
**ЭЛЕКТРОННАЯ
И ИОННАЯ ОПТИКА**

УДК 537.533

ГЕОМЕТРИЗОВАННАЯ ТЕОРИЯ ЛЕНТОЧНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ В ϕ -ПРЕДСТАВЛЕНИИ

© 2019 г. В. А. Сыровой*

Всероссийский электротехнический институт,
Российская Федерация, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 12

*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 20.06.2017 г.

После доработки 20.06.2017 г.

Принята к публикации 18.02.2018 г.

Сформулировано второе приближение теории узких ленточных пучков с криволинейной осью и плоскосимметричных потоков. Построена полная гидродинамическая картина течения вблизи стартовой поверхности при эмиссии в ρ - и T -режимах. Исследована окрестность особых точек, соответствующих экстремумам потенциала на базовой трубке тока при его немонотонном изменении.

DOI: 10.1134/S003384941901011X

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] представлен новый вариант геометризованной теории плотных электронных пучков, в которой, помимо введения заранее неизвестной системы координат x^i ($i = 1, 2, 3$), связанной с траекториями (линии x^1) или трубками тока (поверхности $x^2 = \text{const}$), в качестве продольной координаты использован потенциал электрического поля ϕ (ϕ -представление). При тестировании двумерных геометризованных моделей на наборе эталонных точных решений в [2] обнаружено, что построенное в ϕ -формализме приближенное решение может иметь большую точность по сравнению со случаем использования длины дуги l образующей трубки тока (l -представление) в качестве продольной координаты.

В отличие от l -варианта геометризованной теории плотных электронных пучков ϕ -вариант в большей степени связан с физической картиной явления, которую образуют не только траектории или трубки тока, но и эквипотенциальные поверхности. В рамках ϕ -представления автоматически появляется информация об углах наклона траекторий или трубок тока к эквипотенциальным поверхностям, получение которой в l -варианте теории, как и построение поверхностей $\phi = \text{const}$, представляет самостоятельную задачу.

Уравнения, описывающие ϕ -геометризацию, нельзя получить из системы l -варианта по формулам перехода от одной криволинейной системы к другой. Потенциал ϕ , меняя свой статус искомой функции и становясь независимой переменной, уменьшает число зависимых переменных на единицу при сохранении числа уравнений; порядок

уравнения Пуассона при этом снижается со второго на первый. В результате в ϕ -варианте система уравнений геометризованной теории становится полной и элемент g_{12} метрического тензора g_{ik} перестает быть произвольной функцией, специализацию которой определяет требование регуляризации решения.

В то время как классическая параксиальная теория [3, 4] оперирует с асимптотическим рядом по малому геометрическому параметру, геометризованный подход основан на построении ряда Тэйлора по поперечной координате. Сравнение на эталонных точных решениях асимптотической и геометризованной моделей [2] дает основание для предпочтения второй из них уже в первом приближении, если критерием является точность результата. Кроме того, геометризованное описание позволяет рассматривать случай произвольной ориентации магнитного поля на катоде, недоступный классическому подходу. В результате появляется возможность синтеза электронно-оптической системы магнетронно-инжекторных пушек в осесимметричном [5] или планарном [6] варианте.

В последнее десятилетие существенно возрос интерес к ленточным пучкам для различных приборов СВЧ (см., например, [7] и приведенную там библиографию). Цель работы — построение второго приближения геометризованной модели в ϕ -варианте для описания непараксиальных ленточных пучков с искривленной осью и плоскосимметричных потоков. Помимо этого необходимо исследовать сингулярности, источником которых в ϕ -представлении является немонотонное поведение потенциала на базовой поверхности.

В работе используются обычные тензорные обозначения [4, 8] и релятивистские нормировки, позволяющие исключить из уравнений все физические постоянные выбранной системы единиц.

1. ГЕОМЕТРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛЕНТОЧНОГО ПУЧКА В ϕ -ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В системе x^i ($i = 1, 2, 3$), где уравнение $x^1 = \text{const}$ определяет эквипотенциальные поверхности, $x^2 = \text{const}$ — трубки тока, $x^3 = x$ — циклическая декартова координата примем следующие обозначения для основных параметров задачи: g_{ik} — метрический тензор, g — его детерминант; θ_{12} — угол между касательными к осям x^1, x^2 ; u — косоугольная проекция продольной скорости, w — сносовая скорость по оси x ; $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ — вектор напряженности магнитного поля с косоугольными проекциями L, M на оси x^1, x^2 и компонентой N по оси x ; ρ — плотность пространственного заряда; J — плотность тока эмиссии. Для обозначения частных производных по криволинейным координатам использованы сокращения типа $h_{1,1} \equiv \partial h_1 / \partial x^1$, $g_{12,12} \equiv \partial^2 g_{12} / \partial x^1 \partial x^2$; тильдой отмечены исчезающие в нерелятивистском пределе члены.

Метрический тензор g_{ik} имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} g_{11} &\equiv h_1^2, \quad g_{22} \equiv h_2^2, \quad g_{33} = 1, \quad g_{12} = h_1 h_2 \cos \theta_{12}, \\ g^{11} &= \frac{1}{h_1^2 \sin^2 \theta_{12}}, \quad g^{22} = \frac{1}{h_2^2 \sin^2 \theta_{12}}, \\ g^{12} &= -\frac{\cos \theta_{12}}{h_1 h_2 \sin^2 \theta_{12}}, \quad g^{33} = 1, \\ g_{13} &= g_{23} = g^{13} = g^{23} = 0, \quad \sqrt{g} = h_1 h_2 \sin \theta_{12}. \end{aligned} \quad (1)$$

Контравариантные компоненты скорости v^i определены соотношениями

$$v^1 = \frac{dx^1}{dt}, \quad v^2 = \frac{dx^2}{dt}, \quad v^3 = \frac{dx^3}{dt} = w, \quad u = h_1 v^1. \quad (2)$$

Условие евклидовости пространства, которому удовлетворяет тензор g_{ik} , имеет вид [4]

$$\begin{aligned} &h_2 h_{2,11} - g_{12,12} + h_1 h_{1,22} + \frac{1}{\sin^2 \theta_{12}} \times \\ &\times \left\{ - (h_{2,1}^2 + h_{1,2}^2) \cos^2 \theta_{12} + \frac{h_{1,1}}{h_1} (g_{12,2} - h_2 h_{2,1}) + \right. \\ &+ \frac{h_{2,2}}{h_2} (g_{12,1} - h_1 h_{1,2}) + \left[-h_{1,1} h_{2,2} + \left(\frac{1}{h_1} g_{12,1} + h_{1,2} \right) \times \right. \\ &\times h_{2,1} - \left. \frac{1}{h_2} \left(\frac{1}{h_1} g_{12,1} - h_{1,2} \right) g_{12,2} \right] \cos \theta_{12} \left. \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

У трех уравнений движения моноэнергетического пучка есть два интеграла:

$$\begin{aligned} 1 + \phi &= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - w^2}}, \quad (1 + \tilde{\phi}) w + A_3 = P(x^2), \\ w P_{,2} &= u \left\{ \frac{1}{h_1} \left[(1 + \tilde{\phi}) \frac{g_{12} u}{h_1} \right]_{,1} - \frac{1}{h_1} [(1 + \tilde{\phi}) h_1 u]_{,2} + h_2 \sin \theta_{12} N \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения Пуассона и сохранения тока описываются формулами

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_2}{h_1 \sin \theta_{12}} \right)_{,1} - (\text{ctg } \theta_{12})_{,2} &= h_1 h_2 \sin \theta_{12} \rho, \\ (h_2 \sin \theta_{12} \rho u)_{,1} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Самосогласованное магнитное поле $\vec{H}$ выражается через векторный потенциал A_3 и удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} h_2 \sin \theta_{12} L &= A_{3,2}, \quad h_1 \sin \theta_{12} M = -A_{3,1}, \\ H_{3,1} &= 0, \quad H_{3,2} = h_2 \sin \theta_{12} \tilde{\rho} u, \quad H_3 \equiv N = N(x^2); \\ [h_2 (M + L \cos \theta_{12})]_{,1} &- [h_1 (L + M \cos \theta_{12})]_{,2} = \\ &= h_1 h_2 \sin \theta_{12} \tilde{\rho} w, \\ (h_2 \sin \theta_{12} L)_{,1} &+ (h_1 \sin \theta_{12} M)_{,2} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

2. ПРЕОБРАЗОВАННАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ЛЕНТОЧНОГО ПУЧКА

В работе [9] показано, что уравнения двумерных пучков в ϕ -формализме могут быть представлены в виде соотношений на трубке тока, имеющих вид обыкновенных дифференциальных уравнений с входящей в их коэффициенты координатой x^2 в качестве параметра и системы эволюционных уравнений, выражающих поперечные производные $\partial / \partial x^2$ искомых функций через зависящие от x^1 распределения на трубке тока.

Соотношения на трубке тока. Для криволинейного ленточного пучка на трубке тока справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
& (1 + \tilde{\varphi}) \frac{u^2}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + \left[\frac{1}{h_1} - 2(1 + \tilde{\varphi}) \sin \theta_{12} \times \right. \\
& \quad \times \cos \theta_{12} \frac{u^2}{h_1} f_{,1} - \sin \theta_{12} w M \left. \right] \frac{h_{2,1}}{h_1} + \\
& \quad + \left\{ \frac{1}{h_1} \left(k_1 + \cos^2 \theta_{12} \frac{f_{,1}}{h_1} \right) + (1 + \tilde{\varphi}) \times \right. \\
& \quad \times \left[k_1^2 + f \frac{k_{1,1}}{h_1} + \sin^2 \theta_{12} (3 \cos^2 \theta_{12} - 1) \left(\frac{f_{,1}}{h_1} \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. \left. - \sin \theta_{12} \cos \theta_{12} \frac{1}{h_1} \left(\frac{f_{,1}}{h_1} \right)_{,1} \right] u^2 + \frac{L}{1 + \tilde{\varphi}} \times \right. \\
& \quad \times \left[2(1 + \tilde{\varphi}) k_1 w + \frac{wN}{u} + H_l \right] - k_1 w H_l + \sin^2 \theta_{12} \times \\
& \quad \times \cos \theta_{12} w M \frac{f_{,1}}{h_1} - \frac{w}{h_1 \sin \theta_{12}} (M_{,1} + \cos \theta_{12} L_{,1}) + \\
& \quad + \frac{1}{h_1 \sin^2 \theta_{12}} \left(\frac{1}{h_1} \right)_{,1} \left. \right\} h_2 = \frac{(h_2 L)_0}{(1 + \tilde{\varphi}) \sin \theta_{12}} \times \\
& \quad \times \left[2(1 + \tilde{\varphi}) k_1 w + \frac{wN}{u} + H_l \right] + \frac{h_{20} J}{(1 + \tilde{\varphi})^2 \sin \theta_{12} u}; \\
& \quad f = \operatorname{ctg} \theta_{12}, \quad H_l = L + M \cos \theta_{12}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь k_1 — кривизна трубки тока, нижний индекс нуль указывает на значение функции на катоде $x^1 = 0$.

