

УДК 519.688

## ВЫЧИСЛЕНИЕ СВЯЗНЫХ КОМПОНЕНТ ДОПОЛНЕНИЯ К АМЕБЕ МНОГОЧЛЕНА ОТ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2023 г. Т. А. Жуков<sup>а,\*</sup>, Т. М. Садыков<sup>а,\*\*</sup><sup>а</sup>Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова,  
117997 Москва, Стремянный пер., 36, Россия

\*E-mail: Zhukov.TA@rea.ru

\*\*E-mail: Sadykov.TM@rea.ru

Поступила в редакцию 13.05.2022 г.

После доработки 03.08.2022 г.

Принята к публикации 30.10.2022 г.

В настоящей работе предложен метод вычисления и визуализации амобы многочлена Лорана нескольких комплексных переменных, применимый в произвольной размерности. Разработанные на основе этого метода алгоритмы реализованы в виде общедоступного сетевого сервиса <http://amoebas.ru/>, позволяющего осуществлять интерактивный расчет амоб многочленов двух переменных и содержащего набор рассчитанных амоб и их сечений в более высоких размерностях. Тестирование корректности и скорости работы предложенных алгоритмов осуществлено с использованием набора оптимальных многочленов двух, трех и четырех переменных, для генерации которых применен функционал системы компьютерной алгебры Mathematica. Разработанный программный код позволяет, в частности, осуществлять генерацию оптимального гипергеометрического многочлена от произвольного числа переменных с носителем в произвольном зонотопе, заданном набором порождающих векторов.

DOI: 10.31857/S0132347423020164, EDN: MHCDUI

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие амобы [2], [3, глава 1] многочлена Лорана нескольких комплексных переменных прочно вошло в современную математику и широко используется в многочисленных приложениях. В частности, оно возникает в задачах математической физики [4, 5] и при построении решений разностных уравнений и их систем [1]. Известно, что фазовая диаграмма мер Гиббса для димеров на графе может быть представлена в виде амобы ассоциированной спектральной кривой [6, Теорема 4.1]. Изучение распределения энергии в квантовых термодинамических ансамблях естественным образом приводит к рассмотрению понятия амобы и ее т.н. контура [7]. Двойственность Лежандра между энтропией и свободной энергией позволяет вычислять последнюю в рамках теории колчанов как площадь амобы, заданной многочленом Ньютона для модели димеров [8]. С понятием амобы связан ряд важных открытых вопросов, в частности, остающаяся недоказанной на протяжении длительного времени гипотеза М. Пассаре о сплошном свойстве амобы произвольного максимально разреженного многочлена. Эти и многие другие приложения теории амоб в математической физике [9] и вещественной алгебраической геометрии [10] обуславливают давно назревшую не-

обходимость в разработке алгоритмов и общедоступного программного обеспечения для вычисления амоб многочленов Лорана нескольких комплексных переменных.

Попытки создания таких алгоритмов и их программной реализации предпринимались многими исследователями на протяжении трех последних десятилетий. В их основе лежали численное решение алгебраического уравнения относительно выделенного переменного или группы переменных [11–15], аппроксимация амоб с помощью сумм квадратов [16], полиэдральная аппроксимация фиксированной компоненты дополнения к амобе [17], подход с использованием циклических результатов [18] и другие методы [19]. Существенную роль в работах [16, 18] играют методы современной компьютерной алгебры. Сетевой ресурс <http://dvvogdanov.ru/amoeba> позволяет генерировать программный код на языке среды MATLAB для расчета аффинных и компактифицированных амоб многочленов двух переменных [20, 21]. Текущие границы применимости данного подхода иллюстрируются набором данных [www.researchgate.net/publication/338341129\\_Giant\\_amoeba\\_zoo](http://www.researchgate.net/publication/338341129_Giant_amoeba_zoo).

Однако, несмотря на значительный прогресс по сравнению с первоначальным представлением

авторов определения амёбы о виде амёб многочленов нескольких комплексных переменных (см. [2], стр. 194, рис. 16), задача вычисления и визуализации амёбы многочлена нескольких комплексных переменных (особенно в размерности 3 и выше) в настоящий момент не может считаться удовлетворительно разрешенной. Причин этому несколько: общедоступный программный код для генерации амёб дает приемлемые результаты лишь для многочленов невысокой степени и, как правило, в размерности 2; при этом некоторые из имеющихся решений существенно опираются на функционал коммерческих программных продуктов с закрытым кодом; отсутствует общедоступный сетевой сервис для интерактивной генерации амёб достаточно сложных многочленов двух и трех переменных; не существует инструментария для визуализации деформации амёбы многочлена, зависящего от параметров. Настоящая работа призвана восполнить этот пробел.

Высокая вычислительная трудность задачи расчета и визуализации амёбы многочлена нескольких переменных обусловлена, в первую очередь, следующими обстоятельствами:

1. За исключением тривиального одномерного случая, амёба многочлена является неограниченным подмножеством вещественного линейного пространства.

2. Амёба  $\mathcal{A}_f$  многочлена  $f$  двух переменных имеет конечную площадь. В размерности три и выше отношение меры пересечения  $\mathcal{A}_f \cap B(a, r)$  амёбы многочлена  $f$  с шаром радиуса  $r$  и центром в точке  $a$  к объему этого шара стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$  для любого многочлена  $f$  и любой точки  $a \in \mathbb{R}^n$ . Таким образом, определение местоположения амёбы многочлена в пространстве  $\mathbb{R}^n$  само по себе является, как правило, нетривиальной задачей.

3. Ограниченные связные компоненты дополнения к амёбе могут быть сколь угодно малы, а получение оценок снизу на их размеры является весьма трудоемкой задачей.

4. Количество связных компонент дополнения к амёбе многочлена  $f$  с фиксированным многогранником Ньютона  $\mathcal{N}$  может принимать (в зависимости от выбора коэффициентов  $f$ ) произвольные значения в диапазоне от числа вершин многогранника  $\mathcal{N}$  до числа целых точек в нем [13].

