

УДК 519.85

СИМВОЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ НУЛЕЙ СИСТЕМЫ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2023 г. В. И. Кузоватов^{a,*}, А. А. Кытманов^{b,c,**}, Е. К. Мышкина^{d,***}^aСибирский федеральный университет

660041 Красноярск, пр. Свободный, 79, Россия

^bМИРЭА — Российский технологический университет

119454 Москва, пр. Вернадского, 78, Россия

^cУчебно-научная лаборатория искусственного интеллекта, нейротехнологий и бизнес-аналитики,

Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

117997 Москва, Стремянный пер., 36, Россия

^dИнститут вычислительного моделирования СО РАН

660036 Красноярск, Академгородок, 50/44, Россия

*E-mail: kuzovатов@yandex.ru

**E-mail: aakyt@gmail.com

***E-mail: elfifenok@mail.ru

Поступила в редакцию 28.08.2022 г.

После доработки 13.10.2022 г.

Принята к публикации 30.10.2022 г.

На основе интегрального представления Бохнера–Мартинелли приведен алгоритм, позволяющий определять число нулей системы голоморфных функций. Нули системы функций ищутся на множестве поликуба. Использование методов компьютерной алгебры в данной задаче обусловлено вычислительной сложностью разрабатываемых алгоритмов и получаемых результатов. Дана реализация данного алгоритма в системе компьютерной алгебры Maple, позволяющая существенно упростить необходимые вычисления.

DOI: 10.31857/S0132347423020139, EDN: MGDМНW

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию систем неалгебраических уравнений в \mathbb{C}^n . Такие системы возникают при описании нелинейных процессов в различных областях знания, таких как теоретическая физика, химическая кинетика (включая задачи, возникающие при описании процессов в нефтегазовой промышленности, а также при изучении кинетики химических превращений композитов на основе горных пород), математическая биология. На данный момент системы неалгебраических уравнений, как правило, поддаются решению лишь в случае, когда их можно свести к алгебраическим с помощью замены переменных. В противном случае поиск решения производится приближенно с помощью численных методов [1].

Вместе с тем, в различных процессах, описываемых системами дифференциальных уравнений с правыми частями, разложимыми в ряд Тейлора, актуален вопрос об определении числа стационарных состояний в множествах определенного вида (и их локализации). Эта проблема приводит к задачам

построения алгоритмов для определения числа корней заданной системы уравнений в разных множествах, определения самих корней, исключения части неизвестных из системы.

Научная значимость данной работы связана с определением нового подхода к итерационным методам решения систем трансцендентных уравнений, состоящих из голоморфных функций многих комплексных переменных. Полученные результаты позволят расширить области применения методов и алгоритмов компьютерной алгебры на нелинейные уравнения неполиномиального типа. В связи с этим решение поставленных в данной работе задач важно для развития данного направления науки.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть D — ограниченная область в \mathbb{C}^2 с кусочно-гладкой границей ∂D , а $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}^2$ голоморфное отображение, $f|_{\partial D} \neq 0$.

Известно обобщение теоремы о логарифмическом вычете на случай многих переменных на основе интегрального представления Бохнера–Мартинелли (см., например, [2, теорема 2.4]):

$$\int_{\partial D} w(f, \bar{f}) = N, \quad (1)$$

где N – число нулей отображения f в D с учетом кратности, а

$$w(f, \bar{f}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{\bar{f}_1 df_2 - \bar{f}_2 df_1}{(|f_1|^2 + |f_2|^2)^2} \wedge df_1 \wedge df_2.$$

Рассмотрим случай, когда D – поликуб, то есть произведение отрезков

$$[a, b] \times [\alpha, \beta] \times [c, d] \times [\gamma, \delta] \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4.$$

Перейдем к вещественным координатам

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1, \\ z_2 = x_2 + iy_2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} a \leq x_1 \leq b, \quad \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ c \leq x_2 \leq d, \quad \gamma \leq y_2 \leq \delta. \end{aligned} \quad (2)$$

Запишем форму w в вещественных координатах. Будем иметь

$$\begin{aligned} w = & -\frac{2}{(2\pi i)^2} \frac{\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} \frac{\partial f_2}{\partial z_2} - \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \right)}{(|f_1|^2 + |f_2|^2)^2} \times \\ & \times \left[\left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \right) \times \right. \\ & \times (dx_1 \wedge dy_1 \wedge dy_2 + idx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1) + \\ & \left. + \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \right) \times \right. \\ & \left. \times (dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 + idx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2) \right]. \end{aligned}$$

