

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 537.86:519.22

ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ШУМА ВБЛИЗИ АТТРАКТОРА

© 2019 г. В. И. Нефедов¹, С. А. Решетняк¹, *, Г. Н. Третьяков¹, Э. А. Засовин¹

¹МИРЭА – Российский технологический университет,
Российская Федерация, 119454 Москва, просп. Вернадского, 78

*E-mail: reshets@bk.ru

Поступила в редакцию 12.04.2018 г.

После доработки 01.06.2018 г.

Принята к публикации 11.06.2018 г.

Проведено численное исследование взаимодействия сигнала и шума в нелинейном активном фильтре второго порядка. Проанализирован процесс фильтрации сигнала на фоне интенсивного шума нелинейным фильтром, на выходе которого расположен полосовой фильтр. Установлено, что выходное отношение сигнал/шум более чем в три раза превышает аналогичное отношение без использования нелинейного фильтра.

DOI: 10.1134/S0033849419020165

Для выделения сигнала на фоне интенсивного шума используются полосовые фильтры, увеличивающие отношение сигнал/шум (S/N). Однако процесс фильтрации можно существенно улучшить, если зашумленный сигнал сначала подать на вход нелинейного фильтра, а на его выходе использовать полосовой фильтр. Дело в том, что в определенных нелинейных фильтрах реализуется эффект стохастической фильтрации (СФ), в результате которого выходное отношение S/N превышает аналогичное входное отношение. Существование данного эффекта было подтверждено численным экспериментом [1] и теоретически предсказано в [2]. В настоящее время эффект СФ достаточно полно исследован при его появлении в фильтрах первого порядка [3–5]. Фильтры второго порядка исследованы недостаточно. Данная работа посвящена исследованию проблемы фильтрации сигналов с помощью нелинейного активного фильтра второго порядка, в котором нелинейный элемент такой же, как и рассмотренный в работах [3–5].

Схема фильтра представлена в работе [6], в которой были исследованы процессы автоколебаний в отсутствии внешних воздействий. В ней последовательно соединены активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C . Нелинейный элемент с вольт-амперной характеристикой $I(u) = -Au + Bu^3$ подключен параллельно емкости и содержит два одинаковых туннельных диода с постоянными напряжениями смещения. На вход фильтра подается гармонический сигнал и шум, а выходное напряжение регистрируется на емкости. Если напряжение отсчитывать в единицах $(RB)^{-1/2}$, а время в единицах RC , то безразмерное напряжение на ем-

кости подчиняется следующему нелинейному дифференциальному уравнению:

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma(x) \frac{dx}{dt} + W'(x) = e(t), \quad (1)$$

где $e(t) = h \cos(\omega_c t + \varphi) + \xi(t)$ — напряжение на входе фильтра $\mu = L/(R^2C)$ — параметр инерционности системы, $\gamma(x) = 1 + \mu(-AR + 3x^2)$ — коэффициент затухания, $W'(x) = -\alpha x + x^3$ — производная потенциальной функции $W(x)$, $\alpha = AR - 1$, h , ω_c и φ — амплитуда, круговая частота и фаза сигнала соответственно, $\xi(t)$ — моделирующий шум случайный процесс.

Решение уравнения (1) определяет напряжение на выходе фильтра. Это уравнение также описывает движение броуновской частицы с массой μ , коэффициентом трения γ в потенциальном поле W . Поскольку получение аналитического решения данного уравнения представляет собой весьма сложную задачу, то далее анализ процессов в нелинейном фильтре выполнен на основе его численного моделирования.

Понятно, что найденные решения могут иметь физический смысл только после усреднения по большому числу реализаций шума. Использование известных методов с автоматическим выбором шага по времени для нахождения численного решения (1) затруднено по двум причинам. Во-первых, они развиты для получения решений в случае детерминированных воздействий на систему и, во-вторых, автоматический выбор шага по времени приведет к большой продолжительности времени счета даже для одной реализации шума.