5. Численный расчет достаточно сложной амёбы многочлена высокой степени возможен лишь при весьма высокой точности вычислений. Например, при расчете амёбы многочлена десятой степени от двух переменных с целыми коэффициентами в квадрате  $[-20, 20] \times [-20, 20]$  необходимо оперировать величинами порядка  $e^{10 \cdot 20} \simeq 7.22597 \times 10^{86}$ , поддерживая точность вычислений, сравнимую с

$e^{-10 \cdot 20} \simeq 1.38389 \times 10^{-87}$ . Многочисленные компьютерные эксперименты показывают, что уменьшение точности расчета приводит, как правило, к быстрому накоплению вычислительной погрешности и потере связи результата расчета с подлинной геометрией амёбы.

В настоящей работе представлен новый метод вычисления и визуализации амёбы многочлена нескольких комплексных переменных, применимый в произвольной размерности. Разработанные алгоритмы вычисления амёб многочленов нескольких переменных реализованы в виде общедоступного сетевого сервиса <http://amoebas.ru/>. Данный ресурс позволяет в интерактивном режиме выполнять расчет и визуализацию амёб многочленов двух переменных, а также содержит заранее рассчитанные облака точек, аппроксимирующие амёбы некоторых оптимальных гипергеометрических многочленов [22] трех и четырех переменных. Для визуализации четырехмерных амёб на сайте выполняется отрисовка их сечений трехмерными гиперплоскостями.

## 2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Всюду в дальнейшем  $n \geq 2$  обозначает размерность пространства комплексных переменных,  $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  — многочлен Лорана от переменных  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ . Обозначим через  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  проколотую комплексную плоскость и рассмотрим отображение  $\text{Log} : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , определенное формулой

$$\text{Log} : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\ln |x_1|, \dots, \ln |x_n|).$$

Амёбой (см. [2, глава 6, определение 1.4]) алгебраического множества  $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$  называется образ  $\text{Log}V$ , который обозначается  $\mathcal{A}_V$ . Данное название связано с характерной формой множества  $\mathcal{A}_V$  в случае, когда множество  $V$  является комплексной алгебраической кривой  $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$ . Соответствующая такому множеству амёба, как правило, ограничивает шарообразные “вакуоли” и содержит тонкие “щупальца”, уходящие в бесконечность (см. примеры амёб в работах [14, 20, 21] и на сайте <http://amoebas.ru/>).

Амёба подмножества комплексного пространства лишь логарифмической шкалой отличается от его диаграммы Рейнхардта. Помимо амёбы, были предложены и исследованы другие проекции комплексного пространства  $\mathbb{C}^n$  на вещественное пространство той же размерности, на следующие ключевые аналитические и топологические свойства дополнения к алгебраической гиперповерхности. К их числу относятся, в част-

ности, компактифицированная амеба (см. [2], глава 6, теорема 1.12 и рис. 19) и “амебopodobный” полиэдральный комплекс, конструкция которого предложена в работе [21]. Следующий результат [2], глава 6, следствие 1.6 устанавливает простую связь между амебой многочлена Лорана  $f$  и разложениями рациональной функции  $1/f$  в ряды Лорана с центром в нуле.

**Теорема 1** (см. [2], глава 6). *Дополнение  ${}^c\mathcal{A}_f := \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$  к амебе многочлена  $f$  есть объединение конечного числа непересекающихся связных компонент. Эти компоненты выпуклы и находятся во взаимно-однозначном соответствии с разложениями рациональной функции  $1/f$  в ряды Лорана с центром в начале координат.*

Выпуклость связных компонент дополнения к амебе алгебраической гиперповерхности выгодно отличает ее от всех конкурирующих проекций комплексного пространства в вещественное и, как будет показано далее, играет существенную роль в построении алгоритмов для вычисления амеб.

Напомним, что *носителем* многочлена Лорана  $f$  называется конечное множество целых точек  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ , таких, что моном  $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  входит в многочлен  $f$  с ненулевым коэффициентом. *Многогранником Ньютона  $\mathcal{N}_f$*  многочлена Лорана  $f$  называется выпуклая оболочка (в пространстве  $\mathbb{R}^n$ ) носителя многочлена  $f$ . Следующий результат показывает, что многогранник Ньютона  $\mathcal{N}_f$  несет в себе информацию о геометрии амебы  $\mathcal{A}_f$  [23, теорема 2.8 и предложение 2.6].

**Теорема 2** (см. [23]). *Пусть  $f$  – многочлен Лорана. Обозначим через  $\{M\}$  семейство связных компонент дополнения к амебе  ${}^c\mathcal{A}_f$ . Существует инъективное отображение*

$$v_f : \{M\} \rightarrow \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{N}_f, \quad (2.1)$$

*такое, что конус, двойственный к  $\mathcal{N}_f$  в точке  $v_f(M)$ , совпадает с конусом рецессии множества  $M$ .*

Целочисленный вектор  $v_f(M)$  называется *порядком компоненты  $M$*  дополнения к амебе многочлена  $f$ . Из приведенных теорем следует, что число связных компонент дополнения к амебе  $\mathcal{A}_f$  ограничено снизу числом вершин многогранника  $\mathcal{N}_f$  и сверху – числом целых точек в данном многограннике. Нижняя граница была получена в [2]. Варьируя коэффициенты многочлена Лорана  $f$  с заданным многогранником Ньютона, можно добиться достижения как верхней [10], так и нижней [13] границы для числа связных компонент множества  ${}^c\mathcal{A}_f$ . Более того, вершины многогранника Ньютона всегда лежат в образе отображения  $v_f$ . Из теоремы 2 следует, что конусы тех связных

компонент множества  ${}^c\mathcal{A}_f$ , которые соответствуют вершинам многогранника  $\mathcal{N}_f$ , заведомо имеют непустую внутренность. В то же время связные компоненты дополнения амебы, соответствующие внутренним точкам многогранника Ньютона, являются ограниченными.