Для удобства записи введем следующие обозначения. Обозначим через J якобиан отображения f , через $|f|^2$ – квадрат евклидовой нормы. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \frac{\partial f_2}{\partial z_2} - \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \frac{\partial f_2}{\partial z_1} &= J, \\ |f_1|^2 + |f_2|^2 &= |f|^2, \\ \frac{f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z_1}}{|f|^2} &= A, \\ \frac{f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z_2}}{|f|^2} &= B. \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом введенных обозначений форму w можно записать в виде

$$\begin{aligned} w = & -\frac{2}{(2\pi i)^2} \frac{J}{|f|^4} \times \\ & \times [A(dx_1 \wedge dy_1 \wedge dy_2 + idx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1) + \\ & + B(dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 + idx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Для сведения интеграла (1) к интегралу Римана по гиперграням нужно выбрать их правильную ориентацию. Ориентация на многообразии задается (см., например, [3], глава II, п. 14) указанием дифференциальной формы максимальной степени, которая сопоставляется элементу объема dV при интегрировании. Ориентация $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, как и гиперкуба $D \subset \mathbb{C}^2$, традиционно задается формой

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2.$$

Согласованная с ней ориентация (в соответствии с [3], глава II, п. 14) граней следующая:

$$x_1 = a \quad : -dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2$$

$$x_1 = b \quad : dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2$$

$$x_2 = c \quad : dx_1 \wedge dy_1 \wedge dy_2$$

$$x_2 = d \quad : -dx_1 \wedge dy_1 \wedge dy_2$$

$$y_1 = \alpha \quad : -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2$$

$$y_1 = \beta \quad : dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2$$

$$y_2 = \gamma \quad : dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1$$

$$y_2 = \delta \quad : -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1.$$

Интеграл (1) есть сумма интегралов по правильно ориентированным гиперграням. При этом имеется 4 пары гиперграней.

Рассмотрим для примера пару гиперграней, задаваемых условиями $x_1 = a$ и $x_1 = b$. В этом случае 3 из 4 дифференциальных форм в выражении (3) обращаются в нуль и форма w примет вид

$$w = -\frac{2}{(2\pi i)^2} \frac{J}{|f|^4} B dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2.$$

Форма $dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2$ на $x_1 = a$ отрицательна, а на $x_1 = b$ – положительна. Поэтому

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_1=a} w + \int_{x_1=b} w = \\ &= \frac{2}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{x_1=a, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{J}{|f|^4} B dV - \frac{2}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{x_1=b, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{J}{|f|^4} B dV = \end{aligned} \quad (4)$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{J}{|f|^4} B \Big|_{x_1=b}^{x_1=a} dV.$$

Аналогично, получим следующие результаты для остальных пар гиперграней:

$$I_2 = \int_{x_2=c} w + \int_{x_2=d} w = \frac{2}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{J}{|f|^4} A \Big|_{x_2=c}^{x_2=d} dV, \quad (5)$$

$$I_3 = \int_{y_1=\alpha} w + \int_{y_1=\beta} w = \frac{2i}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{J}{|f|^4} B \Big|_{y_1=\beta}^{y_1=\alpha} dV, \quad (6)$$

$$I_4 = \int_{y_2=\gamma} w + \int_{y_2=\delta} w = \frac{2i}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta}} \frac{J}{|f|^4} A \Big|_{y_2=\gamma}^{y_2=\delta} dV. \quad (7)$$

Тем самым мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Пусть D – поликуб, то есть произведение отрезков $[a, b] \times [\alpha, \beta] \times [c, d] \times [\gamma, \delta] \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, $a, f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}^2$ голоморфное отображение, $f|_{\partial D} \neq 0$. Тогда количество N нулей системы

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

на множестве D численно равно сумме значений интегралов (4)–(7). При этом интегралы (4)–(7) являются интегралами Римана, в которых переменные интегрирования изменяются от меньшего значения к большему.

Заметим, что сумма интегралов (4)–(7) должна быть целым числом. Это означает, что для приближенного вычисления этих интегралов большая точность не требуется.