К уравнению (7) необходимо добавить зависимости, определяющие изменение угла θ_{12} и сносовой скорости w вдоль трубки тока:

$$\begin{aligned}
& (1 - h_1 w M \sin^3 \theta_{12}) \frac{f_{,1}}{h_1} = \frac{h_{1,1}}{h_1^2} f - \frac{2k_1}{(1 + \tilde{\varphi})^2} - \\
& - \left[(1 + \tilde{\varphi}) k_{1,1} + \tilde{k}_1 \right] u^2 + \left[2(1 + \tilde{\varphi}) k_1 - \frac{N}{u} \right] w w_{,1} + \\
& + \frac{1}{(1 + \tilde{\varphi})^3} \frac{N}{u} + (wL)_{,1} + (wM)_{,1} \cos \theta_{12}, \\
& w_{,1} = \frac{1}{1 + \tilde{\varphi}} (h_1 M \sin \theta_{12} - \tilde{w}).
\end{aligned} \tag{8}$$

Эволюционные уравнения. Изменение в поперечном направлении декартовых координат z , y , угла θ между касательной к трубке тока и осью z и функции h_1 описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
& z_{,2} = h_2 \cos \vartheta, \quad y_{,2} = h_2 \sin \vartheta, \quad \vartheta = \theta + \theta_{12}; \\
& \theta_{,2} = \sin \theta_{12} \frac{h_{2,1}}{h_1} + h_2 \cos \theta_{12} \left(k_1 - \sin^2 \theta_{12} \frac{f_{,1}}{h_1} \right), \\
& h_{1,2} = h_1 h_2 \sin \theta_{12} \left(\sin^2 \theta_{12} \frac{f_{,1}}{h_1} - k_1 \right) + h_{2,1} \cos \theta_{12}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Для производной $k_{1,2}$ имеем

$$\begin{aligned}
k_{1,2} = & \frac{h_2}{h_1} \cos \theta_{12} k_{1,1} + h_2 \sin \theta_{12} k_1^2 + \sin \theta_{12} \frac{1}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + \\
& + h_2 \sin^3 \theta_{12} \times \\
& \times \left[-\frac{f}{h_1} \left(\frac{f_{,1}}{h_1} \right)_{,1} + (3 \cos^2 \theta_{12} - 1) \left(\frac{f_{,1}}{h_1} \right)^2 - 2f \frac{h_{2,1}}{h_1 h_2} \frac{f_{,1}}{h_1} \right].
\end{aligned} \tag{10}$$

Производные от компонент скорости в поперечном направлении определены соотношениями

$$u u_{,2} = -w w_{,2}, \quad w_{,2} = -\frac{1}{1 + \tilde{\varphi}} [h_2 L \sin \theta_{12} - (h_2 L)_0]. \tag{11}$$

Для компонент магнитного поля получаем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_2} H_{l,2} = & \sin \theta_{12} k_1 H_l + \frac{\sin^2 \theta_{12}}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_2} - \sin \theta_{12} f_{,1} \right) M + \\
& + \frac{1}{h_1} M_{,1} + \frac{1}{h_1} L_{,1} \cos \theta_{12} - \frac{h_{20} \tilde{J} w}{h_2 u}, \\
& \frac{1}{h_2} (M \sin \theta_{12})_{,2} = \\
= & -\sin \theta_{12} \left[\frac{1}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_2} - \sin \theta_{12} \cos \theta_{12} f_{,1} \right) L + \frac{L_{,1}}{h_1} \right] - \\
& - M \sin \theta_{12} \left[\frac{1}{h_1} \left(\sin^3 \theta_{12} f_{,1} + \frac{h_{2,1}}{h_2} \cos \theta_{12} \right) - k_1 \sin \theta_{12} \right], \\
& N_{,2} = h_{20} \tilde{J}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Эволюция функции f в x^2 -направлении описывается формулой

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_2} f_{,2} = & \left(-\sin \theta_{12} k_1 + \sin^3 \theta_{12} \frac{f_{,1}}{h_1} + \cos \theta_{12} \frac{h_{2,1}}{h_1 h_2} \right) f - \\
& - (1 + \tilde{\varphi}) h_1 \sin \theta_{12} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + k_1^2 + \frac{f}{h_1} k_{1,1} + \right. \\
& + \sin^2 \theta_{12} (3 \cos^2 \theta_{12} - 1) \left(\frac{f_{,1}}{h_1} \right)^2 - \\
& - \sin \theta_{12} \cos \theta_{12} \left[\frac{1}{h_1} \left(\frac{f_{,1}}{h_1} \right)_{,1} + 2 \frac{h_{2,1}}{h_1 h_2} \frac{f_{,1}}{h_1} \right] \left. \right\} u^2 - \\
& - \frac{1}{(1 + \tilde{\varphi}) h_2} [h_2 \sin \theta_{12} L - (h_2 L)_0] \times \\
& \times \left[2(1 + \tilde{\varphi}) k_1 w + \frac{wN}{u} + H_l \right] + \\
& + \sin \theta_{12} k_1 w H_l + \sin^2 \theta_{12} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1 h_2} - \sin \theta_{12} \cos \theta_{12} \frac{f_{,1}}{h_1} \right) \times \\
& \times w M + \frac{1}{h_1} (M_{,1} + L_{,1} \cos \theta_{12}) - \frac{h_{20} \tilde{J} \varphi (2 + \tilde{\varphi})}{h_2 u (1 + \tilde{\varphi})^2}.
\end{aligned} \tag{13}$$

3. ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ТЕОРИИ УЗКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ЛЕНТОЧНЫХ ПУЧКОВ

Соотношения на трубке тока (7), (8) и эволюционная система (9)–(13) описывают первое приближение теории узких пучков, позволяющее по информации на базовой трубке тока сконструировать первые члены рядов Тэйлора по поперечной координате $x^2 \equiv \xi$. Уже в этом приближении, в отличие от классической параксиальной теории, где член порядка ε описывает внешнее поле, учитывается пространственный заряд пучка.

Для построения второго приближения представим уравнение (7) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h_2 &\equiv A_2 h_{2,11} + A_1 h_{2,1} + A_0 h_2 = F, \\ A_2 &= (1 + \tilde{\Phi}) \frac{u^2}{h_1^2}, \quad A_1 = -(1 + \tilde{\Phi}) u^2 \frac{h_{1,1}}{h_1^3} + \frac{1}{h_1} \times \\ &\times \left[\frac{1}{h_1} - 2(1 + \tilde{\Phi}) \sin \theta_{12} \cos \theta_{12} u^2 \frac{f_{,1}}{h_1} - \sin \theta_{12} w M \right], \\ A_0 &= \frac{1}{h_1} \left(\cos^2 \theta_{12} \frac{f_{,1}}{h_1} + k_1 \right) f + (1 + \tilde{\Phi}) \left[\frac{f}{h_1} k_{1,1} + k_1^2 + \right. \\ &+ \sin^2 \theta_{12} (3 \cos^2 \theta_{12} - 1) \left(\frac{f_{,1}}{h_1} \right)^2 - \\ &- \sin \theta_{12} \cos \theta_{12} \frac{1}{h_1} \left(\frac{f_{,1}}{h_1} \right)_{,1} \left. \right] u^2 + \frac{L}{1 + \tilde{\Phi}} \times \\ &\times \left[2(1 + \tilde{\Phi}) k_1 w + \frac{w N}{u} + H_l \right] - k_1 w H_l + \sin^2 \theta_{12} \times \\ &\times \cos \theta_{12} w M \frac{f_{,1}}{h_1} - \frac{w}{h_1 \sin \theta_{12}} (M_{,1} + L_{,1} \cos \theta_{12}) - \\ &- \frac{1}{\sin^2 \theta_{12}} \frac{h_{1,1}}{h_1^3}, \quad F = \frac{h_{20} L_0}{(1 + \tilde{\Phi}) \sin \theta_{12}} \times \\ &\times \left[2(1 + \tilde{\Phi}) k_1 w + \frac{w N}{u} + H_l \right] + \frac{h_{20} J}{u \sin \theta_{12}} \frac{1}{(1 + \tilde{\Phi})^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (7) представляет собой точное соотношение на трубке тока, содержащее координату x^2 как параметр. По этой причине его можно дифференцировать по x^2 для получения уравнения относительно $h_{2,2}$ — функции, через которую могут быть выражены параметры потока во втором приближении теории:

$$\mathcal{L}h_{2,2} + A_{2,2} h_{2,11} + A_{1,2} h_{2,1} + A_{0,2} h_2 = F_{,2}. \quad (15)$$

Полученный результат проиллюстрируем двумя первыми коэффициентами:

$$\begin{aligned} A_{2,2} &= 2(1 + \tilde{\Phi}) \frac{u^2}{h_1^2} \left(\frac{u_{,2}}{u} - \frac{h_{1,2}}{h_1} \right), \\ A_{1,2} &= -(1 + \tilde{\Phi}) \frac{u^2}{h_1} \left\{ \frac{h_{1,2,1}}{h_1} + 2 \frac{u_{,2}}{u} \left(\frac{h_{1,1}}{h_1} - 2 \frac{f f_{,1}}{1 + f^2} \right) - \right. \\ &- 3 \frac{h_{1,1}^2}{h_1^2} - \frac{2}{1 + f^2} \left[\frac{1 - f^2}{1 + f^2} f_{,1} f_{,2} + f \left(f_{,2,1} - 2 \frac{h_{1,2}}{h_1} f_{,1} \right) \right] \left. \right\} + \\ &+ \sin \theta_{12} \left[\frac{w M}{h_1} \left(\frac{h_{1,2}}{h_1} + \frac{f f_{,2}}{1 + f^2} \right) - (w M)_{,2} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения эволюционной системы (9)–(13) дают возможность исключить производные по x^2 из коэффициентов уравнения (15), после чего оно будет иметь тот же вид, что и соотношение на трубке тока (14).

4. ТЕОРИЯ ПЛОСКОСИММЕТРИЧНЫХ ПУЧКОВ

Первое приближение. Соотношения, описывающие плоскосимметричные потоки, значительно проще по сравнению с соотношениями в случае искривленной оси в силу того, что ряд параметров на оси обращается в нуль, а система криволинейных координат на ней локально-ортогональна:

$$\begin{aligned} k_1 &= 0, \quad \theta = 0, \quad f = 0, \quad w = 0, \quad M = 0, \\ N_s &= 0, \quad \theta_{12} = \frac{\pi}{2}, \quad u^2 = \frac{\Phi(2 + \tilde{\Phi})}{(1 + \tilde{\Phi})^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где N_s — собственное магнитное поле. Обращаются в нуль на оси и производные по x^2 для параметров задачи, являющихся четными функциями x^2 :

$$z_{,2} = 0, \quad h_{1,2} = 0, \quad u_{,2} = 0, \quad L_{,2} = 0, \quad J_{,2} = 0. \quad (18)$$

Соотношение на трубке тока (7) описывается уравнением

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h_2 &\equiv \frac{(1 + \tilde{\Phi}) u^2}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + \frac{h_{2,1}}{h_1^2} + \left(\frac{L^2}{1 + \tilde{\Phi}} - \frac{h_{1,1}}{h_1^3} \right) h_2 = \\ &= \frac{h_{20} L_0 L}{1 + \tilde{\Phi}} + \frac{h_{20} J}{u} \frac{1}{(1 + \tilde{\Phi})^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Система эволюционных уравнений для нечетных функций принимает вид

$$\begin{aligned} y_{,2} &= h_2, \quad \theta_{,2} = \frac{h_{2,1}}{h_1}, \quad k_{1,2} = h_2 k_1^2 + \frac{1}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1}, \\ w_{,2} &= \frac{1}{1 + \tilde{\Phi}} [(h_2 L)_0 - h_2 L], \\ \frac{1}{h_2} M_{,2} &= \frac{1}{h_1} \left(L_{,1} - \frac{h_{2,1}}{h_2} L \right), \quad N_{,2} = h_{20} \tilde{J}, \\ \frac{1}{h_2} f_{,2} &= - \frac{(1 + \tilde{\Phi}) u^2}{h_2} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + \\ &+ \frac{1}{1 + \tilde{\Phi}} \frac{h_1}{h_2} \{ [(h_2 L)_0 - h_2 L] L - h_{20} \tilde{J} u \}. \end{aligned} \quad (20)$$

Второе приближение. Уравнение (15) для $h_{2,2}$ в случае прямой оси имеет тривиальное решение, а следующее приближение сводится к получению уравнения для $h_{2,22}$. Для этого необходимо продифференцировать по x^2 уравнение (15) и перейти к прямой оси с учетом соотношений (17), (18). Вторые производные от четных функций удовлетворяют эволюционной системе высшего порядка, построение которой на основании связей (9)–(12) проводится по аналогичному алгоритму; вторые производные функций из (20) на оси обращаются в нуль.

Соотношение на трубке тока в высшем приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h_{2,22} + A_{2,22}h_{2,11} + A_{1,22}h_{2,1} + A_{0,22}h_2 &= F_{2,22}, \\ A_{2,22} &= 2 \frac{(1+\tilde{\Phi})u^2}{h_1^2} \left(\frac{u_{2,2}}{u} - \frac{h_{1,22}}{h_1} \right), \\ A_{1,22} &= -\frac{(1+\tilde{\Phi})u^2}{h_1^3} \left(2h_{1,1} \frac{u_{2,2}}{u} + h_{1,221} \right) - 2w_{2,2}M_{2,2}, \\ A_{0,22} &= 2(1+\tilde{\Phi})u^2k_{1,2}^2 + \frac{2L}{1+\tilde{\Phi}}L_{2,22} - \\ &- 2 \left[\frac{M_{2,21}}{h_1} - L \left(k_{1,2} + \frac{h_{20}J}{u} \frac{1}{1+\tilde{\Phi}} \right) \right] w_{2,2} - \left(\frac{h_{1,22}}{h_1^3} \right)_{,1}, \\ F_{2,22} &= \frac{h_{20}L_0L}{1+\tilde{\Phi}} \left(\frac{h_{20,22}}{h_{20}} + \frac{L_{0,22}}{L_0} \right) + \\ &+ \frac{h_{20}J}{(1+\tilde{\Phi})^2u} \left(\frac{h_{20,22}}{h_{20}} + \frac{J_{2,22}}{J} - \frac{u_{2,2}}{u} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Эволюционные соотношения высшего порядка. Коэффициенты в уравнении (21) становятся известными функциями продольной координаты при использовании формул

$$\begin{aligned} h_{1,22} &= -h_1h_2k_{1,2} + (h_2f_{2,2})_{,1}, \quad u_{2,2} = -\frac{w_{2,2}^2}{u}, \\ L_{2,22} &= h_2Lk_{1,2} + \frac{h_2}{h_1}(M_{2,21} + L_{1,1}f_{2,2}) + \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} - 2f_{2,2} \right) M_{2,2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Параметры потока во втором приближении теории. Зная функцию $h_{2,22}$, можно построить решение с учетом более высоких степеней поперечной координаты $x^2 \equiv \xi$, чем вторая:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}z_{2,22}\xi^2 + \frac{1}{24}z_{2,222}\xi^4, \quad y = y_{2,2}\xi + \frac{1}{6}y_{2,22}\xi^3, \\ \theta &= \theta_{2,2}\xi + \frac{1}{6}\theta_{2,22}\xi^3, \quad f = f_{2,2}\xi + \frac{1}{6}f_{2,22}\xi^3, \\ u &= u_a + \frac{1}{2}u_{2,22}\xi^2 + \frac{1}{24}u_{2,222}\xi^4, \\ w &= w_{2,2}\xi + \frac{1}{6}w_{2,22}\xi^3, \end{aligned} \quad (23)$$

где u_a — скорость на оси.