Пусть  $f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots + a_{m-1}\zeta^{m-1} + \zeta^m$  – многочлен одного переменного  $\zeta \in \mathbb{C}$  с корнями  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ . Будем без ограничения общности предполагать, что  $|\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq \dots \leq |\zeta_m|$ . Амеба многочлена  $f$  есть конечное множество точек  $\ln|\zeta_1|, \dots, \ln|\zeta_m|$ , из которого исключены повторяющиеся элементы. Типичная компонента дополнения  ${}^c\mathcal{A}_f$  к амебе данного многочлена есть (непустой) интервал  $(\ln|\zeta_k|, \ln|\zeta_{k+1}|)$  для некоторого  $k = 1, \dots, m-1$ , порядок данной компоненты равен  $k$ . Таких компонент может, однако, не быть вовсе, в случае, если все корни многочлена  $f(\zeta)$  лежат на некоторой окружности  $\{|\zeta| = r\} \subset \mathbb{C}$  с центром в точке  $\zeta = 0$ . Кроме того, всегда присутствуют две неограниченные компоненты дополнения  $(-\infty, \ln|\zeta_1|)$  и  $(\ln|\zeta_m|, \infty)$ , чьи порядки равны 0 и  $m$ , соответственно. Таким образом, в одномерном случае вычисление амебы многочлена сводится к нахождению его корней. Для решения данной задачи существует широкий спектр точных и приближенных методов и в настоящей работе мы не рассматриваем этот частный случай, предполагая всюду в дальнейшем, что  $n \geq 2$ .

Задача вычисления амебы многочлена двух или более переменных может, конечно, рассматриваться как задача разрешения алгебраического уравнения относительно одного из входящих в него переменных. Ключевое отличие от одномерного случая состоит в том, что при  $n \geq 2$  алгебраическое уравнение необходимо решать для всевозможных значений прочих присутствующих в нем переменных. В общем случае осуществить это не представляется возможным, что заставляет обращаться к другим методам вычисления амеб многочленов нескольких переменных.

В некоторых простейших случаях амеба многочлена может быть вычислена точно, а ее граница явно задана трансцендентными уравнениями. Например, амеба многочлена двух переменных  $f(x, y) = 1 + x + y$  имеет вид

$$\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq e^s + e^t, e^s - 1 \leq e^t \leq e^s + 1\}.$$

Аналогичное описание допускает амеба любой комплексной гиперплоскости в произвольной размерности. Амеба многочлена  $f(x, y) = a + x + y + xy$  с произвольным комплексным параметром  $a$  есть множество решений неравенства (см. [13, стр. 57])

$$(e^{2s} - |a|^2)^2 + (e^{2s} - 1)^2 e^{4t} - 2e^{2t}(e^{2s}(|a|^2 - 4\Re a + e^{2s} + 1) + |a|^2) \leq 0.$$

Сложность вычисления границы амобы многочлена быстро растет с увеличением его степени и числа переменных. Несмотря на это, контуры амоб произвольных классических и обобщенных дискриминантов [2] допускают бирациональную параметризацию Горна–Капранова [24]. Однако амоба многочлена достаточно высокой степени, чьи коэффициенты не обладают многочисленными свойствами симметрии, допускает, вообще говоря, лишь приближенное описание. Построение множества, аппроксимирующего амобу с заданной точностью, является задачей высокой вычислительной сложности.

Под вычислением амобы многочлена Лорана  $f$  мы будем всюду в дальнейшем понимать построение достаточно плотного облака точек, лежащих в пересечении амобы с заданной областью  $D \subset \mathbb{R}^n$ , такой, что  $D$  содержит точки любой связной компоненты дополнения  ${}^c\mathcal{A}_f$ .

### 3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ АМОБЫ МНОГОЧЛЕНА НА ОСНОВЕ ПОРЯДКА КОМПОНЕНТЫ ЕЕ ДОПОЛНЕНИЯ

В работе [23] показано, что каждой точке дополнения к амобе  $\mathcal{A}_f$  многочлена  $f$  можно сопоставить целую точку из многогранника Ньютона  $\mathcal{N}_f$  с помощью отображения порядка  $v_f$ :

$$v_f : {}^c\mathcal{A}_f \rightarrow \mathcal{N}_f \cap \mathbb{Z}^n, \quad s \mapsto (u_1, \dots, u_n),$$

где

$$u_j := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log } \mathbf{x} = s} \frac{x_j \partial_j f(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n}{f(\mathbf{x}) x_1 \dots x_n}, \quad (3.1)$$

для всех  $j = 1, \dots, n$  и  $i = \sqrt{-1}$ . Всяду в дальнейшем вектор  $v_f(\mathbf{s})$  называется *порядком точки*  $\mathbf{s} \in {}^c\mathcal{A}_f$ . Любые две точки, лежащие в одной связной компоненте дополнения к амобе многочлена  $f$ , имеют одинаковый порядок, называемый порядком этой компоненты (см. формулу (2.1) в Теореме 2); более того, порядки точек из разных компонент дополнения к амобе различны. Таким образом, порядок  $v_f(\mathbf{s})$  является классификатором точек дополнения к амобе многочлена  $f$ , позволяющим устанавливать их принадлежность к компоненте заданного порядка.

В работе [23] показано, что для  $s \in {}^c\mathcal{A}_f$  интеграл (3.1) допускает представление в следующем существенно более простом виде:

$$u_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x_j|=e^{s_j}} \frac{\partial_j f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} dx_j, \quad (3.2)$$

причем значение данного интеграла не зависит от  $\arg x_k$  при  $k \neq j$ . Поведение интеграла (3.2) в случае, когда точка  $s$  лежит внутри или на границе амобы  $\mathcal{A}_f$ , является, вообще говоря, весьма сложным. В этом случае интеграл (3.2) может оказаться расходящимся, однако в большинстве случаев он сходится, а его значение существенным образом зависит от  $\arg x_k$  для всех  $k = 1, \dots, n$ . Скачок интеграла (3.2) может быть выявлен с помощью символично-численных алгоритмов контурного интегрирования и использован в качестве критерия принадлежности точки  $\mathbf{s}$  амобе многочлена  $f$ . Данное наблюдение является основой алгоритма вычисления амоб, представленного в настоящей работе и реализованного в виде сетевого сервиса <http://amoebas.ru/>.

