ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2023, № 1, с. 61–68

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 519.688

ПАКЕТ ПРОЦЕДУР И ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ И ОБРАЩЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ЕДИНИЧНЫМ ЯКОБИАНОМ

Т. М. Садыков[a],* (ORCID: 0000-0003-0741-2318)

[a] *Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, 117997 Москва, Стремянный пер., 36, Россия*

**E-mail: Sadykov.TM@rea.ru*

Поступила в редакцию 19.05.2022 г.
После доработки 01.08.2022 г.
Принята к публикации 22.08.2022 г.

Множество полиномиальных отображений из n-мерного комплексного пространства в себя с постоянным ненулевым определителем матрицы Якоби является необозримо обширным для любой размерности $n > 1$. Известная гипотеза о якобиане утверждает, что любое такое отображение является полиномиально обратимым. В то время как вычисление определителя матрицы Якоби хорошо реализовано в современных системах компьютерной алгебры, обращение полиномиального отображения представляет собой задачу весьма высокой вычислительной сложности. В работе представлен пакет процедур и функций `JC` на языке программирования `Wolfram` для алгоритмического построения и обращения полиномиальных и некоторых более общих аналитических отображений с единичным определителем матрицы Якоби для заданной размерности пространства переменных и заданной степени компонент отображения. Программный код, наборы данных для его тестирования и результаты вычислительных экспериментов размещены в свободном доступе по адресу `https://www.researchgate.net/publication/358409332_JC_Package_and_Datasets`.

DOI: 10.31857/S0132347423010077, **EDN:** GSGRBF

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ – аналитическое отображение с n комплексными переменными $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, заданное в непустой области $D \subset \mathbb{C}^n$. Будем называть отображение f *якобиевым,* если определитель его матрицы Якоби есть ненулевая постоянная:

$$J(f;x)J(f_1,\ldots,f_n;x_1,\ldots,x_n) := \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \in \in \mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C}\backslash\{0\}. \qquad (1.1)$$

В настоящей работе этот определитель называется *якобианом отображения f.*

Обращением отображения f называется аналитическое отображение $f^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, такое, что $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$ в некоторой непустой области в пространстве $\mathbb{C}^n$. Область, в которой имеют место данные равенства, вообще говоря, существенным и сложным образом зависит от отображения f и области D. Все рассматриваемые в настоящей работе отображения задаются либо целыми функциями, либо функциями, допускающими аналитическое продолжение во все n-мерное комплексное пространство, за исключением некоторой особой гиперповерхности $\mathcal{H}$. Согласно теореме единственности для аналитических функций любое такое отображение (вообще говоря, многозначное) определяется любым своим ростком в окрестности произвольной неособой точки, который может быть аналитически продолжен в $\mathbb{C}^n \backslash \mathcal{H}$.

Разработка методов и алгоритмов для поиска решений уравнений и их систем различного типа в заданных классах функций (в частности, в кольце многочленов или в поле рациональных функций над заданными числовыми полями) представляет собой актуальную задачу современной компьютерной алгебры [1]. В настоящей работе представлен пакет процедур и функций `JC` на языке программирования `Wolfram` для алгоритмического построения и обращения полиномиальных и некоторых более общих аналитических отображений с постоянным ненулевым определителем матрицы Якоби для заданной размерности пространства переменных и заданной степени компонент отображения.

В одномерном случае (то есть, при $n = 1$) любое отображение, удовлетворяющее равенству (1.1), является аффинным, то есть, имеет вид $ax + b$ для некоторых $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. Обратное к нему отображение также аффинно. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что $n \geq 2$.

Известная гипотеза о якобиане, остающаяся открытой на протяжении длительного времени (см. [7]), утверждает, что отображение $f = (f_1, \ldots, f_n)$, заданное многочленами $f_j \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, является якобиевым в том и только том случае, когда обратное к нему отображение также является полиномиальным. В любой размерности $n \geq 2$ семейство всех полиномиальных отображений $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ с единичным якобианом чрезвычайно обширно и обладает весьма сложной структурой (см. [3], главы 3.5, [8] и ссылки на литературу в этих работах). Построение полиномиальных автоморфизмов заданного пространства — важное направление исследований, которому посвящены многочисленные работы, в частности, [4–6, 10].

