легко можно построить выражения для I_1, I_4 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \dot{\xi} + \alpha \xi = \frac{\rho_0}{H_z^2} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha + a} \right) \exp[-(\alpha + a) \tau] + \\ &+ \alpha \bar{E}_0 + \omega \exp(-\alpha \tau) (A \cos \omega \tau - B \sin \omega \tau); \\ \dot{I}_4 &= \dot{\xi} I_4' = -\frac{\rho_0}{\alpha + a} \exp[-(\alpha + a) \tau] \dot{\xi} - a^2 \xi \dot{\xi} + E_0 \dot{\xi}, \\ I_4 &= -\frac{1}{2} a^2 \xi^2 + E_0 \xi - \frac{\rho_0}{\alpha + a} \int \exp[-(\alpha + a) \tau] \dot{\xi} d\tau. \end{aligned} \quad (67)$$

Интеграл в (67) легко вычисляется; формула для I_4 в результате содержит линейные комбинации следующих комплексов:

$$\begin{aligned} &\exp[-2(\alpha + a) \tau], \\ &\exp[-(2\alpha + a) \tau] (A_1 \cos \omega \tau + B_1 \sin \omega \tau), \\ &\exp[-(\alpha + a) \tau], \quad \exp(-\alpha \tau) (A_2 \cos \omega \tau + B_2 \sin \omega \tau), \\ &\exp(-2\alpha \tau) \left[\frac{1}{2} (C_1^2 + C_2^2) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (C_1^2 - C_2^2) \cos 2\omega \tau + C_1 C_2 \sin 2\omega \tau \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

При $H_z = 0$ в приведенном решении изменяются только выражения для I_2 и ω^2 :

$$I_2 = V_0 \exp(-\alpha \tau), \quad \omega^2 = a^2. \quad (69)$$

Специального рассмотрения требует случай $\alpha + a = 0$. При этом

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{\rho_0}{\dot{\xi}}, \quad (I_4')' = \rho_0 - a^2 \dot{\xi}, \quad I_4' = \rho_0 \tau - a^2 \xi + E_0, \\ \ddot{\xi} - 2a \dot{\xi} + (a^2 + \omega^2) \xi &= \rho_0 \tau + E_0, \quad \omega^2 = a^2 + H_z^2, \\ \xi &= \frac{1}{2a^2} \left(\rho_0 \tau + E_0 - \frac{\rho_0}{a} \right) + \\ &+ \exp(a\tau) (A \cos \omega \tau + B \sin \omega \tau). \end{aligned} \quad (70)$$

В электростатическом варианте $H_z = 0$ выполнены соотношения (69).

Для течения, параметры которого описываются формулами

$$\begin{aligned} v_R &= R I_1(\xi), \quad v_\psi = R I_2(\xi), \quad w = R^\psi W(t, \psi), \\ \varphi &= R^2 I_4(\xi), \quad \rho = I_5(\xi), \quad \xi = t - \beta \psi, \end{aligned} \quad (71)$$

справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} (1 - \beta I_2) I_1' + I_1^2 - I_2^2 &= 2I_4 + H_z I_2, \\ (1 - \beta I_2) I_2' + 2I_1 I_2 &= -\beta I_4' - H_z I_1, \\ (1 - \beta I_2) I_5' + (2I_1 - \beta I_2') I_5 &= 0, \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \beta^2 I_4'' + 4I_4 &= I_5; \\ \frac{\partial W}{\partial t} + I_2 \frac{\partial W}{\partial \psi} + v I_1 W &= 0. \end{aligned}$$

Система (72) имеет частное решение

$$v_R = 0, \quad v_\psi = -V_0 R, \quad w = R^\nu W(\eta), \\ \varphi = \frac{1}{2} V_0 (H_z - V_0) R^2, \quad \rho = 2V_0 (H_z - V_0) > 0, \quad (73)$$

$$\eta = \psi + V_0 t.$$

В плоскости $z = \text{const}$ реализуется один из возможных немонотонноэнергетических бриллюэновских потоков с полной энергией

$$\mathcal{H} = V_0 \left(V_0 - \frac{1}{2} H_z \right) R^2, \quad (74)$$

в то время как $W(\eta)$ — произвольная функция.