Входящие в формулы (23) производные определены выражениями

$$\begin{aligned} z_{2,22} &= -h_2\theta_{2,2}, \quad z_{2,222} = -3(\theta_{2,2} - f_{2,2})h_{2,22} + \\ &+ h_2 \left[f_{2,22} - 2f_{2,2}^3 - \theta_{2,22} + (\theta_{2,2} - f_{2,2})^3 \right], \\ y_{2,22} &= h_{2,22} - h_2(\theta_{2,2} - f_{2,2})^2, \\ \theta_{2,22} &= \frac{h_{2,221}}{h_1} - \frac{h_{1,22}h_{2,1}}{h_1^2} - \frac{h_{2,1}}{h_1}f_{2,2}^2 + 2h_2f_{2,2}k_{1,2} - 2h_2f_{2,2}\frac{f_{2,21}}{h_1}, \\ f_{2,22} &= -2(1+\tilde{\Phi})u_{2,22}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1} - (1+\tilde{\Phi}) \times \\ &\times u^2 \left[\left(\frac{h_{2,221}}{h_1} - \frac{h_{2,1}h_{1,22}}{h_1^2} \right)_{,1} - 2f_{2,2} \left(\frac{h_2f_{2,21}}{h_1} \right)_{,1} - \right. \\ &- \left. f_{2,2}^2 \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + 2h_2 \left(f_{2,2}k_{1,21} + h_1k_{1,2}^2 - \frac{f_{2,21}^2}{h_1} \right) \right] + \\ &+ 2f_{2,2} \left[\frac{1}{h_1}(h_2f_{2,2})_{,1} - h_2k_{1,2} \right] - \\ &- \frac{h_1L}{1+\tilde{\Phi}} \left[h_2L \left(\frac{L_{2,22}}{L} + \frac{h_{2,22}}{h_2} - f_{2,2}^2 \right) - \right. \\ &- \left. h_{20}L_0 \left(\frac{h_{20,22}}{h_{20}} + \frac{L_{0,22}}{L_0} \right) \right] + (h_2L - h_{20}L_0) \left[2h_1w_{2,2}k_{1,2} - \right. \\ &- \left. \frac{1}{1+\tilde{\Phi}} \left(h_1H_{1,22} + h_{1,22}L - 2h_1\frac{h_{20}J}{u}w_{2,2} \right) \right] + \\ &+ 2 \left(h_1h_2Lk_{1,2} + \frac{h_{2,1}}{h_2}M_{2,2} \right) w_{2,2} - \\ &- h_{20}\tilde{J}h_1u \left(\frac{h_{1,22}}{h_1} - \frac{u_{2,2}}{u} + \frac{J_{2,22}}{J} + \frac{h_{20,22}}{h_{20}} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Для компонент L , M магнитного поля получаем

$$\begin{aligned} L &= L_a + \frac{1}{2}L_{2,22}\xi^2 + \frac{1}{24}L_{2,222}\xi^4, \quad M = M_{2,2}\xi + \frac{1}{6}M_{2,22}\xi^3, \\ L_{2,222} &= \frac{h_2}{h_1} \left(M_{2,221} + 3f_{2,2}L_{2,221} - 3f_{2,2}^3L_{1,1} + f_{2,22}L_{1,1} \right) - \\ &- 4 \left(f_{2,2}M_{2,222} + 3f_{2,2}^3M_{2,2} + f_{2,22}M_{2,2} \right) + \\ &+ 3 \left(\frac{h_{2,22}}{h_1} - \frac{h_2h_{1,22}}{h_1^2} \right) (M_{2,21} + f_{2,2}L_{1,1}) + \\ &+ 3 \left(2h_2f_{2,2}k_{1,2} + \frac{h_{2,221}}{h_1} - \frac{h_{2,1}h_{1,22}}{h_1^2} - 2f_{2,2}^2h_{2,1} \right) M_{2,2} + \\ &+ h_2Lk_{1,222} + 3 \left(h_{2,22}L - h_2f_{2,2}^2L + h_2L_{2,22} \right) k_{1,2} - \\ &- \frac{h_{20}\tilde{J}}{u} \left[w_{2,22} - 3 \left(\frac{u_{2,2}}{u} - \frac{h_{20,22}}{h_{20}} - \frac{J_{2,22}}{J} \right) w_{2,2} \right], \\ M_{2,22} &= -h_2 \left[\frac{L_{2,221}}{h_1} + \frac{h_{2,1}}{h_1h_2}L_{2,22} - \left(\frac{h_{1,22}}{h_1} - \frac{h_{2,22}}{h_2} - f_{2,2}^2 \right) \frac{L_{1,1}}{h_1} + \right. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{h_{2,221}}{h_2} - \frac{h_{2,1}h_{1,22}}{h_1h_2} - f_{,2}f_{,21} - \frac{h_{2,1}}{h_2} f_{,2}^2 \right) \frac{L}{h_1} \Bigg] + \\
 & + 2 \left(k_{1,2} - 2 \frac{f_{,21}}{h_1} - \frac{h_{2,1}f_{,2}}{h_2} + \frac{3f_{,2}^2}{2h_2} \right) h_2 M_{,2}, \\
 k_{1,222} = & 2 \frac{h_2}{h_1} k_{1,21} + 2h_2 k_{1,2}^2 + \frac{1}{h_1} \left(\frac{h_{2,221}}{h_1} \right)_{,1} - \frac{h_{2,1}h_{1,221}^2}{h_1^3} - \\
 & - \left(2h_{2,11} - 3 \frac{h_{1,1}h_{2,1}}{h_1} \right) \frac{h_{1,22}}{h_1^3} - \frac{h_2}{h_1^2} f_{,2} \times \\
 & \times \left[f_{,211} - \left(\frac{h_{1,1}}{h_1} - 4 \frac{h_{2,1}}{h_2} \right) f_{,21} \right] - 2 \frac{h_2}{h_1^2} f_{,21}^2.
 \end{aligned}$$

Выражения для z , u из (23) при фиксированных значениях ξ или x^1 определяют параметрические уравнения трубки тока или эквипотенциали.

5. РЕШЕНИЕ ВБЛИЗИ СТАРТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЭМИССИИ В ρ -РЕЖИМЕ

Форма решения. При эмиссии в ρ -режиме структура особенности в прикатодной зоне описывается разложениями по параметру $t = \phi^{1/4}$ [1] с сингулярным элементом g_{11} метрического тензора:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= a_0 t^{-1} (1 + \bar{a}_1 t + \bar{a}_2 t^2 + \dots), \\
 h_2 &= b_0 (1 + \bar{b}_3 t^3 + \bar{b}_4 t^4 + \dots), \\
 g_{21} &= f_0 (1 + \bar{f}_1 t + \bar{f}_2 t^2 + \dots), \\
 u &= U_0 t^2 (1 + \bar{U}_1 t + \bar{U}_2 t^2 + \dots), \\
 w &= W_0 t^3 (1 + \bar{W}_1 t + \bar{W}_2 t^2 + \dots), \\
 \rho &= \rho_0 t^{-2} (1 + \bar{\rho}_1 t + \bar{\rho}_2 t^2 + \dots), \\
 L &= L_0 + L_1 t + L_2 t^2 + \dots, \\
 M &= M_0 + M_1 t + M_2 t^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{26}$$

Условия $b_1 = b_2 = 0$ обеспечивают конечное значение кривизны эмитирующей поверхности.

В каждом n -м приближении по t возникают связанные через коэффициенты предыдущих приближений системы алгебраических уравнений, причем интеграл энергии из (4) устанавливает соотношения между величинами U_k и W_k ; уравнение движения из (4) служит для определения g_{12} ; уравнения Пуассона и сохранения тока (5) порождают связи между g_{11} и ρ ; условие евклидовости (3) определяет g_{22} ; связь сносовой скорости w с магнитным полем и компоненты L , M самосогласованного магнитного поля регламентированы уравнениями для $w_{,1}$ из (6) и (8).

При решении упомянутых алгебраических систем используются вспомогательные разложения

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_{12} &= c_0 t (1 + \bar{c}_1 t + \bar{c}_2 t^2 + \dots), \\
 \sin \theta_{12} &= 1 + s_2 t^2 + s_3 t^3 + \dots
 \end{aligned} \tag{27}$$

Выражения для коэффициентов разложений. Первые алгебраические системы приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned}
 U_0^2 &= 2, \quad a_0^2 = \frac{U_0}{4J}, \quad \rho_0 = \frac{J}{U_0}, \quad W_0 = \frac{4}{3} a_0 M_0, \\
 f_0 &= -\frac{4}{3} \frac{a_0^2 b_0}{U_0} N, \quad c_0 = -\frac{4}{3} \frac{a_0 N}{U_0}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Для коэффициентов с индексом 1 получаем

$$\begin{aligned}
 a_1 &= U_1 = \rho_1 = L_1 = 0, \quad W_1 = \frac{2}{3} a_0^2 U_0 L_0 N, \\
 M_1 &= \frac{4}{3} \frac{a_0 L_0 N}{U_0}, \quad f_1 = \frac{2}{3} a_0^3 b_0 L_0 M_0, \quad c_1 = \frac{2}{3} a_0^2 L_0 M_0.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Решение алгебраических систем для следующего набора коэффициентов имеет вид

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_2 &= -a_0^2 \left(\frac{1}{9} M_0^2 - \frac{1}{3} N^2 \right), \quad \bar{U}_2 = -\frac{4}{9} a_0^2 M_0^2, \\
 W_2 &= -\frac{8}{15} a_0^3 M_0 \left(L_0^2 + \frac{1}{6} M_0^2 + \frac{1}{6} N^2 \right), \\
 L_2 &= \frac{4}{9} a_0^2 L_0 N^2, \quad M_2 = -\frac{2}{3} a_0^2 L_0^2 M_0, \\
 \bar{\rho}_2 &= -\frac{4}{9} a_0^2 (M_0^2 - N^2), \quad f_2 = \frac{8}{15} \frac{a_0^4 b_0 N}{U_0} \times \\
 &\times \left(L_0^2 - \frac{2}{3} M_0^2 - \frac{2}{3} N^2 \right) + \frac{4}{5} a_0 a_{0,2}, \quad s_2 = -\frac{4}{9} a_0^2 N^2, \\
 c_2 &= \frac{a_0^3 N}{U_0} \left(\frac{8}{15} L_0^2 - \frac{68}{135} M_0^2 + \frac{4}{45} N^2 \right) + \frac{4}{5} \frac{a_{0,2}}{b_0}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Коэффициенты с индексами 3 определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_3 &= \frac{4}{5} \bar{b}_3 - \frac{4}{9} a_0^3 U_0 L_0 M_0 N, \quad \bar{U}_3 = -\frac{8}{9} a_0^3 L_0 M_0 N, \\
 W_3 &= -\frac{2}{15} a_0 M_0 \bar{b}_3 + \frac{8}{9} \frac{a_0^2}{b_0} L_{0,2} + \frac{16}{45} a_0 L_0 \frac{a_{0,2}}{b_0} + \\
 &+ \frac{a_0^4 N}{U_0} \left(-\frac{16}{45} L_0^3 + \frac{176}{405} M_0^2 N + \frac{32}{135} N^3 \right), \\
 L_3 &= -\frac{4}{3} \frac{1}{b_0} (a_0 M_0)_{,2} - L_0 \bar{b}_3 - \frac{4}{9} a_0^3 U_0 L_0^2 M_0 N, \\
 M_3 &= \frac{4}{3} \frac{a_0}{b_0} L_{0,2} + \frac{8}{15} L_0 \frac{a_{0,2}}{b_0} - M_0 \bar{b}_3 + \\
 &+ \frac{a_0^3 L_0 N}{U_0} \left[-\frac{8}{15} L_0^2 + \frac{68}{135} (M_0^2 + N^2) \right], \quad \bar{\rho}_3 = -\bar{b}_3, \\
 f_3 &= -\frac{59}{45} a_0^2 b_0 U_0 N \bar{b}_3 - a_0^5 b_0 L_0 M_0 \times
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\times \left(-\frac{8}{45} L_0^2 + \frac{46}{135} M_0^2 - \frac{46}{45} N^2 \right),$$

$$s_3 = \frac{4}{9} a_0^3 U_0 L_0 M_0 N, \quad c_3 = -\frac{1}{9} a_0 U_0 N \bar{b}_3 +$$

$$+ a_0^4 L_0 M_0 \left(-\frac{8}{45} L_0^2 + \frac{56}{135} M_0^2 - \frac{248}{135} N^2 \right).$$