Чтобы решить эту проблему, нами был развит метод Эйлера получения численного решения (1) с постоянным шагом по времени, что очень удобно в спектральном анализе выходного сигнала. Уравнение (1) представимо в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\mu} [-\gamma(x)v - W'(x) + e(t)]. \quad (2)$$

После выбора шага по времени Δt из (2) следует

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} v(t) dt, \quad v_{n+1} = v_n + \left(AR - \frac{1}{\mu} \right) \times \\ \times (x_{n+1} - x_n) - x_{n+1}^3 + x_n^3 - \frac{1}{\mu} \int_{t_n}^{t_{n+1}} [W'(x) - e(t)] dt,$$

где x_n и v_n — значения искоемых величин в точках отсчетов по времени $t_n = n\Delta t$.

Оценивая интегралы методом трапеций, приходим к следующим рекуррентным соотношениям:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2} (v_{n+1} + v_n), \quad v_{n+1} = v_n + \left(AR - \frac{1}{\mu} \right) \times \\ \times (x_{n+1} - x_n) - x_{n+1}^3 + x_n^3 - \\ - \frac{\Delta t}{2\mu} [W'(x_{n+1}) + W'(x_n) - e_{n+1} - e_n]. \quad (3)$$

С уменьшением шага Δt точность формул (3) повышается.

С учетом известной зависимости $W'(x) = -\alpha x + x^3$ из формул (3) нетрудно получить кубическое уравнение относительно x_{n+1} , свободные члены которого содержат только x_n и v_n на предыдущем шаге решения. Так как это уравнение всегда имеет только один вещественный корень, то формулы (3) позволяют при заданных начальных условиях находить все остальные x_n и v_n .

Полученные численные решения в отсутствие шума для разных параметров фильтра сравнивали с результатами, полученными на основе метода Рунге—Кутты. Было найдено совпадение результатов с высокой степенью точности. Совпадение наблюдалось даже в случае получения решений жестких дифференциальных уравнений, описывающих релаксационные колебания в системах. Численный анализ был проведен для числа $N = 2^{15}$ точек отсчетов по времени с выбранным шагом $\Delta t = 0.05$, что соответствует длительности исследуемых процессов $T = N\Delta t$. Спектр процессов на входе и выходе фильтра является дискретным. Номер m гармоники в спектре определяет ее частоту $m\Delta f$, $\Delta f = T^{-1}$. Для частоты входного сигнала введен специальный номер s : $f_c = s\Delta f$. Ос-

новные результаты получены для нулевых начальных условий и фазы сигнала $\varphi = 0$.

Остановимся теперь на используемой в работе модели шума. Его реализация формируется значениями датчика случайных чисел, распределенных по нормальному закону с заданной дисперсией σ^2 , в каждой точке N отсчетов по времени. В [7] было установлено, что фазы гармоник шума являются случайными и равномерно распределенными величинами на отрезке $(0, 2\pi)$, а их амплитуды распределены по закону Рэлея с наивероятнейшим значением амплитуды $\sigma/\sqrt{2N}$. В результате случайный процесс $\xi(t)$ является стационарным гауссовским процессом. Его корреляционная функция имеет такой же вид, как и в модели “серого” шума, а время корреляции определяется выбранным шагом по времени. На реализацию шума затрачивается только время выдачи датчиком N случайных чисел, что существенно сокращает полное время численного анализа.

Эффект СФ был обнаружен и экспериментально исследован в фильтрах первого порядка при моностабильной потенциальной функции критического вида, т.е. при $\alpha = 0$ (см. ниже). Принимая во внимание аналогию с поведением броуновской частицы, она в меньшей степени подвержена случайным воздействиям, если имеет большую массу, поэтому в работе был выбран параметр $\mu = 10$.