Решение в цилиндрических координатах R, ψ, z с экспоненциальной зависимостью от азимута ψ у z -компоненты скорости имеет вид

$$v_R = t^\alpha I_1(\xi), \quad v_\psi = t^\alpha I_2(\xi), \\ w = \exp(\nu \psi) W(t, R), \quad (75) \\ \varphi = t^{2\alpha} I_4(\xi), \quad \rho = \frac{1}{t^2} I_5(\xi), \quad \xi = R t^{-\alpha-1}.$$

Функции в (75) удовлетворяют уравнениям

$$[I_1 - (\alpha + 1)\xi] I_1' + \alpha I_1 - \frac{1}{\xi} I_2^2 = I_4', \\ [I_1 - (\alpha + 1)\xi] I_2' + \alpha I_2 + \frac{1}{\xi} I_1 I_2 = 0, \\ [I_1 - (\alpha + 1)\xi] I_5' + \left(I_1' - 2 + \frac{1}{\xi} I_1 \right) I_5 = 0, \quad (76) \\ I_4'' + \frac{1}{\xi} I_4' = I_5,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + v_R \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{\nu v_\psi}{R} W = 0.$$

Система (76) имеет частное решение

$$I_1 = 0, \quad I_2 = V_0 \xi^\mu, \quad I_4 = -\frac{V_0^2}{2\mu} \xi^{2\mu}, \quad (77)$$

$$I_5 = -2\mu V_0^2 \xi^{-2\mu}, \quad \mu = \alpha/(\alpha + 1), \quad -1 < \alpha < 0,$$

для которого параметры потока описываются выражениями

$$v_R = 0, \quad v_\psi = V_0 R^\mu, \\ w = \exp\left[\nu(\psi - V_0 R^{\mu-1} t)\right] W(R), \quad (78) \\ \varphi = -\frac{V_0^2}{2\mu} R^{2\mu}, \quad \rho = -2\mu V_0^2 R^{-2\mu},$$

где $W(R)$ — произвольная функция. Решение (78) однозначно в ограниченной по азимуту области $\psi < 2\pi$, что не препятствует ему быть использованным в качестве эталона. Как и в предыдущем случае, в плоскости $z = \text{const}$ движение частиц соответствует стационарному немонотонноэнергетическому бриллюэновскому режиму с полной энергией

$$\mathcal{H} = \frac{2\alpha + 1}{2\alpha} V_0^2 R^{2\mu}. \quad (79)$$

3. ПЛОСКИЕ ПОТОКИ

Уравнения пучка, описывающие двумерные вихревые нестационарные течения в однородном магнитном поле H_z , принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v H_z, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - u H_z, \quad (80) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \rho.$$

Система (80) инвариантна относительно нескольких элементарных преобразований: сдвига по времени и декартовым координатам, поворота на одинаковый угол в плоскостях (x, y) и (u, v) , добавления к потенциалу φ произвольной функции времени. При $\partial/\partial t = H_z = 0$ имеют место два независимых преобразования растяжения (изменения масштабов): в c_1 раз растягиваются x, y и в c_1^{-2} раз — ρ ; в c_2 раз растягиваются u, v и в c_2^2 раз — φ, ρ .

Кроме этих преобразований система (80) не меняет своего вида при преобразованиях с произвольными функциями времени $f(t), g(t)$ (черта обозначает новые переменные):

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x + f, \quad \bar{y} = y + g, \quad \bar{u} = u + f', \\ \bar{v} = v + g', \quad \bar{\varphi} = \varphi + f''x + g''y + H_z(f'y - g'x), \quad (81) \\ \bar{\rho} = \rho.$$

Требование соленоидальности течения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (82)$$

переопределяет систему, которая, тем не менее, может иметь решения.