При наличии корней в поликубе D (то есть если указанная сумма интегралов не равна нулю), он разбивается на несколько поликубов меньшего размера, и вычисления повторяются в каждом из них для локализации корней. Алгоритм останавливается при достижении необходимой точности.

3. ПРИМЕР

Пусть $f_1 = z_1, f_2 = z_2$, то есть рассмотрим количество N нулей системы

$$\begin{cases} z_1 = 0, \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

в области $D = [-1; 1] \times [-1; 1] \times [-1; 1] \times [-1; 1]$. Очевидно, что единственным решением данной системы является точка $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ и $N = 1$. Покажем это с помощью теории, изложенной выше. Такой выбор функций f_1 и f_2 объясняется необходимостью упрощения выкладок.

Вычислим необходимые величины. Будем иметь:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z_2} = 1,$$

$$J = \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \frac{\partial f_2}{\partial z_2} - \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \frac{\partial f_2}{\partial z_1} = 1,$$

$$|f|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2,$$

$$A = f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} = -\bar{z}_2 = -x_2 + iy_2,$$

$$B = f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = \bar{z}_1 = x_1 - iy_1.$$

Вычислим интегралы по гиперграням $x_1 = a$ и $x_1 = b$, при этом $a = -1, b = 1$. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{J}{|f|^4} B \Big|_{x_1=b}^{x_1=a} dV = \\ &= \frac{2}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{(x_1 - iy_1)}{(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2} \Big|_{x_1=b}^{x_1=a} dV = \\ &= \frac{2}{(2\pi i)^2} \iiint_{\substack{c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \left(\frac{a - iy_1}{(a^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{b - iy_1}{(b^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2} \right) dV = \\ &= \frac{2}{(2\pi i)^2} \iiint_{\substack{c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{a - b}{(1 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2} dV = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 dx_2 \int_{-1}^1 dy_1 \int_{-1}^1 \frac{dy_2}{(1 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Вычислим далее интегралы по гиперграням $x_2 = c$ и $x_2 = d$, при этом $c = -1, d = 1$. Получим

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{J}{|f|^4} A \Big|_{x_2=c}^{x_2=d} dV = \\
&= \frac{2}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{(-x_2 + iy_2)}{(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2} \Big|_{x_2=c}^{x_2=d} dV = \\
&= \frac{2}{(2\pi i)^2} \iiint_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \left(\frac{-d + iy_2}{(x_1^2 + y_1^2 + d^2 + y_2^2)^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(-c + iy_2)}{(x_1^2 + y_1^2 + c^2 + y_2^2)^2} \right) dV = \\
&= \frac{2}{(2\pi i)^2} \iiint_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{c - d}{(x_1^2 + y_1^2 + 1 + y_2^2)^2} dV = \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-1}^1 dy_1 \int_{-1}^1 \frac{dy_2}{(1 + x_1^2 + y_1^2 + y_2^2)^2}.
\end{aligned}$$

Вычислим далее интегралы по гиперграням $y_1 = \alpha$ и $y_1 = \beta$, при этом $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Получим

$$\begin{aligned}
& \frac{2i}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{J}{|f|^4} B \Big|_{y_1=\beta}^{y_1=\alpha} dV = \\
&= \frac{2i}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{(x_1 - iy_1)}{(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2} \Big|_{y_1=\beta}^{y_1=\alpha} dV = \\
&= \frac{2i}{(2\pi i)^2} \iiint_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \left(\frac{x_1 - i\alpha}{(x_1^2 + \alpha^2 + x_2^2 + y_2^2)^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{x_1 - i\beta}{(x_1^2 + \beta^2 + x_2^2 + y_2^2)^2} \right) dV = \\
&= \frac{2i}{(2\pi i)^2} \iiint_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} \frac{i(\beta - \alpha)}{(1 + x_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2} dV = \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-1}^1 dx_2 \int_{-1}^1 \frac{dy_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2}.
\end{aligned}$$