**Входные данные алгоритма:** размерность пространства переменных  $n \geq 2$ ; многочлен  $f(\mathbf{x})$  от  $n$  комплексных переменных  $x_1, \dots, x_n$ ; множество вершин  $\text{vert}(\Pi)$  прямоугольного параллелепипеда  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ ; малое число  $\varepsilon > 0$ , равное линейному размеру наименьшего элемента объема в  $\mathbb{R}^n$ , подлежащего проверке на предмет принадлежности амобе многочлена  $f(\mathbf{x})$ . Предполагается, что объем параллелепипеда  $\Pi$  не равен нулю, а длина по крайней мере одного из его ребер больше  $\varepsilon$ .

**Результатом работы алгоритма** является облако точек, аппроксимирующее множество  ${}^c\mathcal{A}_f \cap \Pi$  с точностью  $\varepsilon$ .

**Схема работы алгоритма** состоит в следующем. Будем обозначать через  $S(\Pi)$  конечное множество прямоугольных параллелепипедов в пространстве  $\mathbb{R}^n$  и положим на первом шаге работы алгоритма  $S(\Pi) := \{\Pi\}$ .

Пусть  $\Pi_\alpha$  – некоторый элемент множества  $S(\Pi)$ . Если длина всех его ребер меньше  $\varepsilon$ , то  $\Pi_\alpha$  исключается из множества  $S(\Pi)$  и осуществляется переход к следующему его элементу. В противном случае каждая из точек множества  $\text{vert}(\Pi_\alpha)$  проверяется на принадлежность амобе многочлена  $f(\mathbf{x})$  путем выявления скачка интеграла (3.2) по его параметрам  $\arg x_k, k \neq j$ .

Если все точки множества  $\text{vert}(\Pi_\alpha)$  лежат в одной и той же связной компоненте дополнения к амобе  $\mathcal{A}_f$ , то, в силу выпуклости и открытости любой такой компоненты, делается вывод об отсутствии точек амобы  $\mathcal{A}_f$  в  $\Pi_\alpha$ . Координаты точек  $\text{vert}(\Pi_\alpha)$  и порядок содержащей их компоненты дополнения к амобе сохраняются, и выполняется

переход к следующему элементу множества  $S(\Pi)$ . Если рассмотрены все элементы данного множества, то алгоритм завершает работу.

Если же множество  $\text{vert}(\Pi_\alpha)$  содержит точки амобы  $\mathcal{A}_f$  или точки, лежащие в разных компонентах ее дополнения, то параллелепипед  $\Pi_\alpha$  разбивается на  $2^n$  равных параллелепипедов своими  $n$  плоскостями симметрии, параллельными координатным плоскостям в  $\mathbb{R}^n$ . Эти параллелепипеды добавляются к множеству  $S(\Pi)$  и описанный выше процесс повторяется, пока не будут рассмотрены все элементы данного множества. В двумерном случае результатом выполнения данного дихотомического (по каждой размерности) процесса является аппроксимирующее амобу квадродерево, см. рис. 1.

По завершении перебора элементов множества  $S(\Pi)$  для каждого возможного значения порядка компоненты дополнения к амобе  $\mathcal{A}_f$  сформирован список точек (вершин рассмотренных параллелепипедов), лежащих в компоненте с данным порядком. Для отрисовки этой компоненты берется выпуклая оболочка всех точек из данного списка.

Блок-схема изложенного выше алгоритма представлена на рис. 2. Данный алгоритм реализован на языке программирования C# и лежит в основе вычислительного функционала сетевого сервиса <http://amoebas.ru/>. Объем связной компоненты дополнения к амобе может быть сколь угодно мал, а число таких компонент, вообще говоря, весьма сложным образом зависит от коэффициентов многочлена. Эта зависимость не является непрерывной. Например, дополнение к амобе многочлена  $x + y + \lambda xy + x^2y + xy^2$  при  $\lambda > 0$  содержит компоненту порядка (1,1) в том и только том случае, когда  $\lambda > 4$  (см. [22]). При этом площадь данной компоненты стремится к нулю при  $\lambda \rightarrow 4 +$ . В силу этих причин предложенный алгоритм не может, вообще говоря, гарантировать обнаружение связной компоненты, чей диаметр меньше величины  $\epsilon$ . Более того, мера подмножества в пространстве аргументов комплексных переменных, на котором наблюдается скачок интеграла (3.2), может быть сколь угодно мала, если степень многочлена достаточно высока, а его коэффициенты велики. Однако в некоторых классах частных случаев скорость работы предложенного алгоритма допускает оценку снизу. Например, в случае, когда  $f$  – оптимальный гипергеометрический многочлен  $n$  комплексных переменных, алгоритм позволяет не более чем за  $n2^{n-1} \text{Vol}(\Pi)(1 + 1/\epsilon)^n$  шагов, представленных на блок-схеме 2, выявить все связные компоненты дополнения к амобе  $\mathcal{A}_f$ , лежащие в параллелепи-

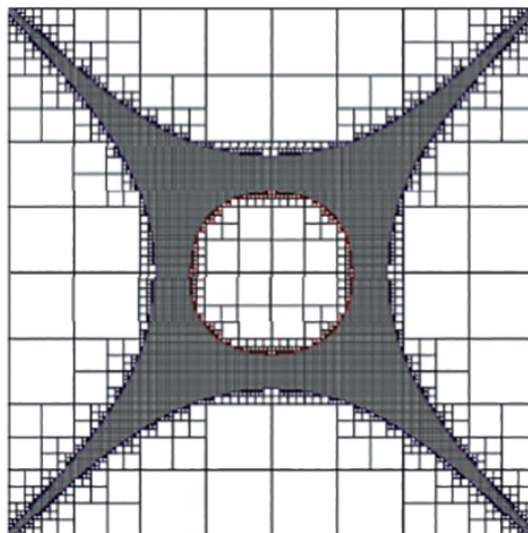


Рис. 1. Квадродерево в дополнении к амобе многочлена  $x + y + x^2y + xy^2 + 7xy$ .