Для соленоидальных потоков уравнения (80) допускают еще одно нетривиальное преобразование (преобразование эквивалентности), отличающееся от инвариантного преобразования (81) тем, что оно изменяет значение постоянного магнитного поля H_z :

$$\bar{x} = x \cos \gamma t + y \sin \gamma t, \quad \bar{y} = -x \sin \gamma t + y \cos \gamma t,$$

$$\bar{t} = t, \quad \bar{u} = u \cos \gamma t + v \sin \gamma t + \gamma \bar{y},$$

$$\bar{v} = -u \sin \gamma t + v \cos \gamma t - \gamma \bar{x},$$

$$\bar{\varphi} = \varphi + \frac{1}{2} \gamma (\gamma + H_z) (x^2 + y^2),$$

$$\bar{\rho} = \rho + 2\gamma(\gamma + H_z), \quad \bar{H}_z = H_z + 2\gamma, \quad (83)$$

$$\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \gamma(uy - vx) - \frac{1}{2} \gamma H_z (x^2 + y^2);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \gamma t \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \sin \gamma t \frac{\partial}{\partial \bar{y}},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \gamma t \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \cos \gamma t \frac{\partial}{\partial \bar{y}}.$$

Обратное преобразование определено формулами

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} \cos \gamma t - \bar{y} \sin \gamma t, \quad y = \bar{x} \sin \gamma t + \bar{y} \cos \gamma t, \\u &= (\bar{u} - \gamma \bar{y}) \cos \gamma t - (\bar{v} + \gamma \bar{x}) \sin \gamma t, \\v &= (\bar{u} - \gamma \bar{y}) \sin \gamma t + (\bar{v} + \gamma \bar{x}) \cos \gamma t; \quad (84) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} &= \cos \gamma t \frac{\partial}{\partial x} + \sin \gamma t \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{y}} &= -\sin \gamma t \frac{\partial}{\partial x} + \cos \gamma t \frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Используя выражения (83), (84), убедимся, что преобразование эквивалентности сохраняет солениоидальность и потенциальность течения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -H_z.\end{aligned} \quad (85)$$

Отметим еще одно любопытное свойство системы (80). Любое плоское солениоидальное течение, стационарное или нестационарное, может быть развернуто в z -направлении за счет z -компоненты скорости w при введении однородного магнитного поля H_x, H_y :

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u, \quad \bar{v} = v, \quad \bar{w} = ax - by, \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \frac{1}{2}(ax - by)^2,\end{aligned} \quad (86)$$

$$\bar{\rho} = \rho + a^2 + b^2, \quad \bar{H}_x = 2b, \quad \bar{H}_y = 2a.$$

Это утверждение иницировано результатами работы [23], хотя приведенная формулировка в ней отсутствует.

Система (80) допускает решение, описывающее вихревой солениоидальный поток, определяемый следующими формулами:

$$\begin{aligned}u &= ax + by, \quad v = cx - ay, \\ \rho &= 2(a^2 + bc) + (b - c)H_z, \\ \varphi &= \frac{1}{2}(a^2 + bc - cH_z)x^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(a^2 + bc + bH_z)y^2 + aH_zxy.\end{aligned} \quad (87)$$

Течение (86) является немонотонноэнергетическим с полной энергией

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2}\bar{v}^2 - \varphi = (b - c - H_z) \times \\ &\times \left(-\frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2 + axy\right).\end{aligned} \quad (88)$$

Частицы движутся по гиперболам

$$-cx^2 + by^2 + 2abxy = \text{const}. \quad (89)$$

Рассмотренный в работе [24] пучок с гиперболическими траекториями является частным случаем решения (87) при $b = c = 0$.