Нам осталось вычислить последние интегралы по гиперграням $y_2 = \gamma$ и $y_2 = \delta$, при этом $\gamma = -1$, $\delta = 1$. Получим

$$\begin{aligned}
& \frac{2i}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta}} \frac{J}{|f|^4} A \Big|_{y_2=\gamma}^{y_2=\delta} dV = \\
&= \frac{2i}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta}} \frac{(-x_2 + iy_2)}{(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2} \Big|_{y_2=\gamma}^{y_2=\delta} dV = \\
&= \frac{2i}{(2\pi i)^2} \iiint_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta}} \left(\frac{(-x_2 + i\delta)}{(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + \delta^2)^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(-x_2 + i\gamma)}{(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + \gamma^2)^2} \right) dV = \\
&= \frac{2i}{(2\pi i)^2} \iiint_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta}} \frac{i(\delta - \gamma)}{(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + 1)^2} dV = \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-1}^1 dy_1 \int_{-1}^1 \frac{dx_2}{(1 + x_1^2 + y_1^2 + x_2^2)^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, количество N нулей искомой системы равно

$$N = \frac{4}{\pi^2} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 \frac{dw}{(1 + u^2 + v^2 + w^2)^2}.$$

Очевидно, что даже в таком простом случае системы, как в рассмотренном нами примере, необходима помощь вычислительных процедур.

4. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Алгоритм был реализован в среде Maple 2016 64bit. Полный код программы доступен по адресу <https://github.com/aakytmanov/Zeros>. Вычисления первого шага алгоритма производились на машине Intel Core i7-4790 (3.6 GHz) с 32 Gb RAM под управлением Windows 10 Pro x64 21H1. Время счета для системы функций

$$f_1 = z_1, \quad f_2 = z_2$$

составило 53 секунды.

Вызов функции для данного примера приведен ниже:

```
> fZeros([(z1, z2) -> z1, (z1, z2) -> z2],
[-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]);
```

Реализация итерационной процедуры позволит приближенно находить корни системы уравнений, содержащей голоморфные функции, в за-

данном поликубе, однако она требует оптимизации приближенного вычисления интегралов с учетом отсутствия необходимости большой точности вычислений, поскольку результатом интегрирования всегда является целое число. Это является актуальной текущей задачей.

Алгоритм 1: Алгоритм вычисления числа нулей системы в заданной области.

Input: Список функций $f_i(z)$ из левой части системы (8), список пределов интегрирования $a, b, \alpha, \beta, c, d, \gamma, \delta$ из (2), определяющих поликуб.

Output: Значение интеграла (1).

begin

$$f_1(z_1, z_2) \rightarrow u_1(x_1, y_1, x_2, y_2) + iv_1(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

$$f_2(z_1, z_2) \rightarrow u_2(x_1, y_1, x_2, y_2) + iv_2(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

$$|f|^4 := (f_1 \bar{f}_1 + f_2 \bar{f}_2)^2$$

$$J := \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \frac{\partial f_2}{\partial z_2} - \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \frac{\partial f_2}{\partial z_1}$$

$$A := f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z_1}$$

$$B := f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z_2}$$

$$I_{x_1} := \frac{J}{|f|^4} B \Big|_{x_1=b}^{x_1=a}$$

$$I_{x_2} := \frac{J}{|f|^4} A \Big|_{x_2=c}^{x_2=d}$$

$$I_{y_1} := \frac{J}{|f|^4} B \Big|_{y_1=\beta}^{y_1=\alpha}$$

$$I_{y_2} := \frac{J}{|f|^4} A \Big|_{y_2=\gamma}^{y_2=\delta}$$

$$I_1 := \frac{2}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_2 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} I_{x_1} dV$$

$$I_2 := \frac{2}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} I_{x_2} dV$$

$$I_3 := \frac{2i}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \gamma \leq y_2 \leq \delta}} I_{y_1} dV$$

$$I_4 := \frac{2i}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{a \leq x_1 \leq b, \\ c \leq x_2 \leq d, \\ \alpha \leq y_1 \leq \beta}} I_{y_2} dV$$

$$I := I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Return I

5. ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования, представленные в работе, были выполнены при поддержке следующих фондов: первый автор использовал финансовую поддержку РНФ, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки, грант 22-21-20028 (разработка примеров, тестирование программной реализации алгоритма); второй автор использовал финансовую поддержку РНФ, грант 18-71-10007-П (разработка и программная реализация алгоритма); третий автор поддержан грантом РФФИ 19-31-60012 (постановка технического задания для разработки алгоритма, вычисление примеров).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
2. *Айзенберг Л.А., Южаков А.П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
3. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных. Ч. 2. СПб.: Лань, 2004.