пипе  $\Pi$ , и такие, что все их линейные размеры не меньше  $\epsilon$ . Данное обстоятельство является следствием строгой логарифмической выпуклости функции, определяющей коэффициенты такого многочлена, благодаря которой проверку скачка интеграла (3.2) достаточно осуществлять в двух точках в пространстве аргументов комплексных переменных многочлена  $f$ .

#### 4. СЕТЕВОЙ СЕРВИС ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ИЗОБРАЖЕНИЯ АМЕБ МНОГОЧЛЕНОВ ДВУХ И ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Визуализация амобы многочлена трех переменных достаточно высокой степени, вычисленной в виде облака точек, является в большинстве случаев концептуально и технически нетривиальной задачей ввиду сложной геометрической структуры амобы: наличия в “теле” амобы “полостей” и уходящих на бесконечность параллельных слоев, а также возможности присутствия на границе амобы подмножеств негладкости границы с труднопредсказуемой структурой. В силу этих причин в сетевом сервисе [http://amoebas.ru/amoeba\\_3d.html](http://amoebas.ru/amoeba_3d.html) визуализация амобы многочлена  $f$  трех переменных осуществляется путем отрисовки пересечений всех компонент дополнения  ${}^c\mathcal{A}_f$  с кубом  $[-a, a] \times [-a, a] \times [-a, a]$  для некоторого значения  $a > 0$ . По умолчанию все эти компоненты отрисованы полупрозрачными, при этом каждая из них может быть сделана непрозрачной путем ее выбора с помощью левой кнопки мыши. Сама же амоба  $\mathcal{A}_f$  представлена как пустое пространство между компонентами своего

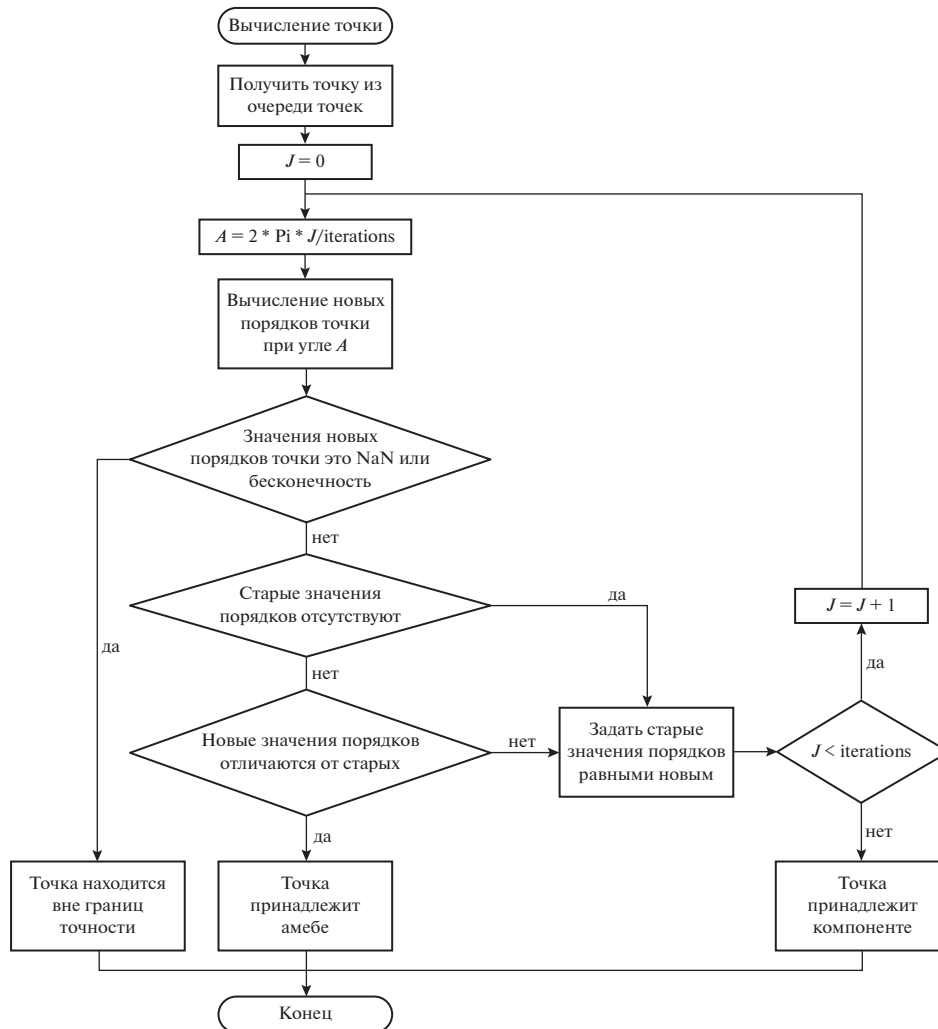


Рис. 2. Упрощенная схема работы алгоритма классификации точек пространства по принадлежности к амebe и связным компонентам ее дополнения всех возможных порядков.

дополнения. Визуализация амeb осуществляется с помощью пакета интерактивной трехмерной графики `plotly` (см. <https://plotly.com/>), обеспечивающего возможность приближения, удаления и вращения амeбы, а также движения “наблюдателя” внутри нее.