Для коэффициентов при t^4 имеем

$$\begin{aligned} \bar{a}_4 = & \frac{5}{6} \bar{b}_4 + \frac{4}{9} \frac{a_0 N}{U_0} \frac{a_{0,2}}{b_0} + a_0^4 \left[M_0^2 \left(\frac{11}{45} L_0^2 + \frac{23}{810} M_0^2 \right) + \right. \\ & + N^2 \left(-\frac{5}{27} L_0^2 + \frac{187}{1215} M_0^2 + \frac{1}{486} N^2 \right) \left. \right] - \frac{19}{36}, \\ \bar{U}_4 = & a_0^4 \left[M_0^2 \left(\frac{16}{45} L_0^2 - \frac{16}{405} M_0^2 \right) - \right. \\ & - \frac{2}{9} N^2 \left(L_0^2 - \frac{4}{15} M_0^2 \right) \left. \right] - \frac{3}{4}, \quad \bar{W}_4 = -\frac{1}{14} \bar{b}_4 - \\ & - \frac{2}{105} \frac{a_0 L_0 N}{U_0 M_0} \bar{b}_3 - \frac{a_0^2 N}{U_0 b_0} \left(\frac{52}{35} \frac{a_{0,2}}{a_0} + \frac{4}{3} \frac{M_{0,2}}{M_0} \right) + \\ & + a_0^4 \left[\frac{8}{105} L_0^4 - \frac{43}{315} L_0^2 M_0^2 + \frac{23}{1890} M_0^4 + \right. \\ & + N^2 \left(\frac{152}{315} L_0^2 + \frac{103}{2835} M_0^2 - \frac{271}{5670} N^2 \right) \left. \right] - \frac{103}{84}, \\ L_4 = & -L_0 \bar{b}_4 - \frac{4}{3} \frac{a_0^2 L_0 N}{U_0 b_0} \left(\frac{12}{5} \frac{a_{0,2}}{a_0} + \frac{L_{0,2}}{L_0} \right) + \\ & + a_0^4 L_0 \left[\frac{2}{9} L_0^2 M_0^2 + N^2 \left(-\frac{8}{45} L_0^2 + \frac{68}{405} M_0^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{32}{135} N^2 \right) \right] - \frac{1}{3} \tilde{L}_0, \quad M_4 = -M_0 \bar{b}_4 - \frac{10}{9} \frac{a_0 L_0 N}{U_0} \bar{b}_3 - \\ & - \frac{a_0^2 M_0 N}{U_0 b_0} \left(\frac{40}{9} \frac{a_{0,2}}{a_0} + \frac{28}{9} \frac{M_{0,2}}{M_0} \right) + a_0^4 L_0 M_0 \times \\ & \times \left(\frac{8}{45} L_0^2 - \frac{56}{135} M_0^2 + \frac{128}{135} N^2 \right), \quad \bar{p}_4 = -\bar{b}_4 - \frac{8}{15} \frac{a_{0,2}}{b_0} + \\ & + a_0^4 \left[M_0^2 \left(-\frac{2}{15} L_0^2 + \frac{32}{135} M_0^2 + \frac{124}{405} N^2 \right) + \right. \\ & + N^2 \left(\frac{2}{45} L_0^2 + \frac{4}{15} N^2 \right) \left. \right], \quad f_4 = -\frac{136}{63} \frac{a_0^2 b_0 N}{U_0} \bar{b}_4 + \\ & + \frac{4}{5} a_0^3 b_0 L_0 M_0 \bar{b}_3 + \left(\frac{32}{315} L_0^2 - \frac{24}{35} M_0^2 + \right. \\ & + \frac{40}{63} N^2 \left. \right) a_0^3 a_{0,2} + a_0^4 \left(\frac{16}{63} L_0 L_{0,2} - \frac{40}{63} M_0 M_{0,2} \right) + \\ & + \frac{a_0^6 b_0 N}{U_0} \left[-\frac{32}{105} L_0^4 + \frac{416}{567} L_0^2 M_0^2 - \frac{2336}{8505} M_0^4 + \right. \\ & + N^2 \left(\frac{928}{2835} L_0^2 - \frac{10792}{25515} M_0^2 + \frac{746}{25515} N^2 \right) \left. \right], \\ s_4 = & \frac{8}{15} \frac{a_0 N}{U_0} \frac{a_{0,2}}{b_0} + a_0^4 \times \end{aligned} \quad (32)$$

$$\times \left[-\frac{2}{9} L_0^2 M_0^2 + N^2 \left(\frac{8}{45} L_0^2 - \frac{68}{405} M_0^2 + \frac{16}{405} N^2 \right) \right],$$

$$c_4 = \frac{53}{63} \frac{a_0 N}{U_0} \bar{b}_4 - \frac{2}{5} a_0^2 L_0 M_0 \bar{b}_3 + \frac{a_0^2}{b_0} \times$$

$$\times \left(\frac{32}{315} L_0^2 - \frac{188}{315} M_0^2 + \frac{628}{945} N^2 \right) a_{0,2} +$$

$$+ \frac{a_0^3}{b_0} \left(\frac{16}{63} L_0 L_{0,2} - \frac{40}{63} M_0 M_{0,2} \right) +$$

$$+ \frac{a_0^5 N}{U_0} \left[-\frac{32}{105} L_0^4 + \frac{4852}{2835} L_0^2 M_0^2 - \frac{166}{567} M_0^4 + \right.$$

$$+ N^2 \left(-\frac{92}{945} L_0^2 - \frac{68}{1701} M_0^2 + \frac{4}{1701} N^2 \right) \left. \right] + \frac{52}{63} \frac{a_0 \tilde{N}}{U_0}.$$

В случае отсутствия однородного внешнего магнитного поля по оси x формулы при учете релятивистских эффектов не упрощаются. Для заданных конечных размеров эмитирующей поверхности и распределения плотностей тока на ней собственное поле с компонентой N равно нулю только в одной точке и нарастает по мере удаления от нее в соответствии с формулой для N_2 из (12):

$$N = \int_0^{x^2} h_{20} J dx^2. \quad (33)$$

При этом оно влияет на компоненты по двум другим осям через коэффициенты M_1, L_2 .

Коэффициенты пятого приближения приведем для случая $N \equiv 0$, который возможен для нерелятивистских потоков:

$$\begin{aligned} \bar{a}_5 = & \frac{6}{7} \bar{b}_5 - \frac{61}{315} a_0^2 M_0^2 \bar{b}_3 - \frac{64}{189} a_0^2 L_0 M_0 \frac{a_{0,2}}{b_0} - \\ & - \frac{88}{189} a_0^3 M_0 \frac{L_{0,2}}{b_0} - \frac{8}{81} a_0^3 L_0 \frac{M_{0,2}}{b_0}, \quad \bar{U}_5 = -\frac{2}{3} a_0 M_0 \times \\ & \times \left(-\frac{2}{15} a_0 M_0 \bar{b}_3 + \frac{16}{45} a_0 L_0 \frac{a_{0,2}}{b_0} + \frac{8}{9} a_0^2 \frac{L_{0,2}}{b_0} \right), \\ L_5 = & -L_0 \bar{b}_5 + \frac{a_0^2 M_0}{b_0} \left(\frac{22}{15} L_0^2 + \frac{1}{3} M_0^2 \right) a_{0,2} + \\ & + \frac{a_0^3}{b_0} \left[\frac{2}{3} L_0 M_0 L_{0,2} + \left(\frac{2}{3} L_0^2 + \frac{1}{3} M_0^2 \right) M_{0,2} \right], \\ M_5 = & -M_0 \bar{b}_5 + \frac{16}{15} a_0^2 L_0^2 M_0 \bar{b}_3 + \frac{a_0^2 L_0}{b_0} \times \\ & \times \left(-\frac{32}{315} L_0^2 + \frac{296}{105} M_0^2 \right) a_{0,2} + \\ & + \frac{a_0^3}{b_0} \left[\left(-\frac{16}{63} L_0^2 + \frac{4}{9} M_0^2 \right) L_{0,2} + \frac{152}{63} L_0 M_0 M_{0,2} \right], \\ f_5 = & \frac{2}{5} a_0^2 \bar{b}_{3,2} + \frac{26}{35} a_0 a_{0,2} \bar{b}_3 + \frac{17}{21} a_0^3 b_0 L_0 M_0 \bar{b}_4 + \\ & + a_0^7 b_0 L_0 M_0^2 \left(\frac{8}{315} L_0^3 - \frac{82}{315} L_0^2 M_0 + \frac{436}{1701} M_0^3 \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Асимптотика функции h_2 . Условия евклидовости пространства (3) позволяет получить выражения для функций $\bar{b}_4, \bar{b}_5$:

$$\begin{aligned} \bar{b}_4 = & -\frac{4}{3} \frac{a_0^2}{U_0} \left(2 \frac{a_{0,2}}{a_0 b_0} N + \tilde{J} \right), \quad \bar{b}_5 = \frac{2}{5} a_0^3 \times \\ & \times \left[L_0 M_0 \left(4 \frac{a_{0,2}}{a_0 b_0} + \frac{2}{3} \frac{b_{0,2}}{b_0^2} \right) + M_0 \frac{L_{0,2}}{b_0} + L_0 \frac{M_{0,2}}{b_0} \right] - \\ & - \frac{1}{15} a_0^2 (M_0^2 + N^2) \bar{b}_3. \end{aligned} \quad (35)$$

Коэффициент $\bar{b}_3$ определяется через кривизну κ_1 стартовой поверхности, для которой в силу локальной ортогональности системы координат при $x^1 = 0$ справедлива формула

$$\kappa_1 = -\frac{\bar{b}_3}{a_0}. \quad (36)$$

Трубки тока и эквипотенциали. Связь декартовых y, z и криволинейных x^1, x^2 координат описывается уравнениями [1]

$$y_{,11} = \Gamma_{11}^1 y_{,1} + \Gamma_{11}^2 y_{,2}, \quad z_{,11} = \Gamma_{11}^1 z_{,1} + \Gamma_{11}^2 z_{,2}, \quad (37)$$

где Γ_{kl}^i – символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 = & \frac{1}{h_1 \sin^2 \theta_{12}} \left[h_{1,1} - \frac{\cos \theta_{12}}{h_2} (g_{12,1} - h_1 h_{1,2}) \right], \\ \Gamma_{11}^2 = & \frac{1}{h_2 \sin^2 \theta_{12}} \left[\cos \theta_{12} h_{1,1} + \frac{1}{h_2} (g_{12,1} - h_1 h_{1,2}) \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

В окрестности катода будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} y = & Y + Y_3 t^3 + Y_4 t^4 + \dots, \\ z = & Z + Z_3 t^3 + Z_4 t^4 + \dots \end{aligned} \quad (39)$$

с сохранением в (39) членов с седьмой степенью t . Используя приведенное выше локальное решение уравнений пучка, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 = & t^{-4} (\gamma_{10} + \gamma_{12} t^2 + \gamma_{13} t^3 + \gamma_{14} t^4), \\ \gamma_{10} = & -\frac{1}{4}, \quad \gamma_{12} = -\frac{1}{8} a_0^2 (M_0^2 + N^2), \\ \gamma_{13} = & \frac{3}{5} \bar{b}_3 - \frac{1}{3} a_0^3 U_0 L_0 M_0 N, \quad \gamma_{14} = \frac{5}{6} \bar{b}_4 - \\ & - \frac{4}{45} \frac{a_0 N}{U_0} \frac{a_{0,2}}{b_0} + \frac{1}{45} a_0^4 M_0^2 (L_0^2 + M_0^2) + \\ & + a_0^4 \left(\frac{7}{27} L_0^2 - \frac{218}{1215} M_0^2 - \frac{377}{1215} N^2 \right) - \frac{19}{36}; \\ \Gamma_{11}^2 = & t^{-4} (\gamma_{20} + \gamma_{21} t + \gamma_{22} t^2 + \gamma_{23} t^3), \\ \gamma_{20} = & -\frac{1}{3} \frac{a_0^2 N}{b_0 U_0}, \quad \gamma_{21} = \frac{1}{3} \frac{a_0^3 L_0 M_0}{b_0}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{22} = & -\frac{2}{5} \frac{a_0^2}{b_0^2} a_{0,2} + \frac{a_0^4 N}{b_0 U_0} \left(\frac{2}{5} L_0^2 - \frac{46}{135} M_0^2 - \frac{46}{135} N^2 \right), \\ \gamma_{23} = & -\frac{223}{360} \frac{a_0^2 U_0 N}{b_0} \bar{b}_3 + \frac{a_0^5 L_0 M_0}{b_0} \times \\ & \times \left(-\frac{8}{45} L_0^2 + \frac{17}{45} M_0^2 - \frac{143}{135} N^2 \right). \end{aligned}$$

Коэффициенты Y_k в формулах (39) могут быть выражены через параметры из (40):

$$\begin{aligned} Y_4 = & 4\gamma_{20} Y_{,2}, \quad Y_5 = \frac{8}{5} \left(\gamma_{21} Y_{,2} + \frac{3}{4} \gamma_{12} Y_3 \right), \\ Y_6 = & \frac{8}{9} \left[(\gamma_{22} + 4\gamma_{20} \gamma_{12}) Y_{,2} + \frac{3}{4} \gamma_{13} Y_3 \right], \\ Y_7 = & \frac{4}{7} \left[(\gamma_{23} + 2\gamma_{12} \gamma_{21} + 4\gamma_{13} \gamma_{20}) Y_{,2} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} (\gamma_{14} + 2\gamma_{12}) Y_3 + \gamma_{20} Y_{3,2} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Формулы для Z_k получаются при помощи замены $Y_k \rightarrow Z_k$ в (41).