Многочисленность безрезультатных попыток доказать гипотезу о якобиане или построить контрпример к ней, предпринимавшихся на протяжении более чем восьми десятилетий, обуславливает необходимость систематического изучения множества отображений с единичным якобианом в произвольной размерности с помощью методов и технических средств современной компьютерной алгебры. В настоящей работе представлен один из возможных подходов к разработке программного обеспечения для решения этой задачи на основе алгоритмического поиска параметризаций семейств якобиевых отображений.

Согласно фундаментальной теореме Дружковского [2] для обоснования или опровержения гипотезы о якобиане достаточно изучить ее истинность в весьма частном случае кубических отображений вида

$$\left\{(f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad f_j(x) = x_j + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k\right)^3, \ j = 1, \ldots, n\right\}. \tag{1.2}$$

Здесь (a_{jk}) — квадратная матрица размера n с комплексными элементами.

В настоящей работе изучается более широкое семейство аналитических отображений, каждое из которых задается выбором квадратной матрицы $A = (a_{jk})$ размера $n \geq 2$ и функции одного комплексного переменного $\varphi(\zeta) \in \mathcal{O}(\Omega)$, аналитической в непустой области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Данное семейство состоит из отображений вида

$$\begin{gathered} f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \\ f[A, \varphi](x) := x + \varphi(Ax) \end{gathered} \tag{1.3}$$

с координатами

$$f_j : x \mapsto x_j + \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k\right), \quad j = 1, \ldots, n,$$

якобиан которых тождественно равен ненулевой постоянной для всех x из пересечения областей определения функций $f_j(x)$. В частном случае, когда $\varphi(\zeta) = \zeta^3$, отображение (1.3) является отображением Дружковского (1.2).

При изучении отображений вида (1.3) достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда линейная часть функции $\varphi(\cdot)$ равна нулю. В этом случае линейная часть отображения (1.3) задается единичной матрицей и оно может быть якобиевым лишь в том случае, если его якобиан тождественно равен единице. Всюду в дальнейшем мы будем говорить, что матрица A и аналитическая функция $\varphi(\zeta)$, определяющие в совокупности отображение (1.3) с единичным якобианом, образуют *хорошую пару*. Процедуры и функции пакета JC позволяют вычислять хорошие пары матриц и функций, исследовать их свойства и, при некоторых дополнительных условиях, обращать определяемые ими аналитические отображения вида (1.3).

Пусть U — квадратная матрица, такая, что якобиан отображения $f[U, \varphi](x)$ есть ненулевая постоянная для любого x из области определения и, вдобавок, для произвольной аналитической функции $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$. Всюду в дальнейшем матрицы, обладающие данным свойством, будут называться *универсальными*.

Многочисленные компьютерные эксперименты с помощью процедур и функций пакета JC позволяют предполагать, что универсальная матрица размера n задается выбором целочисленного разбиения $p = (p_1, \ldots, p_m)$ размерности n на m слагаемых и перестановкой длины m однозначно с точностью до перестановочного подобия матриц и выбора значений алгебраически независимых комплексных параметров.

В настоящей работе действие аналитической функции одного переменного $\varphi(\cdot) \in \mathcal{O}(\Omega)$ на векторе комплексных переменных $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Omega \times \ldots \times \Omega \subset \mathbb{C}^n$ определяется покоординатным образом: $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) := (\varphi(\xi_1), \ldots, \varphi(\xi_n))$. Для всех $d = 2, 3, \ldots$ существует n-параметрическое семейство квадратных матриц $H(s), s \in \mathbb{C}^n$, таких, что для произвольной универсальной матрицы U отображение $x + ((U \odot H(s))x)^d$, определенное произведением Адамара (то есть, поэлементным произведением) $U \odot H(s)$, является якобиевым.

Любое такое отображение является полиномиально обратимым, а обратное к нему отображение может быть построено с помощью рекуррентного процесса. В настоящей работе якобиевы отображения исследуются с помощью алгоритмов, реализованных в пакете процедур и функций `JC`.