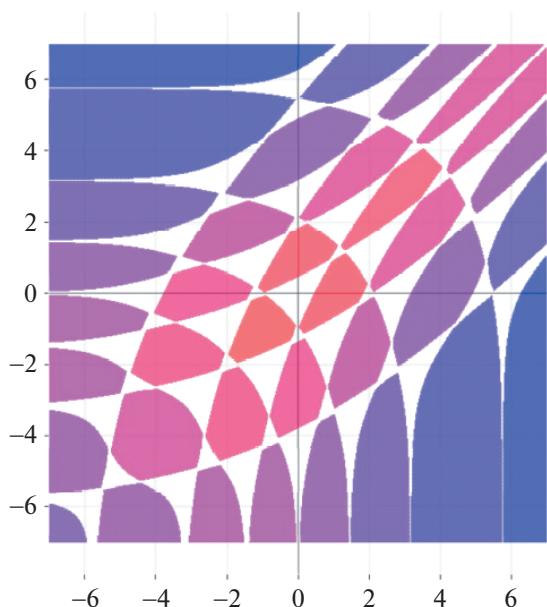
Различные компоненты дополнения к амebe окрашены в различные цвета. Длина волны, соответствующая цвету связной компоненты дополнения к амebe многочлена  $f$  двух переменных, пропорциональна евклидову расстоянию от порядка компоненты до центра тяжести многоугольника  $\mathcal{N}_f$  (см. рис. 3).

Тестирование алгоритмов вычисления амeb и оценку скорости их работы целесообразно проводить на многочленах, чьи амeбы имеют предсказуемую, но при этом достаточно сложную структуру. Для этой цели хорошо подходят т.н. оптимальные гипергеометрические многочлены

нескольких переменных [22]: число связных компонент дополнения к амebe такого многочлена является максимально возможным, то есть, совпадает с числом целых точек в его многограннике Ньютона. Для генерации оптимальных гипергеометрических многочленов от трех переменных, амeбы которых представлены на общедоступном сетевом ресурсе [http://amoebas.ru/amoeba\\_3d.html](http://amoebas.ru/amoeba_3d.html), был использован, в частности, следующий программный код в системе компьютерной алгебры `Mathematica 11.3`:

```
OptimalPolynomialSimplex[dimension_,
    degree_, power_] :=
Block[{variables, coefficient, exponents},
variables=Table[xj, {j, 1, dimension}];
coefficient[vector_] :=
(Gamma[1+degree-Total[vector]]
```

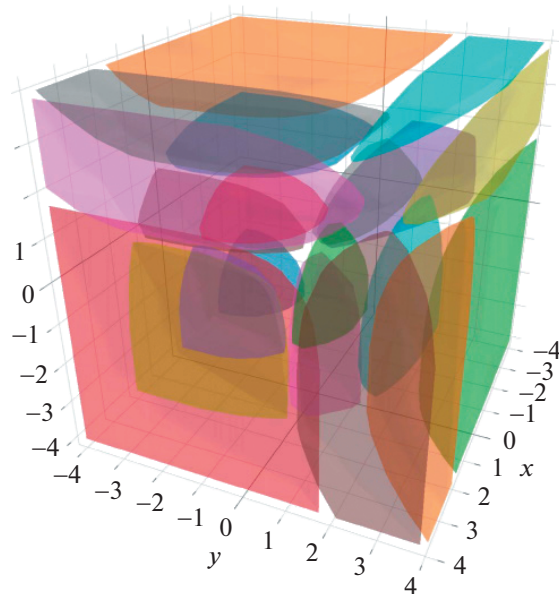




**Рис. 3.** Связные компоненты дополнения к амобе многочлена  $x^7 + 343x^6y + 343x^6 + 9261x^5y^2 + 74088x^5y + 9261x^5 + 42875x^4y^3 + 1157625x^4y^2 + 1157625x^4y + 42875x^4 + 42875x^3y^4 + 2744000x^3y^3 + 9261000x^3y^2 + 2744000x^3y + 42875x^3 + 9261x^2y^5 + 1157625x^2y^4 + 9261000x^2y^3 + 9261000x^2y^2 + 1157625x^2y + 9261x^2 + 343xy^6 + 74088xy^5 + 1157625xy^4 + 2744000xy^3 + 1157625xy^2 + 74088xy + 343x + y^7 + 343y^6 + 9261y^5 + 42875y^4 + 42875y^3 + 9261y^2 + 343y + 1$ .

```
(Times @@ Gamma[vector + 1]))^-power;
exponents=Flatten[Outer @@
(Join[List, Table[Range[0, degree],
dimension]]), dimension-1];
Factor[(coefficient /@ exponents).
(Times @@@ (variables# & /@ expo-
nents))]
```

Результатом работы функции `OptimalPolynomialSimplex` является оптимальный [22] многочлен степени `degree` с заданным числом переменных, равным `dimension`. Коэффициенты данного многочлена заданы сужением строго логарифмически вогнутой функции на множество целых точек симплекса с вершинами  $(0, 0, \dots, 0)$ ,  $(\text{degree}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \text{degree})$ . Технический параметр `power` позволяет управлять “степенью логарифмической вогнутости” коэффициентов генерируемого многочлена, отвечающей за геометрию его амобы. Непрерывная деформация амоб, соответствующая изменению данного параметра в пределах некоторых интервалов, представлена на сайте <http://amoe-bas.ru/>. Примерами многочленов, генерируе-



**Рис. 4.** Связные компоненты дополнения к амобе многочлена  $x^3 + 9x^2y + 9x^2z + 9x^2 + 9xy^2 + 36xyz + 36xy + 9xz^2 + 36xz + 9x + y^3 + 9y^2z + 9y^2 + 9yz^2 + 36yz + 9y + z^3 + 9z^2 + 9z + 1$ .

мых функций `OptimalPolynomialSimplex`, являются многочлены, чьи амобы представлены на рис. 4 и 5.