Коэффициенты с индексом 3 связаны с ориентацией нормали к стартовой поверхности:

$$\begin{aligned} y = & Y(x^2), \quad z = Z(x^2); \\ Y_3 = & \frac{4}{3} a_0 \frac{Z_{,2}}{\sqrt{Y_{,2}^2 + Z_{,2}^2}}, \quad Z_3 = \frac{4}{3} a_0 \frac{Y_{,2}}{\sqrt{Y_{,2}^2 + Z_{,2}^2}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Уравнения (39) с коэффициентами (40) являются параметрическими уравнениями трубки тока при $x^2 = \text{const}$ или эквипотенциали при $x^1 = \text{const}$. Построение нормальных к эквипотенциалам кривых показывает, насколько трубки тока отклоняются от силовых линий электрического поля.

6. РЕШЕНИЕ ВБЛИЗИ СТАРТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЭМИССИИ В T -РЕЖИМЕ

Форма решения. При эмиссии в T -режиме решение в прикатодной зоне может быть представлено разложениями по полупелым степеням потенциала [1]:

$$\begin{aligned} h_1 = & a_0 (1 + \bar{a}_1 t + \bar{a}_2 t^2 + \dots), \\ h_2 = & b_0 (1 + \bar{b}_1 t + \bar{b}_2 t^2 + \dots), \\ g_{12} = & f_0 (1 + \bar{f}_1 t + \bar{f}_2 t^2 + \dots), \\ u = & U_0 t (1 + \bar{U}_1 t + \bar{U}_2 t^2 + \dots), \\ w = & W_0 t^2 (1 + \bar{W}_1 t + \bar{W}_2 t^2 + \dots), \\ \rho = & \rho_0 t^{-1} (1 + \bar{\rho}_1 t + \bar{\rho}_2 t^2 + \dots), \\ L = & L_0 + L_1 t + L_2 t^2 + \dots, \\ M = & M_0 + M_1 t + M_2 t^2 + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

В дальнейшем будем использовать следующие сокращенные обозначения (E – электрическое поле на катоде):

$$\begin{aligned}\bar{L}_0 &= \frac{L_0}{E}, \quad \bar{M}_0 = \frac{M_0}{E}, \quad \bar{J} = \frac{J}{E^2}, \quad \bar{L}_{0,2} = \frac{L_{0,2}}{b_0 E^2}, \\ \bar{E}_{,2} &= \frac{E_{,2}}{b_0 E^2}, \quad \bar{J}_{,2} = \frac{J_{,2}}{b_0 E^3}, \\ \bar{L}_{0,22} &= \frac{L_{0,22}}{b_0^2 E^3}, \quad \bar{E}_{,22} = \frac{E_{,22}}{b_0^2 E^3}.\end{aligned}\quad (44)$$

Выражения для коэффициентов разложений. В нулевом приближении по t получаем

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{E}, \quad U_0^2 = 2, \quad W_0 = \bar{M}_0, \quad \rho_0 = \frac{J}{U_0}, \\ f_0 &= -\frac{1}{2} \frac{b_0 U_0}{E} \bar{N}, \quad c_0 = -\frac{1}{2} U_0 \bar{N}.\end{aligned}\quad (45)$$

Значение a_0 следует из определения нормального электрического поля на катоде:

$$E = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \right)_0 = \frac{1}{a_0}.\quad (46)$$

Для коэффициентов с индексом 1 имеем

$$\begin{aligned}U_1 &= L_1 = \rho_1 = 0, \quad \bar{a}_1 = -U_0 \bar{J}, \\ W_1 &= \frac{2}{3} U_0 \left(-\bar{J} \bar{M}_0 + \frac{1}{2} \bar{L}_0 \bar{N} \right), \quad M_1 = \frac{1}{2} U_0 E \bar{L}_0 \bar{N}, \\ f_1 &= \frac{b_0}{E} \left(-\frac{2}{3} \bar{E}_{,2} + \frac{1}{3} \bar{L}_0 \bar{M}_0 + \frac{5}{3} \bar{J} \bar{N} \right), \\ c_1 &= -\frac{2}{3} \bar{E}_{,2} + \frac{1}{3} \bar{L}_0 \bar{M}_0 + \frac{2}{3} \bar{J} \bar{N}.\end{aligned}\quad (47)$$

Во втором приближении получаем

$$\begin{aligned}\bar{a}_2 &= \bar{b}_2 + 3\bar{J}^2 + \frac{1}{4} \bar{N}^2, \quad \bar{U}_2 = -\frac{1}{4} \bar{M}_0^2 - \frac{\tilde{3}}{4}, \\ W_2 &= -\frac{1}{6} \bar{L}_0 \bar{E}_{,2} + \frac{1}{2} \bar{L}_{0,2} + \frac{3}{2} \bar{J}^2 \bar{M}_0 - \\ &- \frac{1}{6} \bar{L}_0^2 \bar{M}_0 - \frac{1}{6} \bar{J} \bar{L}_0 \bar{N} - \bar{M}_0, \quad \frac{L_2}{E} = \bar{M}_0 \bar{E}_{,2} - \bar{M}_{0,2} - \\ &- \bar{L}_0 \left(\bar{b}_2 - \frac{1}{4} \bar{N}^2 \right), \quad \frac{M_2}{E} = -\frac{1}{3} \bar{L}_0 \bar{E}_{,2} + \bar{L}_{0,2} - \\ &- \bar{M}_0 \bar{b}_2 - \frac{1}{3} \bar{L}_0^2 \bar{M}_0 - \frac{2}{3} \bar{J} \bar{L}_0 \bar{N}, \quad \bar{\rho}_2 = -\bar{b}_2 + \frac{1}{4} \bar{M}_0^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \bar{N}^2 + \frac{\tilde{3}}{4}, \quad f_2 = \frac{b_0}{U_0 E} \left[\frac{22}{3} \bar{J} \bar{E}_{,2} - \bar{J}_{,2} - \frac{3}{2} \bar{J} \bar{L}_0 \bar{M}_0 + \right. \\ &+ \bar{N} \left(-2\bar{b}_2 - \frac{35}{6} \bar{J}^2 + \frac{1}{6} \bar{L}_0^2 - \frac{1}{4} \bar{M}_0^2 - \frac{1}{4} \bar{N}^2 + \frac{\tilde{1}}{4} \right) \Big], \\ s_2 &= -\frac{1}{4} \bar{N}^2, \quad c_2 = \frac{1}{U_0} \left[6\bar{J} \bar{E}_{,2} - \bar{J}_{,2} - \frac{5}{6} \bar{J} \bar{L}_0 \bar{M}_0 + \right. \\ &+ \bar{N} \left(-2\bar{b}_2 + \frac{103}{56} \bar{J}^2 + \frac{1}{6} \bar{L}_0^2 - \frac{1}{4} \bar{M}_0^2 - \frac{1}{2} \bar{N}^2 + \frac{\tilde{1}}{4} \right) \Big].\end{aligned}\quad (48)$$

Коэффициенты при t^3 определены формулами

$$\begin{aligned}\bar{a}_3 &= \bar{b}_3 + U_0 \left[-\frac{1}{3} \bar{N} \bar{E}_{,2} - \bar{J} \left(\frac{4}{9} \bar{b}_2 + 9\bar{J}^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{12} \bar{M}_0^2 + \frac{1}{3} \bar{N}^2 - \frac{\tilde{1}}{8} \right) \Big], \quad \bar{U}_3 = \frac{1}{3} U_0 \bar{M}_0 \left(\bar{J} \bar{M}_0 - \frac{1}{2} \bar{L}_0 \bar{N} \right), \\ W_3 &= \frac{2}{5} U_0 \left[-L_0 \left(\frac{2}{3} \bar{J} \bar{E}_{,2} + \frac{1}{6} \bar{J}_{,2} \right) - \frac{5}{3} \bar{J} \bar{L}_{0,2} + \right. \\ &+ \bar{N} \left(-\frac{5}{6} \bar{M}_{0,2} + \frac{1}{2} \bar{M}_0 \bar{E}_{,2} \right) + \bar{J} \bar{M}_0 \times \\ &\times \left(-\frac{1}{3} \bar{b}_2 - 9\bar{J}^2 + \frac{3}{4} \bar{L}_0 \bar{M}_0 - \frac{1}{6} \bar{M}_0^2 + \frac{1}{4} \bar{N}^2 + \frac{\tilde{43}}{24} \right) + \\ &+ \left. \bar{L}_0 \bar{N} \left(\bar{b}_2 + \frac{53}{72} \bar{J}^2 + \frac{5}{12} \bar{M}_0^2 + \frac{1}{24} \bar{L}_0 \bar{N} + \frac{1}{4} \bar{N}^2 + \frac{\tilde{23}}{24} \right) \right], \\ \frac{L_3}{E} &= -\bar{L}_0 \bar{b}_3 + U_0 \left[-2\bar{J} \bar{M}_0 \bar{E}_{,2} + \frac{2}{3} (\bar{M}_0 \bar{J}_{,2} + \bar{J} \bar{M}_{0,2}) + \right. \\ &+ \bar{N} \left(\frac{5}{6} \bar{L}_0 \bar{E}_{,2} - \frac{2}{3} \bar{L}_{0,2} \right) - \\ &- \left. \bar{L}_0 \bar{N} \left(\frac{1}{6} \bar{L}_0 \bar{M}_0 + \frac{1}{3} \bar{J} \bar{N} \right) - \frac{1}{3} \bar{J} \bar{L}_0 \right], \\ \frac{M_3}{E} &= -\bar{M}_0 \bar{b}_3 + U_0 \left[-\bar{L}_0 \left(\bar{J} \bar{E}_{,2} + \frac{1}{6} \bar{J}_{,2} \right) - \frac{2}{3} \bar{J} \bar{L}_{0,2} + \right. \\ &+ \bar{N} \left(-\frac{5}{6} \bar{M}_{0,2} + \frac{7}{6} \bar{M}_0 \bar{E}_{,2} \right) + \frac{5}{12} \bar{J} \bar{L}_0^2 \bar{M}_0 + \bar{L}_0 \bar{N} \times \\ &\times \left(\frac{1}{2} \bar{b}_2 - \frac{103}{72} \bar{J}^2 - \frac{1}{12} \bar{L}_0^2 + \frac{1}{8} \bar{M}_0^2 + \frac{3}{8} \bar{N}^2 - \frac{\tilde{1}}{8} \right) \Big], \\ \bar{\rho}_3 &= -\bar{b}_3 + \frac{U_0 \bar{M}_0}{3} \left(\bar{J} \bar{M}_0 - \frac{1}{2} \bar{L}_0 \bar{N} \right), \quad f_3 = \frac{b_0}{E} \times \\ &\times \left[\frac{2}{5} \frac{\bar{b}_{2,2}}{b_0 E} - \frac{9}{10} U_0 \bar{N} \bar{b}_3 + \frac{8}{5} \bar{J} \bar{J}_{,2} + \left(-\frac{16}{15} \bar{b}_2 - \frac{38}{3} \bar{J}^2 - \right. \right. \\ &- \frac{1}{30} \bar{L}_0^2 + \frac{13}{30} \bar{M}_0^2 + \frac{2}{5} \bar{N}^2 - \frac{\tilde{1}}{30} \Big) \bar{E}_{,2} + \frac{1}{10} \bar{L}_0 \bar{L}_{0,2} - \\ &- \frac{2}{3} \bar{M}_0 \bar{M}_{0,2} + \bar{L}_0 \bar{M}_0 \left(\frac{8}{15} \bar{b}_2 + \frac{10}{3} \bar{J}^2 - \frac{1}{30} \bar{L}_0^2 + \right. \\ &+ \frac{2}{15} \bar{M}_0^2 - \frac{7}{30} \bar{N}^2 - \frac{\tilde{2}}{15} \Big) + \bar{J} \bar{N} \left(\frac{59}{15} \bar{b}_2 - \frac{473}{30} \bar{J}^2 - \right. \\ &- \frac{1}{3} \bar{L}_0^2 + \frac{41}{30} \bar{M}_0^2 + \frac{2}{15} \bar{N}^2 - \frac{\tilde{107}}{120} \Big) \Big], \quad s_3 = \frac{1}{6} U_0 \bar{N} \times \\ &\times \left(-2\bar{E}_{,2} + \bar{L}_0 \bar{M}_0 + 2\bar{J} \bar{N} \right), \quad c_3 = \frac{2}{5} \frac{\bar{b}_{2,2}}{b_0 E} + \frac{1}{10} U_0 \bar{N} \bar{b}_3 + \\ &+ \frac{13}{5} \bar{J} \bar{J}_{,2} + \left(-\frac{16}{15} \bar{b}_2 - \frac{70}{3} \bar{J}^2 - \frac{1}{30} \bar{L}_0^2 + \frac{13}{30} \bar{M}_0^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{15} \bar{N}^2 - \frac{\tilde{1}}{30} \Big) \bar{E}_{,2} + \frac{1}{10} \bar{L}_0 \bar{L}_{0,2} - \frac{2}{3} \bar{M}_0 \bar{M}_{0,2} + \bar{L}_0 \bar{M}_0 \times \\ &\times \left(\frac{8}{15} \bar{b}_2 + \frac{13}{2} \bar{J}^2 - \frac{1}{30} \bar{L}_0^2 + \frac{2}{15} \bar{M}_0^2 - \frac{3}{20} \bar{N}^2 - \frac{\tilde{2}}{15} \right) + \\ &+ \bar{J} \bar{N} \left(\frac{38}{5} \bar{b}_2 + \frac{434}{15} \bar{J}^2 - \frac{1}{5} \bar{L}_0^2 + \frac{23}{15} \bar{M}_0^2 + \frac{29}{30} \bar{N}^2 - \frac{\tilde{61}}{60} \right).\end{aligned}\quad (49)$$