Исследуемый фильтр является активным, и в нем при отсутствии сигнала и шума на входе могут возникать автоколебания [6], которым на фазовой плоскости соответствует предельный цикл, изображенный на рис. 1. Независимо от выбранных начальных условий все траектории движения стремятся к предельному циклу, поэтому его можно назвать также аттрактором. Спектр этих автоколебаний состоит из основной (наиболее интенсивной) гармоники с минимальной частотой и гармоник, соответствующих комбинационным частотам. При $\mu = 10$ номер основной гармоники $s_a = 51$, который и определяет частоту $f_a = \Delta f s_a$ автоколебаний.

В данной работе были также исследованы процессы вынужденных колебаний в отсутствие шума. Под вынужденным колебанием понимается наличие в спектре выходного сигнала основной гармоники с частотой f_c входного сигнала и амплитудой A_c , превышающей значения амплитуд других гармоник. Как показали вычисления, выходной сигнал будет иметь основную гармонику той же частоты, что и сигнал на входе, если амплитуда h входного сигнала имеет достаточно большую величину. Для ее оценки амплитуду h сравнивали с силой $W'(x_0)$. Если в качестве характерного значения x_0 выбрать величину, при которой коэф-

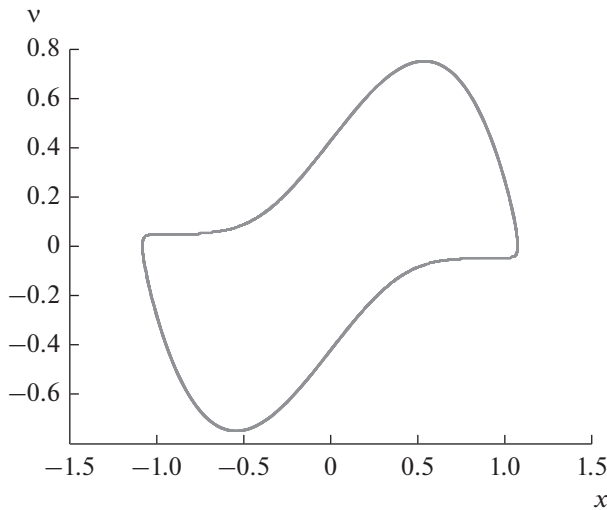


Рис. 1. Предельный цикл, соответствующий автоколебаниям при $\mu = 10$.

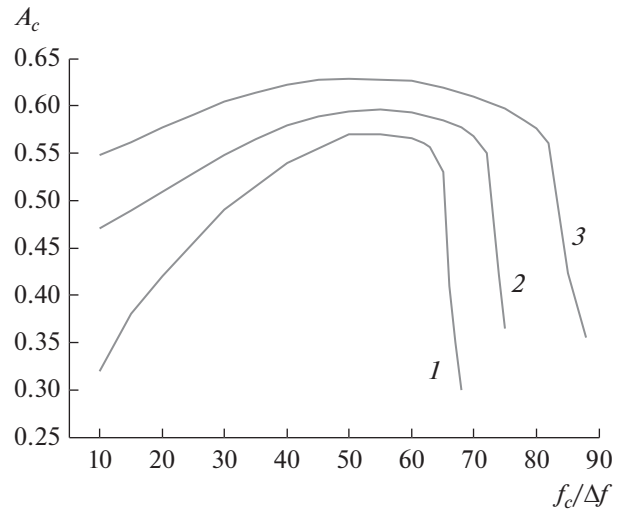


Рис. 2. Зависимость амплитуды основной гармоники выходного сигнала от частоты при $h = 0.3$ (1), 0.5 (2) и 0.8 (3).

коэффициент трения обращается в нуль, то приходим к условию на амплитуду сигнала $h \geq x_0^3$ или

$$h \geq \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \right]^{3/2}. \quad (4)$$

Расчеты показали, что при выполнении (4) в области низких частот действительно имеют место вынужденные колебания, период которых определяется частотой f_c входного сигнала, а на фазовой плоскости им соответствуют устойчивые предельные циклы. Значения h , существенно меньшие правой части (4), приводят к развитию автоколебаний и воспринимаются системой как ненулевые начальные условия.