В работе [15] отмечено, что воздействуя на любое известное стационарное решение, необязатель-

но инвариантное, нетривиальными преобразованиями, сохраняющими уравнения нестационарного пучка, можно получать решения, зависящие от времени. Так, преобразование (81) трансформирует решение для плоского диода в ρ -режиме следующим образом:

$$\begin{aligned}u &= (x + f)^{2/3} - f', \quad 2\varphi = (x + f)^{4/3} - f''x - f^{4/3}, \\ \rho &= \frac{2}{9}(x + f)^{-2/3}.\end{aligned} \quad (90)$$

Решения такого рода не являются новыми с точки зрения групповой классификации, однако этот подход дает возможность получать решения уравнений нестационарного пучка в элементарных функциях. Преобразование эквивалентности обладает тем же свойством с той разницей, что, воздействуя на электростатические решения, приводит к решениям с магнитным полем, а монотонноэнергетическое решение переводит в решение с $\mathcal{H} \neq \text{const}$. Последнее свойство имеет и преобразование (81), как это видно из (90).

Рассмотрим некоторые нестационарные образы стационарных решений для солениоидальных потоков при воздействии на них преобразования эквивалентности (83).

Плоский немонотонноэнергетический вихревой поток с гиперболическими траекториями возьмем в качестве исходного. В соответствии со сказанным выше в системе $\bar{x}, \bar{y}$ должно существовать решение (87):

$$\begin{aligned}\bar{u} &= a\bar{x} + b\bar{y}, \quad \bar{v} = c\bar{x} - a\bar{y}, \\ \bar{\rho} &= 2(a^2 + bc) + (b - c)\bar{H}_z, \\ \bar{\varphi} &= \frac{1}{2}(a^2 + bc - c\bar{H}_z)\bar{x}^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(a^2 + bc + b\bar{H}_z)\bar{y}^2 + a\bar{H}_z\bar{x}\bar{y}.\end{aligned} \quad (91)$$

Подставляя формулы из (91) в выражения для u, v, φ, ρ из (83), получим

$$\begin{aligned}u &= \left[a \cos 2\gamma t + \frac{1}{2}(-b - c + \sin 2\gamma t) \right] x + \\ &+ \left[a \sin 2\gamma t - \gamma + b \cos^2 \gamma t - c \sin^2 \gamma t \right] y, \\ v &= \left[a \sin 2\gamma t + \gamma + c \cos^2 \gamma t - b \sin^2 \gamma t \right] x + \\ &+ \left[-a \cos 2\gamma t + \frac{1}{2}(b + c) \sin 2\gamma t \right] y; \\ \varphi &= \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{H}_z) - \frac{1}{2}\gamma(\gamma + H_z)(x^2 + y^2) = \\ &= \frac{1}{4} \left[2(a^2 + bc) + (b - c)(H_z + 2\gamma) - 2\gamma(\gamma + H_z) \right] \times \\ &\times (x^2 + y^2) - \frac{1}{4}[(b + c)(H_z + 2\gamma) \cos 2\gamma t + \\ &+ 2a(H_z + 2\gamma) \sin 2\gamma t](x^2 - y^2) - \\ &- \frac{1}{2}(H_z + 2\gamma)[(b + c) \sin 2\gamma t - 2a \cos 2\gamma t] xy, \\ \rho &= 2(a^2 + bc) + (b - c)(H_z - 2\gamma H_z + 2\gamma - 2\gamma^2).\end{aligned} \quad (92)$$

В отличие от инвариантных преобразований, сохраняющих уравнения пучка, применение преобразования эквивалентности приводит к эффекту анизотропии: принятие за исходную систему системы (x, y) или $(\bar{x}, \bar{y})$ дает различные результаты. Продемонстрируем сказанное на частном случае рассмотренного выше решения (87) при $b = c = 0$. Из формул (92), полученных при переходе от системы $(\bar{x}, \bar{y})$ к системе (x, y) , имеем

$$\begin{aligned} u &= (a \cos 2\gamma t) x + (a \sin 2\gamma t) y, \\ v &= (a \sin 2\gamma t) x - (a \cos 2\gamma t) y, \\ \varphi &= \frac{1}{2} a^2 (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} a (H_z + 2\gamma) \times \\ &\times (\sin 2\gamma t) (x^2 - y^2) + a (H_z + 2\gamma) (\cos 2\gamma t) xy, \\ \rho &= 2a^2. \end{aligned} \quad (93)$$