Для коэффициентов с индексом 4 имеем

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_4 &= \bar{b}_4 - \frac{3}{2} U_0 \bar{J} \bar{b}_3 - \frac{1}{3} \bar{E}_{,22} + \frac{2}{3} \bar{E}_{,2}^2 + \\
 &+ \frac{1}{3} \left(\frac{b_{0,2}}{b_0^2 E^2} - \bar{L}_0 \bar{M}_0 + \bar{J} \bar{N} \right) \bar{E}_{,2} + \frac{1}{3} \bar{N} \bar{J}_{,2} \\
 &+ \frac{1}{6} (\bar{M}_0 \bar{L}_{0,2} + \bar{L}_0 \bar{M}_{0,2}) + \\
 &+ \bar{J}^2 \left(\frac{11}{9} \bar{b}_2 + 40 \bar{J}^2 + \frac{1}{3} \bar{M}_0^2 + \frac{11}{24} \right) - \\
 &- \frac{1}{6} \bar{J} \bar{L}_0 \bar{M}_0 \bar{N} - \bar{N}^2 \left(\frac{1}{4} \bar{b}_2 + \frac{3}{4} \bar{J}^2 + \frac{1}{16} \bar{N}^2 \right), \\
 \bar{U}_4 &= \frac{1}{12} \bar{L}_0 \bar{M}_0 \bar{E}_{,2} - \frac{1}{4} \bar{M}_0 \bar{L}_{0,2} + \bar{M}_0^2 \times \\
 &\times \left(-\frac{35}{36} \bar{J}^2 + \frac{1}{12} \bar{L}_0^2 - \frac{1}{32} \bar{M}_0^2 + \frac{5}{16} \right) + \frac{11}{36} \bar{J} \bar{L}_0 \bar{M}_0 \bar{N} - \\
 &- \frac{1}{18} \bar{L}_0^2 \bar{N}^2 + \frac{23}{32}, \quad \frac{1}{E} L_4 = \bar{L}_0 \left(-\bar{b}_4 + \frac{1}{6} \bar{E}_{,22} - \frac{5}{18} \bar{E}_{,2}^2 \right) - \\
 &- \frac{1}{2} \bar{L}_{0,22} + \frac{7}{6} \bar{L}_{0,2} \bar{E}_{,2} + \left(-3 \bar{J} \bar{M}_0 + \frac{3}{2} \bar{L}_0 \bar{N} \right) \bar{J}_{,2} + \\
 &+ \left(-b_2 \bar{L}_0 + \frac{15}{2} \bar{J}^2 \bar{M}_0 - \frac{13}{18} \bar{L}_0^2 \bar{M}_0 - \frac{61}{9} \bar{J} \bar{L}_0 \bar{N} + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{4} \bar{M}_0 \bar{N}^2 \right) \bar{E}_{,2} + \left(\frac{1}{3} \bar{L}_0 \bar{M}_0 + \frac{5}{6} \bar{J} \bar{N} \right) \bar{L}_{0,2} + \\
 &+ \left(\bar{b}_2 - \frac{3}{2} \bar{J}^2 + \frac{1}{6} \bar{L}_0^2 - \frac{1}{2} \bar{N}^2 \right) \bar{M}_{0,2} + \\
 &+ \bar{L}_0^2 \bar{M}_0 \left(\frac{1}{18} \bar{L}_0 \bar{M}_0 + \frac{23}{36} \bar{J} \bar{N} \right) - \bar{L}_0 \bar{N}^2 \left(\frac{3}{4} \bar{b}_2 - \frac{29}{24} \bar{J}^2 - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{12} \bar{L}_0^2 + \frac{1}{8} \bar{M}_0^2 - \frac{1}{8} \right), \quad \frac{1}{E} M_4 = -\frac{2}{5} \bar{L}_0 \frac{\bar{b}_{2,2}}{b_0 E} + \\
 &+ \bar{M}_0 \left(-\bar{b}_4 + \bar{b}_2^2 \right) - \frac{3}{5} U_0 \bar{L}_0 \bar{N} \bar{b}_3 + \frac{1}{6} \bar{M}_0 \left(\bar{E}_{,22} + \bar{E}_{,2}^2 \right) - \\
 &- \frac{1}{2} \bar{M}_{0,22} + \frac{1}{2} \bar{M}_{0,2} \bar{E}_{,2} + \left(-\frac{13}{5} \bar{J} \bar{L}_0 + \frac{3}{2} \bar{M}_0 \bar{N} \right) \bar{J}_{,2} + \\
 &+ \bar{L}_0 \left(\frac{7}{5} \bar{b}_2 + \frac{7}{30} \bar{J}^2 + \frac{1}{30} \bar{L}_0^2 - \frac{19}{45} \bar{M}_0^2 + \frac{14}{45} \bar{N}^2 \right) \bar{E}_{,2} - \\
 &- 6 \bar{J} \bar{M}_0 \bar{N} \bar{E}_{,2} + \left(-\bar{b}_2 - \frac{1}{10} \bar{L}_0^2 + \frac{1}{6} \bar{M}_0^2 - \frac{2}{3} \bar{N}^2 \right) \bar{L}_{0,2} + \\
 &+ \left(\frac{4}{3} \bar{L}_0 \bar{M}_0 + \frac{13}{6} \bar{J} \bar{N} \right) \bar{M}_{0,2} + \bar{L}_0^2 \bar{M}_0 \left(-\frac{1}{5} \bar{b}_2 - \frac{13}{2} \bar{J}^2 + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{30} \bar{L}_0^2 - \frac{2}{15} \bar{M}_0^2 - \frac{1}{10} \bar{N}^2 + \frac{2}{15} \right) + \bar{J} \bar{L}_0 \bar{N} \times \\
 &\times \left(-\frac{218}{15} \bar{b}_2 - \frac{434}{15} \bar{J}^2 + \frac{1}{5} \bar{L}_0^2 - \frac{23}{15} \bar{M}_0^2 - \frac{22}{15} \bar{N}^2 + \frac{17}{20} \right), \\
 \bar{p}_4 &= -\bar{b}_4 + \bar{b}_2^2 - \frac{1}{12} \bar{L}_0 \bar{M}_0 \bar{E}_{,2} + \frac{1}{4} \bar{M}_0 \bar{L}_{0,2} + \bar{M}_0^2 \times \\
 &\times \left(-\frac{1}{4} \bar{b}_2 + \frac{35}{36} \bar{J}^2 - \frac{1}{12} \bar{L}_0^2 + \frac{3}{32} \bar{M}_0^2 + \frac{1}{16} \bar{N}^2 + \frac{1}{16} \right) - \\
 &- \frac{11}{36} \bar{J} \bar{L}_0 \bar{M}_0 \bar{N} + \bar{N}^2 \left(-\frac{1}{4} \bar{b}_2 + \frac{1}{18} \bar{L}_0^2 + \frac{1}{16} \bar{N}^2 + \frac{3}{16} \right) - \\
 &- \frac{3}{4} \bar{b}_2 - \frac{5}{32}.
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

Влияние собственного магнитного поля начинает проявляться в коэффициентах M_1 , L_2 при членах порядка $\sqrt{\varphi}$ и φ , в то время как в ρ -режиме соответствующие слагаемые имели порядок $\sqrt[4]{\varphi}$ и $\sqrt{\varphi}$.

Асимптотика функции h_2 . Рассматривая уравнение (3), можно вычислить коэффициенты b_3 , b_4 , определяющие поведение элемента g_{22} в окрестности особенности на катоде:

$$\begin{aligned}
 \bar{b}_3 &= \frac{1}{3} U_0 (-2 \bar{b}_2 \bar{J} + 2 \bar{N} \bar{E}_{,2} - \bar{J}), \\
 \bar{b}_4 &= -\bar{E}_{,22} - \frac{1}{2} (\bar{E}_{,2} + \bar{J} \bar{N}) \frac{b_{0,2}}{b_0^2 E} - \\
 &- \left(\frac{1}{3} \bar{L}_0 \bar{M}_0 + \frac{23}{6} \bar{J} \bar{N} \right) \bar{E}_{,2} + \frac{1}{2} \bar{b}_2 \left(\bar{b}_2 + 4 \bar{J}^2 + \frac{1}{2} \bar{N}^2 \right) + \\
 &+ \frac{1}{6} \bar{M}_0 \bar{L}_{0,2} + \frac{1}{6} \bar{L}_0 \bar{M}_{0,2} + \frac{5}{2} \bar{N} \bar{J}_{,2} + \frac{11}{4} \bar{J}^2.
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

Трубки тока и эквипотенциали. Используя соотношения (37), (38), будем искать решение в виде

$$\begin{aligned}
 y &= Y + Y_2 t^2 + Y_3 t^3 + Y_4 t^4 + Y_5 t^5, \\
 z &= Z + Z_2 t^2 + Z_3 t^3 + Z_4 t^4 + Z_5 t^5.
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Для символов Кристоффеля на основании результатов разд. 6 имеем

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 &= t^{-1} (\gamma_{10} + \gamma_{11} t + \gamma_{12} t^2), \quad \gamma_{10} = -\frac{1}{2} U_0 \bar{J}, \\
 \gamma_{11} &= \bar{b}_2 + 2 \bar{J}^2, \quad \gamma_{12} = \frac{3}{2} \bar{b}_3 + U_0 \left[-\frac{1}{2} \bar{b}_2 \bar{J} - \frac{1}{10} \bar{J}^3 - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{8} \bar{J} \bar{M}_0^2 + \bar{N} \left(-\frac{2}{3} \bar{E}_{,2} + \frac{1}{3} \bar{L}_0 \bar{M}_0 + \frac{13}{24} \bar{J} \bar{N} \right) - \frac{1}{8} \bar{J} \right]; \\
 \Gamma_{11}^2 &= t^{-1} (\gamma_{20} + \gamma_{21} t + \gamma_{22} t^2), \quad \gamma_{20} = -\frac{1}{4} \frac{U_0}{b_0 E} \bar{N}, \\
 \gamma_{21} &= \frac{1}{b_0 E} \left(-\frac{5}{3} \bar{E}_{,2} + \frac{1}{3} \bar{L}_0 \bar{M}_0 + \frac{13}{6} \bar{J} \bar{N} \right), \\
 \gamma_{22} &= \frac{U_0}{b_0 E} \left[-\frac{7}{4} \bar{J}_{,2} + \frac{7}{2} \bar{J} \bar{E}_{,2} - \frac{31}{24} \bar{J} \bar{L}_0 \bar{M}_0 + \bar{N} \left(-\frac{5}{4} \bar{b}_2 - \right. \right. \\
 &- \left. \left. \frac{149}{24} \bar{J}^2 + \frac{1}{8} \bar{L}_0^2 - \frac{3}{16} \bar{M}_0^2 - \frac{9}{16} \bar{N}^2 + \frac{3}{16} \bar{N} \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

Коэффициенты Y_k из (52) могут быть выражены через γ_{1k} , γ_{2k} при помощи соотношений

$$\begin{aligned}
 Y_3 &= \frac{4}{3} (\gamma_{10} \gamma_{21} + \gamma_{20} \gamma_{12}), \\
 Y_4 &= \frac{1}{2} \left[(2 \gamma_{10}^2 + \gamma_{11}) Y_2 + (2 \gamma_{20} \gamma_{11} + \gamma_{21}) Y_{2,2} \right], \\
 Y_5 &= \frac{4}{15} \left[(\gamma_{12} + 3 \gamma_{10} \gamma_{11} + 2 \gamma_{10}^3) Y_2 + \right. \\
 &+ \left. (\gamma_{22} + 2 \gamma_{11} \gamma_{20} + \gamma_{10} \gamma_{21} + 2 \gamma_{10}^2 \gamma_{20}) Y_{2,2} + \gamma_{20} Y_{2,2,2} \right].
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

Формулы для Z_k получаются при помощи замены $Y_k \rightarrow Z_k$, а компоненты нормали Y_2, Z_2 описываются выражениями (42).