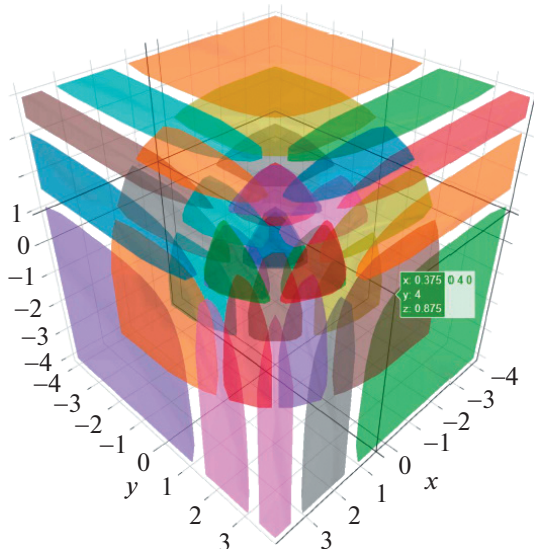
Обширный класс выпуклых многогранников, важных в многочисленных приложениях алгебраической и вычислительной геометрии, образуют зонотопы. Напомним, что под зонотопом понимается сумма Минковского конечного числа отрезков в вещественном пространстве. Следующий фрагмент программного кода на языке системы компьютерной алгебры `Mathematica 11.3` предназначен для генерации оптимального гипергеометрического многочлена с носителем в произвольном зонотопе с вершинами в узлах целочисленной решетки, заданном как сумма Минковского векторов из списка `vectors`.

```
OptimalPolyZonotope[vectors_, power_] :=
Block[{dimension, variables, crossProducts,
normals, sumsOfVectors, massCenter,
constants, coefficient, maxDegree, ex-
ponents},
dimension=Length[First[vectors]];
variables=Table[xj, {j, 1, dimension}];
crossProducts=Cross @@@ Subsets[vectors,
{dimension-1}];
normals=Join[crossProducts, -
crossProducts];
sumsOfVectors=
```

Таблица 1.

$n$	degree	power	Многочлен от $n$ комплексных переменных	Число уровней $2^n$ -дерева	Время расчета, с.
2	2	2	$x^2 + 4xy + 4x + y^2 + 4y + 1$	9	10.79
2	3	2	$x^3 + 9x^2y + 9x^2 + 9xy^2 + 36xy + 9x + y^3 + 9y^2 + 9y + 1$	9	29.46
2	4	2	$x^4 + 16x^3y + 16x^3 + 36x^2y^2 + 144x^2y + 36x^2 + 16xy^3 + 144xy^2 + 144xy + 16x + y^4 + 16y^3 + 36y^2 + 16y + 1$	9	61.30
2	5	2	$x^5 + 25x^4y + 25x^4 + 100x^3y^2 + 400x^3y + 100x^3 + 100x^2y^3 + 900x^2y^2 + 900x^2y + 100x^2 + 25xy^4 + 400xy^3 + 900xy^2 + 400xy + 25x + y^5 + 25y^4 + 100y^3 + 100y^2 + 25y + 1$	9	106.66
3	2	2	$x^2 + 4xy + 4xz + 4x + y^2 + 4yz + 4y + z^2 + 4z + 1$	7	202.52
3	6	1	$2x^2y^2z^2 + x^2y^2z + x^2yz^2 + 2x^2yz + xy^2z^2 + 2xy^2z + 2xyz^2 + 16xyz + 2xy + 2xz + x + 2yz + y + z + 2$	7	268.14
3	3	2	$x^3 + 9x^2y + 9x^2z + 9x^2 + 9xy^2 + 36xyz + 36xy + 9xz^2 + 36xz + 9x + y^3 + 9y^2z + 9y^2 + 9yz^2 + 36yz + 9y + z^3 + 9z^2 + 9z + 1$	7	460.32
3	4	2	$x^4 + 16x^3y + 16x^3z + 16x^3 + 36x^2y^2 + 144x^2yz + 144x^2y + 36x^2z^2 + 144x^2z + 36x^2 + 16xy^3 + 144xy^2z + 144xy^2 + 144xyz^2 + 576xyz + 144xy + 16xz^3 + 144xz^2 + 144xz + 16x + y^4 + 16y^3z + 16y^3 + 36y^2z^2 + 144y^2z + 36y^2 + 16yz^3 + 144yz^2 + 144yz + 16y + z^4 + 16z^3 + 36z^2 + 16z + 1$	7	894.35
3	5	2	$x^5 + 25x^4y + 25x^4z + 25x^4 + 100x^3y^2 + 400x^3yz + 400x^3y + 100x^3z^2 + 400x^3z + 100x^3 + 100x^2y^3 + 900x^2y^2z + 900x^2y^2 + 900x^2yz^2 + 3600x^2yz + 900x^2y + 100x^2z^3 + 900x^2z^2 + 900x^2z + 100x^2 + 25xy^4 + 400xy^3z + 400xy^3 + 900xy^2z^2 + 3600xy^2z + 900xy^2 + 400xyz^3 + 3600xyz^2 + 3600xyz + 400xy + 25xz^4 + 400xz^3 + 900xz^2 + 400xz + 25x + y^5 + 25y^4z + 25y^4 + 100y^3z^2 + 400y^3z + 100y^3 + 100y^2z^3 + 900y^2z^2 + 900y^2z + 100y^2 + 25yz^4 + 400yz^3 + 900yz^2 + 400yz + 25y + z^5 + 25z^4 + 100z^3 + 100z^2 + 25z + 1$	7	1558.12
4	2	2	$w^2 + 4wx + 4wy + 4wz + 4w + x^2 + 4xy + 4xz + 4x + y^2 + 4yz + 4y + z^2 + 4z + 1$	5	1438.40
4	3	2	$w^3 + 9w^2x + 9w^2y + 9w^2z + 9w^2 + 9wx^2 + 36wxu + 36wxz + 36wx + 9wy^2 + 36wyz + 36wy + 9wz^2 + 36wz + 9w + x^3 + 9x^2y + 9x^2z + 9x^2 + 9xy^2 + 36xyz + 36xy + 9xz^2 + 36xz + 9x + y^3 + 9y^2z + 9y^2 + 9yz^2 + 36yz + 9y + z^3 + 9z^2 + 9z + 1$	5	4574.97