На рис. 2 представлены амплитудно-частотные характеристики нелинейного фильтра для трех значений h , удовлетворяющих условию (4), или частотные зависимости амплитуды A_c основной гармоники выходного сигнала от $f_c/\Delta f$. Из анализа полученных зависимостей следует, что вынужденные колебания существуют в низкочастотной области спектра входных сигналов. Наибольшее усиление основной гармоники достигается в области, где частота сигнала близка к частоте автоколебаний, т.е. при $s \cong s_a$. Таким образом, они указывают на существование резонанса между сигналом на входе фильтра и процессом, приводящим к автоколебаниям. С ростом амплитуды h от 0.2 до 0.6 коэффициент усиления основной гармоники A_c падает от 4.5 до 1.8. Высокочастотные входные сигналы приводят к развитию автоколебаний в нелинейном фильтре. Однако их предельные циклы на фазовой плоскости являются весьма размытыми, т.е. устойчивого

предельного цикла не существует. В промежуточной области частот решения уравнения (1) приводят к нелинейным колебаниям с периодом, в несколько раз превышающим период входного сигнала.

Наибольший интерес с точки зрения исследования процессов взаимодействия сигнала и шума представляют вынужденные колебания с частотами, близкими к частоте автоколебаний. Поэтому ниже в численном анализе была принята частота входного сигнала, равная $f_c = s_a \Delta f$. На рис. 3 для параметров $h = 0.4$, $\sigma = 1$, $\varphi = 0$ и одной реализации шума представлены $e(t)$ и решение $x(t)$ уравнения (1), которые представляют собой входной и выходной сигналы, в зависимости от номера n точки отсчета по времени. Видно, что сильно зашумленный входной сигнал достаточно хорошо фильтруется нелинейной системой, так как форма выходного сигнала практически не искажается шумом.

В отсутствие нелинейного фильтра отношение сигнал/шум определим следующим образом:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{вх}} = \sum_{i=s-\Delta s}^{s+\Delta s} \frac{h^2}{|\xi_i|^2}, \quad (5)$$

где s — номер сигнальной гармоники, $|\xi_i|$ — амплитуды гармоник входного шума в полосе пропускания $2\Delta s$ полосового фильтра. Отношение (5) будем называть также входным отношением S/N .

Если зашумленный сигнал подается на вход нелинейного фильтра, а с его выхода — на поло-

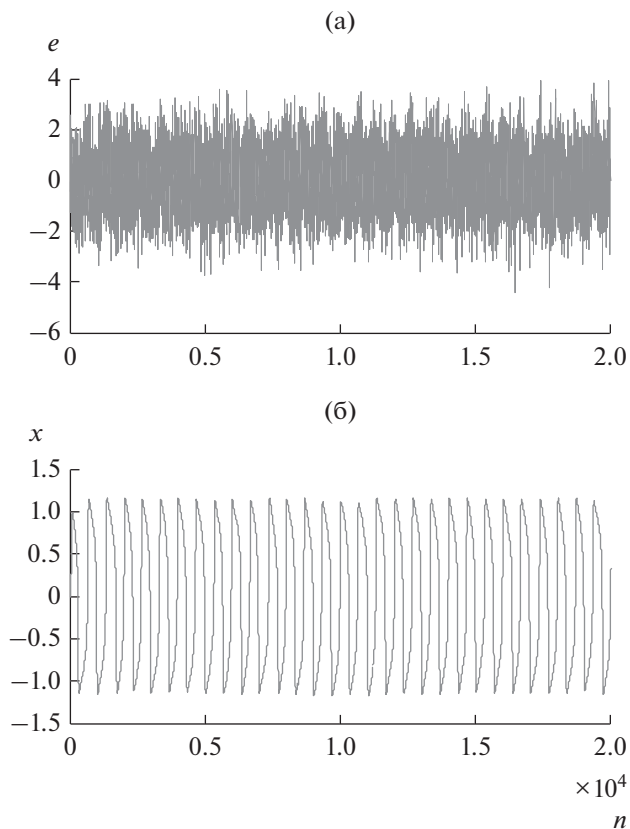


Рис. 3. Сигналы e_n (а) и x_n (б) на входе и выходе фильтра в зависимости от номера шага по времени n .