Все рассмотренные в настоящей работе полиномиальные отображения являются полиномиально обратимыми. Более того, для любой универсальной матрицы U и произвольной аналитической функции $\varphi(\zeta)$ обращение отображения $f[U,\varphi]$ есть конечная суперпозиция $\varphi(\zeta)$ и арифметических операций с аргументами $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ (ср. с основным результатом работы [9]). Однако, обращение якобиева отображения $x + \varphi(Ax)$, заданного аналитической функцией $\varphi(\zeta)$ и не универсальной матрицей A, не обладает, вообще говоря, этим свойством. С помощью функций пакета `JC` в настоящей работе построен пример якобиева отображения вида $f[A, \ln](x) := := x + \ln(Ax)$, заданного матрицей Тёплица A, для которого обратное отображение $f[A,\ln]^{-1}$ не допускает представления в виде конечной суперпозиции логарифмической функции и арифметических операций (см. раздел 4.3).

2. ЯКОБИЕВЫ УРАВНЕНИЯ И ИХ ОДНОРОДНОСТИ

В свете фундаментального результата Дружковского [2] важный класс якобиевых отображений вида (1.3) образуют отображения, заданные мономиальной функцией $\varphi(\zeta) = \zeta^d$. Этот класс состоит из полиномиальных отображений вида $x + (Ax)^d$, где $d \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $A = (a_{jk})$ – квадратная матрица размера n. Координаты данного отображения имеют вид

$$x_j + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k\right)^d, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

При $d = 0$ или $d = 1$ отображение (2.1) является (аффинно) линейным, а его якобиан равен определителю соответствующей матрицы. В дальнейшем мы не рассматриваем эти тривиальные частные случаи.

Отображение (2.1) имеет единичный якобиан в том и только том случае, когда элементы матрицы A удовлетворяют некоторой системе алгебраических уравнений, зависящей от размерности n пространства переменных и степени d определяющих его многочленов. Всюду в дальнейшем мы будем использовать следующее определение.

Определение 1. Под *системой якобиевых уравнений в размерности $n \geq 2$ для степени d, $d \in \mathbb{N}$* понимается система алгебраических уравнений с переменными a_{jk}, чьи решения определяют матрицы $A = (a_{jk})$, $j, k = 1, \ldots, n$, для которых якобиан отображения $x + (Ax)^d$ тождественно равен 1.

Например, система якобиевых уравнений в размерности 2 для степени 3 имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}^3 + a_{21}^2 a_{22} = 0, \\ a_{11} a_{12}^2 + a_{22}^3 = 0, \\ a_{12} a_{11}^2 + a_{21} a_{22}^2 = 0, \\ a_{12}^2 a_{22}^2 \det A = 0, \\ a_{11}^2 a_{21}^2 \det A = 0, \\ a_{12} a_{22} \det A \cdot \operatorname{perm} A = 0, \\ a_{11} a_{21} \det A \cdot \operatorname{perm} A = 0, \\ \det A (a_{12}^2 a_{21}^2 + 4 a_{11} a_{12} a_{22} a_{21} + a_{11}^2 a_{22}^2) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь $\operatorname{perm} A = a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}$ – перманент матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Общая система якобиевых уравнений имеет труднообозримую структуру. Число образующих ее уравнений и их степень быстро растут с увеличением размерности пространства переменных и степени полиномиального отображения (2.1). Несмотря на это, любая система якобиевых уравнений содержит некоторую подсистему, образованную уравнениями, структура которых весьма прозрачным образом зависит от n и d. А именно, пусть $A = (a_{jk})$ – квадратная матрица размера $n \geq 2$. Для любого $d = 2, 3, \ldots$ система якобиевых уравнений в размерности n для степени d содержит подсистему *простых якобиевых уравнений:*

$$(A^T)^{\odot(d-1)} \operatorname{diag} A = 0. \tag{2.3}$$

Здесь A^T обозначает транспонированную матрицу, $\operatorname{diag} A$ – вектор диагональных элементов матрицы A. Например, в двумерном случае для степени 2 подсистема простых якобиевых уравнений образована первыми двумя уравнениями в системе (2.2).

Под однородностями якобиева отображения $x + (Ax)^d$ мы будем всюду в дальнейшем понимать произвольную квадратную матрицу H того же размера, что и матрица A, такую, что отображение $x + (A \odot H)^d$ также является якобиевым. Здесь через $A \odot H$ обозначается произведение Адамара (то есть, поэлементное произведение) матриц A и H.