7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СООТНОШЕНИЙ НА БАЗОВОЙ ТРУБКЕ ТОКА

Пучки с искривленной осью. Уравнения (7), (8) в случае криволинейного ленточного пучка в правых частях имеют члены, обращающиеся в бесконечность или содержащие неопределенности. Для учета первых и раскрытия вторых следует использовать прикатодные асимптотики, приведенные в разд. 5, 6. Структура особенностей решения сводится к трехчленной формуле с двумя выделенными точками ветвления в ρ -режиме эмиссии и к двучленной формуле в случае T -режима [10]. По этой причине при интегрировании уравнения (7) необходимо использовать для h_2 разложения с сохранением коэффициентов b_4, b_5 (ρ -режим) или b_3 (T -режим). Значение кривизны κ_1 катода на оси пучка определяет коэффициенты b_3, b_2 соответственно:

$$\kappa_1 = -\frac{\bar{b}_3}{a_0}, \quad \kappa_1 = -\frac{\bar{b}_2}{a_0}. \quad (55)$$

При интегрировании уравнения (15) первого приближения асимптотика функции $h_{2,2}$ описывается коэффициентами $b_{3,2}, b_{4,2}, b_{5,2}$ или $b_{2,2}, b_{3,2}$, первые из которых выражаются через производную кривизны катода $\kappa_{1,2}$, оставшиеся получают при дифференцировании формул (35), (51) по x^2 . Таким образом, в рассматриваемой модели необходимо задать геометрию катода через кривизну и ее производные и распределения прочих параметров на стартовой поверхности.

Функция $b_0(x^2)$ связана со способом отсчета поперечной координаты и не ограничена никакими другими требованиями. При длине дуги этой оси в качестве x^2 имеем $b_0 \equiv 1$. В работе [2] показано, что точность приближенного решения зависит от выбора функции $b_0(x^2)$.

Случай прямой оси. Для плоскосимметричных потоков система координат x^i локально-ортонормальна не только на катоде, но и при $y = 0$. В результате уравнения (8) удовлетворяются тождественно и задача сводится к интегрированию соотношений (19), (20). Для функций, входящих в первое из них, справедливы следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} h_2 &= b_0 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5, \quad t = \varphi^{1/4}, \\ L &= L_0 - \left(\bar{b}_3 L_0 + \frac{4}{3} \frac{a_0}{b_0} M_{0,2} \right) t^3 + 0 \cdot t^4; \\ h_2 &= b_0 + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4, \quad t = \varphi^{1/2}, \\ L &= L_0 - \left(\bar{b}_2 L_0 + \frac{1}{E^2 b_0} M_{0,2} \right) t^2 + \\ &+ \frac{2}{3} \frac{U_0 J}{E^2} \left(\bar{b}_2 \frac{L_0}{E} - \frac{1}{E^2 b_0} M_{0,2} + \frac{\tilde{L}_0}{E} \right) t^3. \end{aligned} \quad (56)$$

Функция $h_1(x^1)$ на оси связана с распределением потенциала $\varphi = \varphi(z)$ соотношением

$$h_1(\varphi) = \frac{1}{\varphi'(z(\varphi))} \quad (57)$$

и на основании результатов разд. 5, 6 определена разложениями

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\frac{U_0}{4J}} t^{-1} \left[1 + \frac{4}{5} \bar{b}_3 t^3 + \left(\frac{5}{6} \bar{b}_4 - \frac{19}{36} \right) t^4 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{6}{7} \bar{b}_5 - \frac{8}{81} \frac{a_0^3}{b_0} L_0 M_{0,2} \right) t^5 \right]; \\ h_1 &= \frac{1}{E} \left\{ 1 - U_0 \bar{J} t + (\bar{b}_2 + 3 \bar{J}^2) t^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\bar{b}_3 + U_0 \left(-\frac{4}{3} \bar{b}_2 \bar{J} - 9 \bar{J}^3 + \frac{1}{8} \tilde{J} \right) \right] t^3 \right\}. \end{aligned} \quad (58)$$

При интегрировании уравнения (21) функция $h_{2,22}$ в окрестности катодных сингулярностей имеет вид

$$\begin{aligned} h_{2,22} &= b_{0,22} + b_{3,22} t^3 + b_{4,22} t^4 + b_{5,22} t^5, \quad t = \varphi^{1/4}; \\ h_{2,22} &= b_{0,22} + b_{2,22} t^2 + b_{3,22} t^3 + b_{4,22} t^4, \quad t = \varphi^{1/2}. \end{aligned} \quad (59)$$

Величины $b_{3,22}, b_{2,22}$ могут быть выражены через вторую производную $\kappa_{1,22}$ кривизны катода

$$\begin{aligned} \kappa_{1,22} &= -\frac{b_{3,22}}{a_0 b_0} - \kappa_1 \left(\frac{a_{0,22}}{a_0} + \frac{b_{0,22}}{b_0} \right), \quad \frac{a_{0,22}}{a_0} = -\frac{1}{2} \frac{J_{,22}}{J}; \\ \kappa_{1,22} &= -\frac{b_{2,22}}{a_0 b_0} - \kappa_1 \left(\frac{a_{0,22}}{a_0} + \frac{b_{0,22}}{b_0} \right), \quad \frac{a_{0,22}}{a_0} = -\frac{E_{,22}}{E}. \end{aligned} \quad (60)$$

Другие коэффициенты в формулах (59) получают при дифференцировании соответствующих величин из (35), (51) и переходе к оси:

$$\begin{aligned} \frac{b_{4,22}}{b_0^3} &= -\frac{1}{12} \frac{\tilde{J}_{,22}}{b_0^2 J} - \frac{1}{3} \frac{\tilde{b}_{0,22}}{b_0^3}, \quad \frac{b_{5,22}}{b_0^3} = \frac{2}{5} a_0^3 \times \\ &\times \left[L_0 \frac{M_{0,2}}{b_0} \left(-\frac{11}{2} \frac{J_{,22}}{b_0^2 J} + \frac{4}{3} \frac{b_{0,22}}{b_0^3} \right) + L_0 \frac{M_{0,22}}{b_0^3} + \right. \\ &+ 3 \frac{M_{0,2}}{b_0} \frac{L_{0,22}}{b_0^2} - \frac{1}{3} \bar{b}_3 \left(\frac{M_{0,2}^2}{b_0^2} + \tilde{J} \right) \left. \right]; \quad \frac{b_{3,22}}{b_0^3} = \frac{U_0 J}{E^2} \times \\ &\times \left[\left(\frac{2}{3} \bar{b}_3 + \frac{1}{3} \right) \frac{J_{,22}}{b_0^2 J} + \left(2 \bar{b}_2 + \frac{4}{3} \right) \frac{E_{,22}}{b_0^2 E} - \frac{2}{3} \frac{b_{2,22}}{b_0^3} - \frac{1}{3} \frac{\tilde{b}_{0,22}}{b_0^3} \right]. \end{aligned} \quad (61)$$

Коэффициенты уравнения (21) вблизи катода, как и асимптотики (56), подсчитываются при использовании разложений разд. 5, 6. Например, для функции $L_{2,2}$ при эмиссии в р-режиме имеем

$$\begin{aligned} L_{2,2} &= L_{0,22} + L_{2,22}t^2 + L_{3,22}t^3 + L_{4,22}t^4, \\ \frac{1}{b_0^2} L_{2,22} &= \frac{8}{9} a_0^2 L_0 \tilde{J}^2, \quad \frac{1}{b_0^2} L_{3,22} = -\frac{4a_0}{3b_0^3} M_{0,222} - \\ &- 4 \frac{a_{0,22}}{b_0^2} \frac{M_{0,2}}{b_0} - \bar{b}_3 \frac{L_{0,22}}{b_0^2} - L_0 \frac{\bar{b}_{3,22}}{b_0^2} - \frac{8}{9} a_0 \frac{M_{0,2}}{b_0} \tilde{L}_0, \quad (62) \\ \frac{1}{b_0^2} L_{4,22} &= L_0 \frac{\bar{b}_{4,22}}{b_0^2} - \bar{b}_4 \frac{L_{0,22}}{b_0^2} + \frac{L_0^3}{8J^2} \left(\frac{4}{9} \frac{M_{0,2}^2}{b_0^2} - \frac{16}{45} \tilde{J}^2 \right) - \\ &- \frac{1}{3} \frac{\tilde{L}_{0,22}}{b_0^2} - 2\tilde{L}_0 \left(\frac{12}{5} \frac{a_{0,22}}{a_0 b_0^2} + \frac{L_{0,22}}{L_0 b_0^2} \right). \end{aligned}$$

Из формул (56), (61), (62) видно, что распределения плотности тока эмиссии J , компонент магнитного поля L , M , электрического поля E , задаваемые с необходимой степенью подробности, относятся к входной информации задачи.

Из формулы (57) следует, что функция h_1 обращается в бесконечность при $\varphi'(z) = 0$. Одну связанную с этим особенность на катоде мы уже исследовали. Дополнительные сингулярности со своей асимптотикой возникают в точках, соответствующих экстремумам потенциала при его немонотонном поведении. На рисунке 1 представлены подобное распределение $\varphi(z)$ на оси, производная $\varphi'(z)$ и функция h_1 . В отмеченных точках перегиба кривой $\varphi(z)$ она принимает минимальное и максимальное значения.

8. РЕШЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЭКСТРЕМУМОВ ПОТЕНЦИАЛА

Структура решения. В окрестности не связанных с режимом эмиссии особых точек главным членом разложения потенциала по z является квадратичный:

$$\bar{\varphi} = U_2 z^2 + U_3 z^3 + U_4 z^4 + \dots, \quad (63)$$

где $\bar{\varphi} = \varphi_m - \varphi$, $\varphi - \varphi_m$ — разность текущего значения φ и значения φ_m в экстремуме для максимума и минимума соответственно; координата z в (63) отсчитывается от точки экстремума z_m .

Обратное разложение имеет вид

$$\begin{aligned} z &= z_1 t + z_2 t^2 + z_3 t^3 + \dots, \quad t = \bar{\varphi}^{1/2}; \\ z_1 &= \frac{1}{\sqrt{U_2}}, \quad z_2 = -\frac{U_3}{2U_2^2}, \quad z_3 = \frac{5}{8} \frac{U_3^2}{U_2^3 \sqrt{U_2}} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{U_4}{U_2^2 \sqrt{U_2}}, \quad z_4 = -\frac{U_3^3}{U_2^5} + \frac{1}{2} \frac{U_3 U_4}{U_2^4} - \frac{1}{2} \frac{U_5}{U_2^3}. \end{aligned} \quad (64)$$

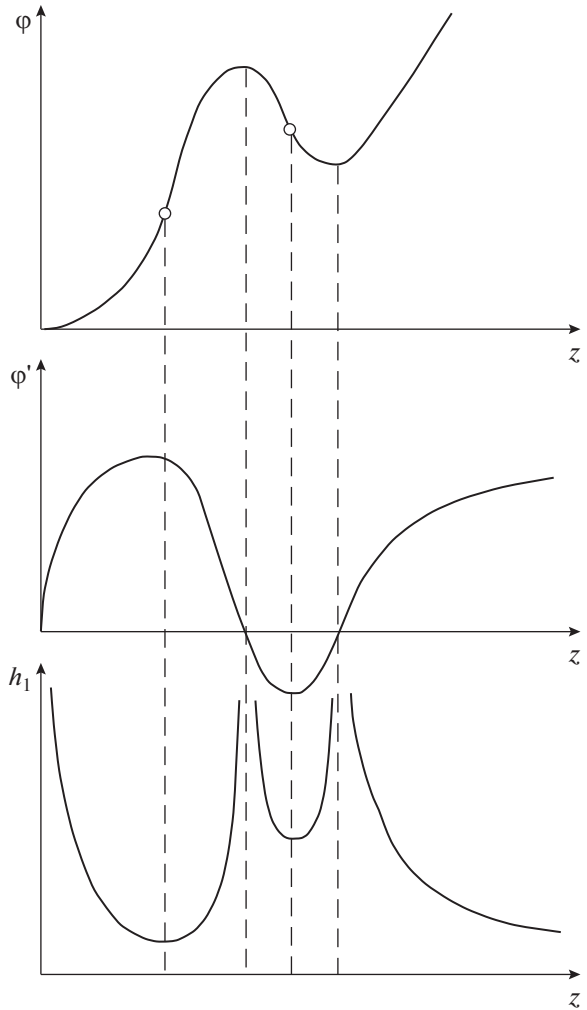


Рис. 1. Функции $\varphi'(z)$, h_1 в случае немонотонного изменения потенциала $\varphi(z)$ на оси.