вой фильтр, то аналогично (5) для выходного отношения S/N имеем

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вых}} = \sum_{i=s-\Delta s}^{s+\Delta s} \frac{A_c^2}{|\zeta_i|^2}, \quad (6)$$

где A_c — амплитуда основной гармоники в спектре выходного сигнала при вынужденных колебаниях, а $|\zeta_i|$ — амплитуды гармоник выходного процесса в полосе пропускания $2\Delta s$.

Очевидно, что применение нелинейного фильтра для выделения сигналов на фоне интенсивного шума будет целесообразным, если коэффициент передачи по отношению сигнал/шум

$$q = (S/N)_{\text{вых}} / (S/N)_{\text{вх}} \quad (7)$$

превышает единицу.

На рис. 4а представлена зависимость коэффициента передачи q от амплитуды входного сигнала h (при $\sigma = 1$), а на рис. 4б — зависимость q от параметра интенсивности шума σ (при $h = 0.5$) для узкополосного фильтра с $\Delta s = 1$. Отметим, что добротность этого фильтра определяется отношением $s/(2\Delta s) = 25$ и не является высокой. Результаты численного анализа получены путем усред-

нения по 2000 реализациям шума $\xi(t)$. Также на этих рисунках приведена аппроксимация данных численного анализа кубическим полиномом, полученная методом наименьших квадратов. Видно, что для многих значений h и σ коэффициент передачи отношения сигнал/шум $q > 3$. Падение q в области больших значений h объясняется уменьшением коэффициента усиления основной гармоники выходного сигнала с ростом h . Величины $h < 0.2$ в работе не рассматривались, как не удовлетворяющие условию (4). Рост q в области небольших значений σ обусловлен проявлением эффекта СФ. В фильтре первого порядка, как было показано в [4], он объясняется подавлением соседних гармоник шума сигналом на выходе фильтра. Спад q в области больших σ вызван усилением соседних гармоник шума при постоянной h .

Хорошо известно, что поведение нелинейной динамической системы обладает чувствительной зависимостью от начальных условий. В нашем случае небольшие изменения начальных условий вблизи устойчивого положения равновесия практически не влияют на полученные значения q по двум причинам. Во-первых, динамическая система достаточно быстро выходит на решение, соответствующее устойчивому предельному циклу — аттрактору, и, во-вторых, влияние начального условия становится еще меньшим после усреднения по большому числу реализаций шума.

Иначе обстоит дело при вариации начальной фазы сигнала, которая определяет в начальный момент времени величину воздействия на входе фильтра. Поскольку частота сигнала выбрана совпадающей с частотой автоколебаний, то вполне возможно наблюдение зависимости коэффициента передачи q от фазы сигнала, что и было обнаружено в результате численного эксперимента (рис. 5). Для экспериментальных данных трудно было подобрать аппроксимационный полином, поэтому кривая получена путем соединения численных значений прямыми линиями. Видно, что результаты численного эксперимента существенно зависят от начальной фазы сигнала на входе фильтра.

На рис. 6 изображен коэффициент передачи отношения S/N как функция параметра инерционности μ при $h = 0.4$, $\sigma = 1$, $\Delta s = 1$ и $\varphi = 0$. Максимум на кривой наблюдается при $\mu = 10$ и указывает на условие резонанса в нелинейном фильтре. Дело в том, что частота автоколебаний f_a зависит от параметра μ , поэтому для значений $\mu \neq 10$ условие резонанса нарушается и коэффициент передачи принимает меньшие значения.