3. ОБЗОР ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПАКЕТА JC

Пакет `JC` для системы компьютерной алгебры `Mathematica` содержит функции для построе-

Таблица 1. Время вычисление якобиана отображения $x + (Ux)^d$

d	10	11	12	13	14
Время, с.	1.67	2.57	4.07	5.51	7.54

Таблица 2. Время обращения отображения (4.4) с помощью функции `Solve` СКА `Mathematica`

d	3	4	5	6	7
Время, с.	1.65	13.26	71.1	287.67	991.23

ния, параметризации, обращения и изучения свойств аналитических отображений с единичным якобианом. Исходный код этих функций, а также библиотека наборов данных для их тестирования и данных, полученных в результате многочисленных компьютерных экспериментов, размещены в репозитории `https://www.researchgate.net/publication/358409332_JC_Package_and_Datasets`.

Пакет состоит из трех основных блоков процедур и функций. Первый из них образуют функции, реализующие операции и объекты линейной алгебры, не поддержанные стандартными функциями ядра системы: функции выявления перестановочного подобия числовых и символьных матриц, вычисления главных миноров квадратной матрицы и сумм этих миноров, функции для построения матриц Вандермонда и циркулянтов, умножения матриц по Адамару и подобные им.

Функции из второго блока обеспечивают алгоритмическое построение полиномиальных и аналитических отображений с единичным якобианом. Одна из центральных функций данного блока позволяет строить общую универсальную матрицу в заданной размерности, определенную целочисленным разбиением этой размерности и перестановкой, чья длина равна мощности разбиения. Второй блок содержит также функции для вычисления системы якобиевых уравнений для заданных размерности и степени, построения матриц, определяющих однородности данной системы, построения подсистемы простых якобиевых уравнений, а также уравнений, чьи решения образуют хорошие пары с логарифмической функцией.

Третий блок функций пакета позволяет обращать полиномиальные и аналитические отображения вида $f(x) = x + \varphi(Ax)$ с единичным якобианом, заданные квадратной матрицей A и аналитической функцией одного переменного $\varphi(\zeta)$.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СИСТЕМЫ ЯКОБИЕВЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОИСК ХОРОШИХ ПАР И ОБРАЩЕНИЕ ЯКОБИЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Настоящий раздел иллюстрирует возможности процедур и функций пакета `JC` для построения якобиевых отображений в различных размерностях. Разработанный программный код позволяет строить как полиномиальные, так и более общие якобиевы отображения, заданные аналитическими функциями. Сложность структуры множества полиномиальных якобиевых отображений весьма быстро растет как с увеличением размерности пространства переменных, так и с ростом степени определяющих их многочленов. Результаты расчетов могут быть представлены в статье лишь в случае достаточно низкой размерности, так как с ее ростом они становятся необозримо громоздкими. По этой причине мы в первую очередь рассматриваем здесь кубические отображения четырех независимых комплексных переменных и отсылаем читателя к процедурам и функциям пакета, а также библиотеке наборов данных и результатов компьютерных экспериментов в более высоких размерностях.

Обозначим через $A = (a_{jk}),\ j,k = 1,\ldots,4$ произвольную квадратную матрицу размера 4×4 и через $d = 3$ – степень многочленов, определяющих отображение

$$f = (f_1,\ldots,f_4) : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4, \qquad f(x) := x + (Ax)^3. \tag{4.1}$$

С помощью функции `JEquations[A,d]` вычисляем систему якобиевых уравнений, которой элементы матрицы A удовлетворяют в том и только том случае, когда якобиан отображения (4.1) тождественно равен 1. Вычисление данной системы однородных алгебраических уравнений с неизвестными a_{jk} занимает 268.43 секунды. Система содержит 294 уравнения и не может быть полностью помещена в настоящей статье. Наибольшая из степеней входящих в нее уравнений по совокупности переменных a_{jk} равна 48.