Асимптотику h_1 определим из формулы

$$\begin{aligned} dz &= \frac{dz}{d\bar{\varphi}} d\bar{\varphi} = h_1 d\bar{\varphi}, \quad h_1 = a_0 t^{-1} (1 + \bar{a}_1 t + \bar{a}_2 t^2 + \dots), \\ a_0 &= \frac{1}{2} z_1, \quad a_1 = z_2, \quad a_2 = \frac{3}{2} z_3, \quad a_4 = 2z_4. \end{aligned} \quad (65)$$

Имея в виду, что магнитное поле на оси в области экстремумов является регулярной функцией z , будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} h_2 &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + \dots, \quad t = \bar{\varphi}^{1/2}, \\ L &= L_m + \Lambda_1 z + \Lambda_2 z^2 + \dots = \\ &= L_m + L_{m1} t + L_{m2} t^2 + \dots, \\ L_{m1} &= \Lambda_1 z_1, \quad L_{m2} = \Lambda_1 z_2 + \Lambda_2 z_1^2. \end{aligned} \quad (66)$$

При подстановке функций (66) в уравнения пучка следует иметь в виду, что продольные про-

изводные для максимума и минимума будут различаться по знаку:

$$f_{,1} \equiv \frac{\partial f}{\partial \varphi} = s \frac{\partial f}{\partial \tilde{\varphi}} = \frac{1}{2} s t^{-1} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad s = \pm 1. \quad (67)$$

Подставляя функции (65), (66) в уравнение (19), при любом числе n сохраненных членов приходим к неполной системе из $n - 2$ соотношений. Дефицит уравнений необходимо дополнить физическими соображениями.

Регуляризация уравнения для h_2 . Воспользуемся определением кривизны поверхностей $x^1 = \text{const}$ в случае неортогональной системы координат [4], записывая это выражение на оси пучка и преобразуя при его помощи уравнение (5):

$$\kappa_1 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\left(\frac{g_{12}}{h_2} \right)_{,2} - h_{2,1} \right] = \frac{f_{,2}}{h_2} - \frac{h_{2,1}}{h_1 h_2}, \quad (68)$$

$$\kappa_1 + \frac{h_{1,1}}{h_1^2} + h_1 \frac{h_{20} J}{h_2 u} = 0.$$

Введем для скорости и импульса в точках экстремума обозначения V_m и P_m :

$$V_m = \sqrt{\frac{\varphi_m (2 + \tilde{\varphi}_m)}{1 + \tilde{\varphi}_m}}, \quad P_m = (1 + \tilde{\varphi}_m) V_m \quad (69)$$

и подсчитаем первые члены разложения функции κ_1 вблизи $z = z_m$:

$$\begin{aligned} \kappa_1 = & -\frac{1}{b_0} \left[\frac{V_m P_m}{2a_0} \left(b_2 - \frac{1}{2} b_1 \bar{a}_1 \right) + \frac{a_0 L_m}{1 + \tilde{\varphi}_m} \times \right. \\ & \times (b_0 L_m - h_{20} L_0) + a_0 h_{20} V_m \tilde{J} \left. \right] t^{-1} + \kappa_{1m} t^0 + \dots, \\ \kappa_{1m} = & -\frac{1}{b_0} \left\{ \frac{V_m P_m}{a_0} \left[\frac{3}{2} b_3 - b_2 \bar{a}_1 + \frac{1}{2} b_1 (-\bar{a}_2 + \bar{a}_1^2) \right] + \right. \\ & + \frac{a_0}{1 + \tilde{\varphi}_m} [L_m (b_1 L_m + b_0 L_{m1}) + (L_{m1} + \bar{a}_1 L_m) \times \\ & \times (b_0 L_m - h_{20} L_0)] + \frac{1}{2} s \frac{b_1}{a_0} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (70)$$

Конечное значение кривизны эквипотенциала $\varphi = \varphi_m$ на оси пучка требует обращения в нуль коэффициента при t^{-1} в формуле (70). Члены того же порядка в уравнении (68) должны балансироваться независимо от κ_1 , и в результате коэффициент b_0 определяется следующим образом:

$$-\frac{s}{2a_0} + \frac{a_0 h_{20}}{b_0 V_m} = 0, \quad b_0 = s \frac{2a_0^2 h_{20} J}{V_m}. \quad (71)$$

Решение уравнения для h_2 . Балансы членов порядка t^0 , t и t^2 позволяют выразить коэффициенты b_2 , b_3 , b_4 через b_1 :

$$\begin{aligned} b_2 = & \frac{1}{2} b_1 \bar{a}_1 - \frac{2a_0^2}{V_m P_m} \left[\frac{L_m (b_0 L_m - h_{20} L_0)}{1 + \tilde{\varphi}_m} - h_{20} \tilde{J} V_m \right], \\ b_3 = & \frac{1}{3} b_1 \bar{a}_2 - \frac{a_0^2}{V_m P_m} \left\{ \frac{2}{3} \frac{s}{a_0^2} \left(b_1 - \frac{3}{2} b_0 \bar{a}_1 \right) + 2h_{20} \tilde{J} V_m \bar{a}_1 + \right. \\ & + \frac{1}{1 + \tilde{\varphi}_m} [(2a_0 L_m + L_{m1}) (b_0 L_m - h_{20} L_0) + \\ & + L_m (b_1 L_m - b_0 L_{m1})] \left. \right\}, \quad b_4 = -\frac{1}{4} b_1 (\bar{a}_3 - \bar{a}_1 \bar{a}_2) - \\ & - \frac{1}{2} b_2 \bar{a}_1^2 + \frac{a_0^2}{V_m P_m} \left\{ \frac{1}{2} \frac{s}{a_0^2} \left(-b_2 + \frac{1}{2} b_0 \bar{a}_1^2 \right) - \frac{L_m}{1 + \tilde{\varphi}_m} \times \right. \\ & \times \left[\frac{1}{3} (b_2 L_m + b_1 L_{m1} + b_0 L_{m2}) + \frac{5}{6} \bar{a}_1 (b_1 L_m + b_0 L_{m1}) \right] - \\ & - \frac{1}{31 + \tilde{\varphi}_m} (b_1 L_m + b_0 L_{m1}) - \frac{b_0 L_m - h_{20} L_0}{1 + \tilde{\varphi}_m} \times \\ & \times \left[\frac{1}{3} L_{m2} + \frac{5}{6} \bar{a}_1 L_{m1} + \left(\frac{1}{3} \bar{a}_2 + \frac{1}{2} \bar{a}_1^2 \right) L_m - \frac{1}{3} \tilde{s} \frac{L_m}{1 + \tilde{\varphi}_m} \times \right. \\ & \times \left. \left(1 + \frac{1 + 2\tilde{\varphi}_m + \tilde{\varphi}_m^2}{V_m P_m} \right) \right] + \frac{1}{3} s \frac{h_{20} J P_m}{(1 + \tilde{\varphi}_m)^3} \left(1 - \frac{1}{P_m^4} \right) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (72)$$

Для электростатических потоков формулы (69) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} b_0 = & 2s \frac{a_0^2 h_{20} J}{\sqrt{2\varphi_m}}, \quad b_2 = \frac{1}{2} b_1 \bar{a}_1, \quad b_3 = \frac{1}{3} b_1 \bar{a}_2 - \\ & - \frac{1}{3} \frac{s}{\varphi_m} \left(b_1 - \frac{3}{2} b_0 \bar{a}_1 \right), \quad b_4 = -\frac{1}{4} b_1 (\bar{a}_3 - \bar{a}_1 \bar{a}_2 + \bar{a}_1^3) - \\ & - \frac{1}{4\varphi_m} \left[\frac{1}{2} s (b_0 \bar{a}_1^2 - b_1 \bar{a}_1) + \frac{1}{3} \frac{b_0}{\varphi_m} \right]. \end{aligned} \quad (73)$$

Обозначим z_* координату, определяющую границу зоны действия асимптотики. Коэффициент b_1 может быть найден из условия сопряжения функции h_2 при $z = z_*$:

$$h_{2*} = h_2(z_*) = b_0 + b_1 z_* + b_2 z_*^2 + b_3 z_*^3 + b_4 z_*^4. \quad (74)$$

Функция h_2 удовлетворяет уравнению второго порядка, и ее значение b_0 в точке экстремума известно (формула (71)). При сращивании решения в разных областях естественно было бы следить за непрерывностью производных до второго порядка включительно, однако эти требования перепределяют систему уравнений для b_k . По какой причине способ (74) замыкания системы является правильным, следует из тестовой задачи.

Тестовая задача. Рассмотрим функцию h_2 , удовлетворяющую дифференциальному уравнению второго порядка:

$$h_2 = 1 + \sin(\sqrt{x}), \quad 4x h_2'' + 2h_2' + h_2 - 1 = 0 \quad (75)$$

при известном до решения уравнения значении $h_2(0) \equiv b_0 = 1$. Построение решения в виде ряда приводит к балансу членов порядка $\sqrt{x}$, 1, x :

$$h_2 = b_0 + b_1\sqrt{x} + b_2x + b_3x\sqrt{x} + \dots, \quad (76)$$

$$6b_3 + b_1 = 0, \quad 2b_1 + b_0 - 1 = 0, \quad 12b_4 + b_2 = 0.$$

Коэффициенты с четными индексами связаны только между собой и в силу $b_2 = 0$ обращаются в нуль, что свидетельствует о нечетности искомой функции. В результате нечетные коэффициенты могут быть выражены через b_1 , а ряд для h_2 принимает вид

$$h_2 = 1 + b_1 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{6}x\sqrt{x} + \dots \right). \quad (77)$$

Сращивание функций при $x = x_*$ с точным значением h_{2*} приводит к следующему значению b_1 :

$$b_1 = \frac{\sin(\sqrt{x_*})}{\sqrt{x_*}(1 - x_*/6)}. \quad (78)$$

На значительном удалении $x_* = 0.64$ от особенности при $x = 0$ формула (78) приводит к значению $b_1 = 1.00377$ вместо точной величины $b_1 = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе декомпозиции уравнений релятивистского ленточного пучка, сводящейся к формулировке соотношений на трубке тока и уравнений эволюционной системы, построено второе приближение ϕ -варианта геометризованной теории, позволяющее описывать непараксиальные пучки при произвольной ориентации магнитного поля на катоде. Первый блок трансформированной системы имеет вид трех обыкновенных дифференциальных уравнений по продольной координате $x^1 = \phi$, роль которой играет потенциал электрического поля. Поперечная координата $x^2 = \xi$ связана с геометрией трубок тока. Второй блок образован системой уравнений для первых производных по ξ от параметров потока, выражаемых через продольные распределения на базовой поверхности.

Для плоскосимметричных течений второе приближение теории позволяет описывать параметры пучка, определяемые нечетными функциями ξ , с

сохранением кубических членов по этой координате и четные функции с членами порядка ξ^4 .

Исходными данными для решения задачи являются распределение потенциала на оси, трансформируемое в элемент метрического тензора g_{11} , и распределение продольного магнитного поля. Форма катода задается через кривизну и ее вторую производную на оси, где также с необходимой точностью через производные должны быть описаны распределения плотности тока эмиссии, компонент магнитного поля, нормального к катоду электрического поля. Перечисленные распределения являются свободными управляющими функциями задачи.

Как и l -вариант геометризованной теории, ϕ -построение позволяет рассчитывать магнетронно-инжекторные пушки, которые не могут быть описаны в рамках классического параксиального подхода.

Тестовые исследования дают основание считать, что ϕ -вариант теории может приводить к более точному описанию электронного потока по сравнению с l -приближением, создавая при этом максимально информативную картину трубок тока и эквипотенциальных поверхностей. Оба подхода представляют альтернативу лобовому численному счету уравнений пучка, в то время как численные алгоритмы следовало бы включать после синтеза электронно-оптической системы на основании моделей, оперирующих с обыкновенными дифференциальными уравнениями и правильно описывающих окрестности особых точек как в пучке, так и в лапласовской области вблизи кромки катода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сыровой В.А. // РЭ. 2013. Т. 58. № 6. С. 614.
2. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
3. Данилов В.Н. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 5. С. 3.
4. Сыровой В.А. // Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
5. Сыровой В.А. // РЭ. 2002. Т. 47. № 9. С. 1114.
6. Сыровой В.А. // РЭ. 2016. Т. 61. № 3. С. 263.
7. Сыровой В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 493.
8. Мак-Конел А.Дж. Введение в тензорный анализ. М.: Физматгиз, 1963.
9. Сыровой В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 502.
10. Сыровой В.А. // РЭ. 2005. Т. 50. № 7. С. 875.