На рис. 7 представлена зависимость коэффициента передачи q от полуширины полосы пропускания полосового фильтра, которая определяется параметром Δs . Как и должно быть, с ростом Δs коэф-

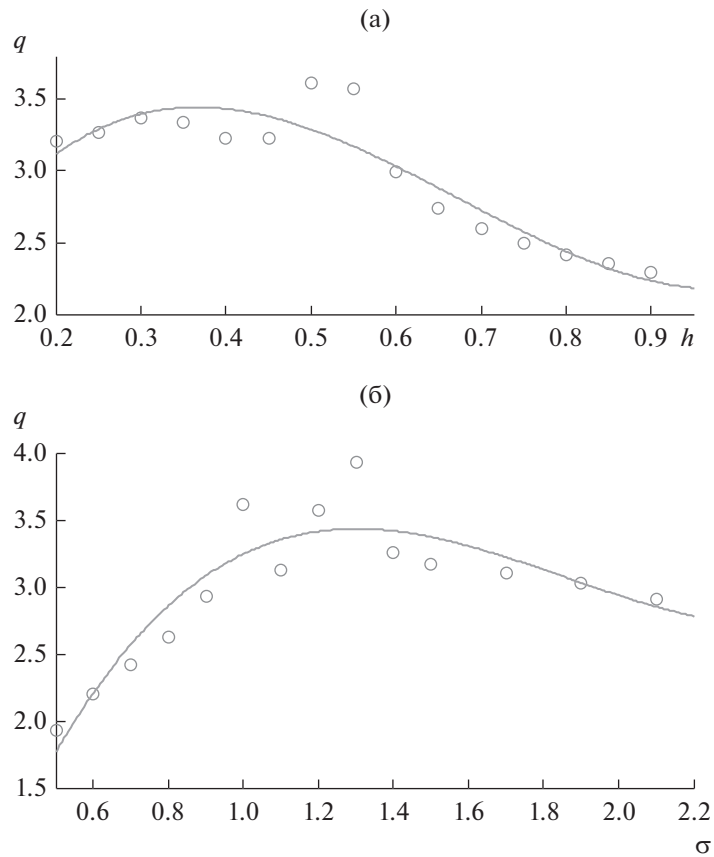


Рис. 4. Зависимости коэффициента передачи отношения S/N от амплитуды h входного сигнала при $\sigma = 1$ (а) и от параметра интенсивности шума σ при $h = 0.5$ (б); точки – расчет, прямые – аппроксимация.

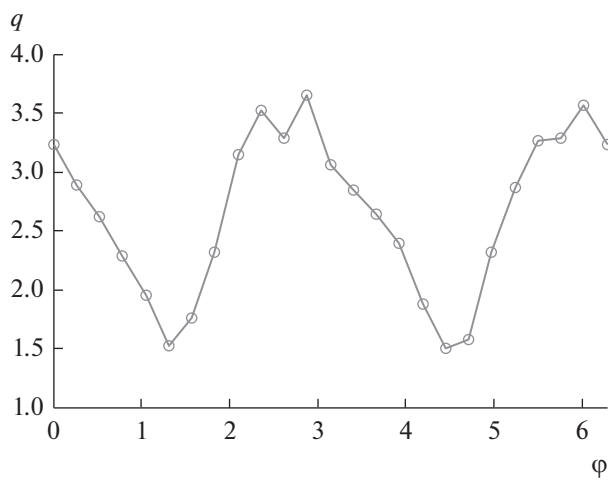


Рис. 5. Зависимость коэффициента передачи q отношения S/N от фазы сигнала φ для $h = 0.4$, $\sigma = 1$ и $\Delta s = 1$.