4.1. Подсистема простых якобиевых уравнений

Используя функцию `simpleJEquations[A,d]`, находим следующую подсистему простых якобиевых уравнений в размерности 4 для степени 3:

$$\begin{cases} a_{11}^3 + a_{21}^2 a_{22} + a_{31}^2 a_{33} + a_{41}^2 a_{44} = 0, \\ a_{11}a_{12}^2 + a_{22}^3 + a_{32}^2 a_{33} + a_{42}^2 a_{44} = 0, \\ a_{11}a_{13}^2 + a_{22}a_{23}^2 + a_{33}^3 + a_{43}^2 a_{44} = 0, \\ a_{11}a_{14}^2 + a_{22}a_{24}^2 + a_{33}a_{34}^2 + a_{44}^3 = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

В то время как структура множества решений полной системы якобиевых уравнений является, судя по имеющимся в настоящий момент данным, весьма сложной в любой размерности, превосходящей 2, многочисленные компьютерные эксперименты с использованием алгоритмов, реализованных в пакете `JC`, позволяют предполагать, что антидиагональные элементы матрицы (a_{jk}) могут быть выражены через остальные ее элементы. Результаты этих экспериментов являются частными случаями следующего утверждения.

Гипотеза 1. *Множество решений простых якобиевых уравнений в размерности n для степени d имеет размерность $n^2 - n$ и допускает алгебраическую параметризацию, в которой независимыми параметрами являются элементы матрицы (a_{jk}), не лежащие на ее антидиагонали. Для четных размерностей n при $d = 2$ данная параметризация является рациональной.*

Например, множество решений простых якобиевых уравнений (4.2) в размерности 4 для степени 3 допускает следующую алгебраическую параметризацию:

$$
\begin{aligned}
a_{14} &= -i\frac{\sqrt{a_{44}^3 + a_{22}a_{24}^2 + a_{33}a_{34}^2}}{\sqrt{a_{11}}},\\
a_{23} &= -i\frac{\sqrt{a_{33}^3 + a_{11}a_{13}^2 + a_{43}^2 a_{44}}}{\sqrt{a_{22}}},\\
a_{32} &= -i\frac{\sqrt{a_{22}^3 + a_{11}a_{12}^2 + a_{42}^2 a_{44}}}{\sqrt{a_{33}}},\\
a_{41} &= -i\frac{\sqrt{a_{11}^3 + a_{21}^2 a_{22} + a_{31}^2 a_{33}}}{\sqrt{a_{44}}},
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

в которой все элементы матрицы A, за исключением антидиагональных (то есть, те элементы a_{jk}, для которых $j + k \neq 5$), играют роль алгебраически независимых параметров, $i = \sqrt{-1}$. Непосредственная проверка показывает, что элементы любой квадратной матрицы размера 4, заданные в виде (4.3), удовлетворяют соответствующей системе простых якобиевых уравнений (4.2).

Гипотеза 1 проверена с помощью функций пакета `JC` для всех значений размерности пространства переменных и степени определяющих отображение многочленов $n, d \le 10$. Решая простые якобиевы уравнения (2.3) относительно антидиагональных элементов матрицы A, можно построить семейства алгебраических или рациональных решений полной системы якобиевых уравнений. Например, утверждение гипотезы в размерности 4 позволяет сделать вывод о том, что матрица

$$
M = \begin{pmatrix}
1 & 0 & t & -t-1\\
0 & 1 & -t-1 & t\\
-\dfrac{t}{2t+1} & -\dfrac{t+1}{2t+1} & 1 & 0\\
-\dfrac{t+1}{2t+1} & -\dfrac{t}{2t+1} & 0 & 1
\end{pmatrix},
$$

зависящая от параметра $t \in \mathbb{C}$, образует хорошую пару с функцией $\varphi(\zeta) = \zeta^2$. Непосредственная проверка с помощью функции `JMatrDeg[M,2]` показывает, что это на самом деле так.