Исходя из решения в системе (x, y) и пользуясь преобразованием эквивалентности (83), (84), получим

$$\begin{aligned} u &= ax, \quad v = -ay, \quad \varphi = \frac{1}{2} a^2 (x^2 + y^2) + a H_z xy, \\ \rho &= 2a^2; \quad \bar{u} = (a \cos 2\gamma t) \bar{x} + (a \sin 2\gamma t) \bar{y}, \\ \bar{v} &= -(\gamma - a \sin 2\gamma t) \bar{x} - (a \cos 2\gamma t) \bar{y}, \\ \bar{\varphi} &= \frac{1}{2} (a^2 + \gamma^2 + \gamma H_z) (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \\ &+ a H_z \left[\frac{1}{2} \sin 2\gamma t (\bar{x}^2 - \bar{y}^2) + (\cos 2\gamma t) \bar{x} \bar{y} \right], \\ \bar{\rho} &= 2(a^2 + \gamma^2 + \gamma H_z), \quad \bar{H}_z = H_z + 2\gamma. \end{aligned} \quad (94)$$

После завершения выкладок черту в формулах для $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\rho}$ можно опустить.

При $H_z = 0$ исходное потенциальное моноэнергетическое $\mathcal{H} = 0$ течение трансформируется в поток с зависящими от времени пульсациями скорости в магнитном поле $H_z = 2\gamma$ и полной энергией

$$\mathcal{H} = (2a\gamma \cos 2\gamma t) \bar{x}\bar{y} + (a \sin 2\gamma t) (\bar{x}^2 - \bar{y}^2). \quad (95)$$

При изменении исходной системы координат инвариантное преобразование в случае (90) приводит к изменению знака у функции $f(t)$, что при ее произвольности означает тождественный результат.

Параметры плоского бриллюэновского потока в системе $\bar{x}, \bar{y}$ определены формулами

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{H}_z \bar{y}, \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{2} \bar{H}_z^2 \bar{y}^2, \\ \bar{\rho} &= \bar{H}_z^2, \quad \bar{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

Применяя преобразование эквивалентности к этому решению, получим

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{1}{2} \bar{H}_z R \sin 2(\psi - \gamma t), \\ v_\psi &= R \left[-\bar{H}_z \sin^2(\psi - \gamma t) + \gamma \right], \\ \varphi &= \frac{1}{2} R^2 \left[\bar{H}_z^2 \sin^2(\psi - \gamma t) - \gamma(\gamma + H_z) \right], \\ \rho &= H_z^2 + 2\gamma(\gamma + H_z), \quad \bar{H}_z = H_z + 2\gamma, \\ \mathcal{H} &= R^2 \left[\frac{1}{8} \bar{H}_z^2 + \gamma \bar{H}_z \sin^2(\psi - \gamma t) + \frac{1}{2} \gamma \bar{H}_z \right]. \end{aligned} \quad (97)$$

Для течения с эллиптическими орбитами частиц в однородном магнитном поле H_z [25] будем исходить из решения в системе $\bar{x}, \bar{y}$ со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -(\Omega + b) \bar{y}, \quad \bar{v} = (\Omega - b) \bar{x}, \\ \bar{H}_z &= H_z + 2\gamma, \quad \Omega = -\frac{1}{2} H_z - \gamma, \\ \bar{\varphi} &= \frac{1}{2} [(\Omega - b)^2 \bar{x}^2 + (\Omega + b)^2 \bar{y}^2] = \\ &= \varphi + \frac{1}{2} (\gamma^2 + \gamma H_z) (x^2 + y^2), \\ \bar{\rho} &= 2(\Omega^2 + b^2). \end{aligned} \quad (98)$$