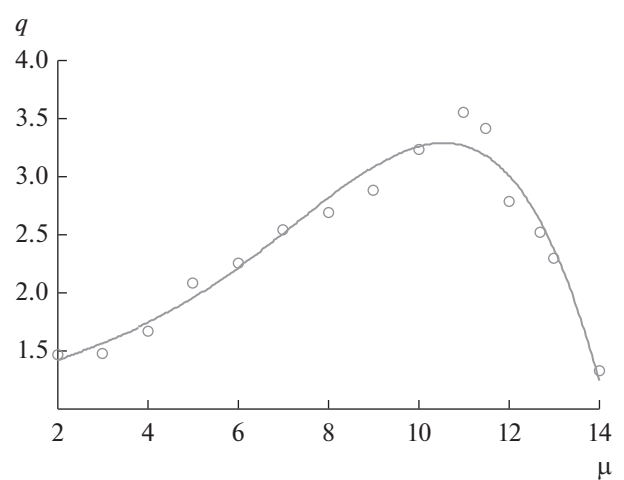


Рис. 6. Зависимость коэффициента передачи q от параметра инерционности фильтра μ для $h = 0.4$, $\sigma = 1$, $\Delta s = 1$ и $\varphi = 0$.

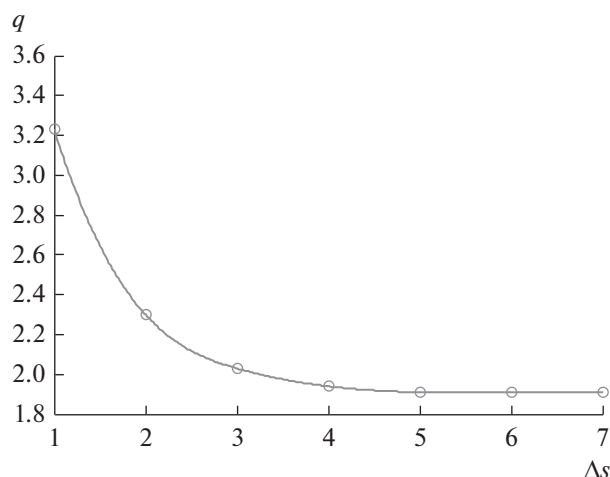


Рис. 7. Зависимость коэффициента передачи q от ширины Δs полосы пропускания полосового фильтра при $h = 0.4$, $\sigma = 1$ и $\varphi = 0$.

коэффициент передачи q падает. Однако для достаточно широких полос пропускания q принимает практически постоянное значение, соответствующее процессу насыщения.

Проведенный численный анализ процесса фильтрации зашумленных сигналов на основе нелинейного активного фильтра совместно с полосовым фильтром показал, что выходное отношение S/N более чем в три раза превышает отношение S/N

при использовании только полосового фильтра. При этом добротность полосового фильтра может иметь не очень высокую величину. Улучшение фильтрации сигналов обнаружено также для многих других параметров нелинейного фильтра, в том числе и для бистабильной потенциальной функции. Таким образом, применение нелинейных активных фильтров может эффективно способствовать выделению сигналов на фоне интенсивного шума.

Авторы выражают благодарность И.В. Грязных за полезное обсуждение результатов работы и сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hanggi P., Inchiosa M.E., Fogliatti D., Bulsara A.R. // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. № 5. P. 6155.
2. Решетняк С.А., Третьяков Г.Н., Щеглов В.А. // Крат. сообщ. по физике ФИАН. 2001. № 5. С. 12.
3. Домбровский А.Н., Решетняк С.А. // РЭ. 2009. Т. 54. № 11. С. 1369.
4. Решетняк С.А., Третьяков Г.Н. // РЭ. 2013. Т. 58. № 4. С. 360.
5. Нефедов В.И., Решетняк С.А., Третьяков Г.Н. // Цифровая обработка сигналов. 2015. № 1. С. 56.
6. Решетняк С.А., Третьяков Г.Н. // Цифровая обработка сигналов. 2016. № 2. С. 64.
7. Грязных И.В., Мельчаков В.Н., Решетняк С.А., Третьяков Г.Н. // Доклады Всерос. конф. "РСПОВИ-2016". Москва, 2016. С. 142.