**Рис. 5.** Связные компоненты дополнения к амобе многочлена  $x^4 + 16x^3y + 16x^3z + 16x^3 + 36x^2y^2 + 144x^2yz + 144x^2y + 36x^2z^2 + 144x^2z + 36x^2 + 16xy^3 + 144xy^2z + 144xy^2 + 144xyz^2 + 576xyz + 144xy + 16xz^3 + 144xz^2 + 144xz + 16x + y^4 + 16y^3z + 16y^3 + 36y^2z^2 + 144y^2z + 36y^2 + 16yz^3 + 144yz^2 + 144yz + 16y + z^4 + 16z^3 + 36z^2 + 16z + 1$ .

```
Join[Table[0, dimension], Union[Total /@
Drop[Subsets[vectors], 1]]];
massCenter=
Total[sumsOfVectors]/Length[sumsOf
Vectors];
distanceFromSideToMassCenter[side-
Normal_] :=
Max[Norm /@ ((#.sideNormal)
sideNormal/Norm[sideNormal]^2 & /@
(# - massCenter & /@ sumsOfVec-
tors))];
constants=
distanceFromSideToMassCen-
ter[#]Norm[#] & /@ normals;
coefficient[vec_] :=
Simplify[(Times @@ Gamma /@
(1+constants + ((vec+massCen-
ter).# & /@
normals))^-power];
maxDegree=Abs[Max[Max /@ (Total /@
Subsets[vectors])]];
exponents=
Flatten[Outer@@(Join[List,
Table[Range[-maxDegree, maxDegree],
```

```
dimension]]), dimension-1];
Numerator[
Factor[
(coefficient /@ exponents).
(Times @@@ (variables^# & /@ expo-
nents))
]]]
]]]
```

Результаты расчета и визуализации амоб оптимальных гипергеометрических многочленов с носителями в зонотопах представлены на сайте <http://amoebas.ru/>. Таблица 1 содержит данные о скорости расчета амоб многочленов двух, трех и четырех переменных, генерируемых с помощью приведенного выше программного кода, для различных значений размерности (dimension), степени многочлена (degree), степени логарифмической вогнутости его коэффициента (power) и числа уровней квадродерева, с помощью которого аппроксимируется амоба. Расчеты выполнялись на компьютере с центральным процессором Intel Xeon Gold 6146 с тактовой частотой 3.20 ГГц и 128 Гб оперативной памяти.

## 5. ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда № 22-21-00556, <https://rscf.ru/project/22-21-00556/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Лорановы, рациональные и гипергеометрические решения линейных  $q$ -разностных систем произвольного порядка с полиномиальными коэффициентами // Программирование, 2018, No 2. С. 60–73.
2. *Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V.* Discriminants, resultants, and multidimensional determinants. Birkhäuser, 1994.
3. *Viro O.* What is an amoeba? // Notices of the AMS. 2002. V. 49. Issue 8. P. 916–917.
4. *Cherkis S.A., Ward R.S.* Moduli of monopole walls and amoebas // J. High Energy Physics. 2012. Issue 5. 90.
5. *Fujimori T., Nitta M., Ohta K., Sakai N., Yamazaki M.* Intersecting solitons, amoeba, and tropical geometry // Physical Review D – Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology. 2008. V. 78. Issue 10. 105004.
6. *Kenyon R., Okounkov A., Sheffield S.* Dimers and amoebae // Ann. Math. 2006. V. 163. P. 1019–1056.
7. *Passare M., Pochekutov D., Tsikh A.* Amoebas of complex hypersurfaces in statistical thermodynamics // Mathem. Physics, Analysis, and Geometry. 2013. V. 16. Issue 1. P. 89–108.
8. *Zahabi A.* Quiver asymptotics and amoeba: Instantons on toric Calabi–Yau divisors // Physical Review D. 2021. V. 103. Issue 8. 086024.
9. *Maeda T., Nakatsu T.* Amoebas and instantons // International Journal of Modern Physics A. 2007. V. 22. Issue 5. P. 937–983.

10. *Mikhalkin G.* Real algebraic curves, the moment map and amoebas // *Ann. Math.* 2000. V. 151. Issue 2. P. 309–326.
11. *Forsberg M.* Amoebas and Laurent series. 1998. Doctoral thesis presented at Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm. ISBN 91-7170-259-8.
12. *Leksell M., Komorowski W.* Amoeba Program: Computing and visualizing amoebas for some complex-valued bivariate expressions // <http://qrf.servequake.com/amoeba/AmoebaProgram.pdf>
13. *Rullgård H.* Topics in geometry, analysis, and inverse problems. 2003. Doctoral thesis presented at Stockholm University. ISBN 91-7265-738-3. <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:190169/FULLTEXT01.pdf>
14. *Theobald T.* Computing amoebas // *Experimental Math.* 2002. V. 11. Issue 4. P. 513–526.
15. *Timme S.* A package to compute amoebas in 2 and 3 variables // <https://github.com/saschatimme/PolynomialAmoebas.jl>
16. *Theobald T., De Wolff T.* Approximating amoebas and coamoebas by sums of squares // *Math. of Computation.* 2015. V. 84(291). P. 455–473.
17. *Purbhoo K.* A Nullstellensatz for amoebas // *Duke Math. J.* 2008. V. 141. Issue 3. P. 407–445.
18. *Forsgård J., Matusevich L.F., Mehlhop N., De Wolff T.* Lopsided approximation of amoebas // *Math. of Computation.* 2018. V. 88. P. 485–500.
19. *Anthony E., Grant S., Gritzmann P., Rojas J.M.* Polynomial-time amoeba neighborhood membership and faster localized solving // *Mathematics and Visualization.* 2015. V. 38. P. 255–277.
20. *Bogdanov D.V., Kytmanov A.A., Sadykov T.M.* Algorithmic computation of polynomial amoebas // *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics).* 2016. V. 9890. P. 87–100.
21. *Nisse M., Sadykov T.M.* Amoeba-shaped polyhedral complex of an algebraic hypersurface // *J. Geom. Analysis.* 2019. V. 29. Issue 2. P. 1356–1368.
22. *Bogdanov D.V., Sadykov T.M.* Hypergeometric polynomials are optimal // *Math. Z.* 2020. V. 296. Issue 1–2. P. 373–390.
23. *Forsberg M., Passare M., Tsikh A.K.* Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // *Adv. Math.* 2000. V. 151. P. 45–70.
24. *Klausen R.P.* Kinematic singularities of Feynman integrals and principal A-determinants // *J. High Energy Physics.* 2022. Issue. 2. 4.