В системе x, y , пользуясь формулами (84), имеем

$$\begin{aligned} u &= (b \sin 2\gamma t) x - (\Omega + \gamma + b \cos 2\gamma t) y, \\ v &= (\Omega + \gamma - b \cos 2\gamma t) x - (b \sin 2\gamma t) y, \\ \varphi &= \frac{1}{2} [(\Omega^2 + b^2 - \gamma^2 - \gamma H_z) (x^2 + y^2) - \\ &- 2\Omega b \cos 2\gamma t (x^2 - y^2) - (4\Omega b \sin 2\gamma t) xy], \\ \rho &= 2(\Omega^2 + b^2) - 2\gamma(\gamma + H_z). \end{aligned} \quad (99)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные выше решения нестационарных уравнений пучка с трансляционной симметрией, пространственными в общем случае траекториями и характеристиками течения, носящими осцилляционный характер, заметно расширяют число потоков, описываемых элементарными функциями и функциями Бесселя. Решения с перечисленными свойствами приводятся, по-видимому, впервые. Наряду с зависящими от времени потоками указаны стационарные варианты, в том числе описывающие установившийся режим, на который выходит некий меняющийся во времени процесс. Плотность пространственного заряда в рассмотренных случаях может быть как однородной, так и содержать сложные зависимости от пространственных координат. Допустимо присутствие однородного магнитного поля. Установление преобразования эквивалентности

для плоских соленоидальных течений позволяет поставить в соответствие стационарному решению уравнений пучка некий нестационарный образ, что расширяет возможности построения решений в элементарных функциях с осцилляционными характеристиками. Полученные примеры, как и любые точные решения, могут быть использованы в качестве эталонов.

Результаты работы [13] были интерпретированы их автором как возможность нелинейных колебаний в цилиндрическом магнетроне с нитевидным катодом вблизи частоты $H_z/\sqrt{2}$, а также на моде $N = 2$. Вопрос о подобном рода физической интерпретации полученных выше решений остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. Сыровой В.А. // РЭ. 2003. Т. 48. № 4. С. 467.
3. Мануилов В.Н., Цимринг Ш.Е. // РЭ. 1978. Т. 23. № 7. С. 1486.
4. Мануилов В.Н. // РЭ. 1981. Т. 26. № 11. С. 2425.
5. Lotax R.J. // J. Electr. Contr. 1958. V. 5. № 6. P. 563.
6. Данилов В.Н. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 1. С. 3.
7. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1963. № 3. С. 26.
8. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1965. № 6. С. 3.
9. Миллер Р. Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984.
10. Брейзман Б.Н., Рютов Д.Д., Ступаков Г.В. // Изв. вузов. Физика. 1979. № 10. С. 7.
11. Рудаков Л.И., Бабыкин М.В., Гордеев А.В. и др. Генерация и фокусировка сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Энергоатомиздат, 1990.
12. Бегучев О.П. // ЖТФ. 1956. Т. 26. № 7. С. 1483.
13. Pease M.C. // J. Appl. Phys. 1960. V. 31. № 1. P. 70.
14. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1964. № 1. С. 3.
15. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1965. № 3. С. 56.
16. Сыровой В.А. // РЭ. 1984. Т. 29. № 12. С. 2430.
17. Сыровой В.А. // РЭ. 2003. Т. 48. № 3. С. 362.
18. Вашковский А.В., Сыровой В.А. // РЭ. 1991. Т. 36. № 2. С. 392.
19. Акимов П.И., Гаврилин А.А., Никитин А.П. и др. // РЭ. 2018. Т. 63. № 11. С. 1165.
20. Сыровой В.А. // РЭ. 2008. Т. 53. № 6. С. 752.
21. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
22. Сыровой В.А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
23. Огородников С.Н. // ЖТФ. 1972. Т. 42. № 7. С. 1348.
24. Сыровой В.А. // РЭ. 2001. Т. 46. № 1. С. 124.
25. Kirstein P.T. // J. Electr. Contr. 1958. V. 4. № 5. P. 425.