4.2. Универсальные матрицы, однородности и вычисление обратных отображений

Вычисление однородностей якобиевых уравнений в размерности 4 для степени 3 с помощью команды `HomogeneitiesOfJEquations [4, 3]` пакета `JC` дает матрицу

$$
H_{4,3}(s_1,\ldots,s_4) = \begin{pmatrix}
s_1^3 s_2 s_3 s_4 & s_2^4 s_3 s_4 & s_2 s_3^4 s_4 & s_2 s_3 s_4^4\\
s_1^4 s_3 s_4 & s_1 s_2^3 s_3 s_4 & s_1 s_3^4 s_4 & s_1 s_3 s_4^4\\
s_1^4 s_2 s_4 & s_1 s_2^4 s_4 & s_1 s_2 s_3^3 s_4 & s_1 s_2 s_4^4\\
s_1^4 s_2 s_3 & s_1 s_2^4 s_3 & s_1 s_2 s_3^4 & s_1 s_2 s_3 s_4^3
\end{pmatrix}.
$$

Используя функцию `allUniversalMatrices` пакета `JC`, находим, что существует 49 различных (для параметров общего положения) универсальных матриц размера 4 (см. таблицу 3). Обозначим через p целочисленное разбиение (2, 2) размерности $n = 4$ и через $\varepsilon = (1, 2)$ тривиальную перестановку на множестве из двух элементов. С помощью функции `universalMatrix[`p`, ε]` вычисляем соответствующую универсальную матрицу, которую, переобозначая ее элементы для исключения громоздких индексов, можно представить в следующем виде:

$$
U = \begin{pmatrix}
a & -a & b & c\\
a & -a & b & c\\
u & -u & v & -v\\
u & -u & v & -v
\end{pmatrix}.
$$

Данная матрица нильпотентна: $U^3 = 0$. Непосредственная проверка показывает, что ее элементы удовлетворяют системе якобиевых уравнений в размерности 4 для степени 3 и, в частности, ее подсистеме (4.2).

С помощью команды `allSumsOfPrincipalMinors[U]` мы убеждаемся в том, что сумма главных миноров любого порядка $k = 1,\ldots,4$ матрицы U равна нулю. Команда `universalMatrixQ[U]` позволяет проверить, что матрица U действительно является универсальной, то есть, что якобиан отображения

$$f = (f_1, \ldots, f_4) : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4,\\ f(x) := x + \varphi(Ux) \tag{4.4}$$

тождественно равен 1 для произвольной аналитической функции одного переменного $\varphi(\zeta)$, такой, что координаты отображения (4.4) корректно определены. Отметим, что время непосредственного вычисления якобиана отображения $x + (Ux)^d$ быстро растет с увеличением степени d, см. таблицу 1.

Несмотря на это, запуск функции `NewtonInverseGeneral` позволяет заключить, что обращение отображения (4.4) может быть представлено в виде

$$x(f) = f - \varphi(f - \varphi(Uf)). \tag{4.5}$$

Заметим, что непосредственное обращение отображения (4.4) с помощью стандартной функции `Solve` в системе компьютерной алгебры `Mathematica` является задачей высокой вычислительной сложности, см. таблицу 2.

4.3. Случай аналитических отображений

Процедуры и функции пакета JC позволяют вычислять матрицы, образующие хорошие пары с заданными неполиномиальными аналитическими функциями, а также с произвольными аналитическими функциями одного переменного. Например, результатом работы команды `JEquationsLOG[A]` является следующая система из 35 однородных алгебраических уравнений с неизвестными a_{jk}, решения которой определяют всевозможные матрицы A, образующие хорошие пары с логарифмической функцией, то есть, такие, для которых отображение $x + \ln(Ax)$ имеет единичный якобиан. Одно из семейств решений данной системы уравнений состоит из нильпотентных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & -1 \\ a_{21} & 1 & -1 & -a_{21} \\ a_{21} & 1 & -1 & -a_{21} \\ 1 & a_{12} & a_{13} & -1 \end{pmatrix},$$

где a_{12}, a_{13} и a_{21} – произвольные комплексные параметры.

Многочисленные компьютерные эксперименты показывают, что другое важное семейство матриц, образующих хорошие пары с логарифмической функцией, состоит из матриц Тёплица некоторого специального вида. Сужая систему уравнений, построенную с помощью команды `JEquationsLOG[A]`, на случай матриц Тёплица (то есть, предполагая, что $a_{jk} = a_{pq}$ для всех j, k, p и q, таких, что $j - k = p - q$) и дополнительно предполагая, что $a_{11} = 0$, мы приходим к выводу, что любая матрица в данном семействе, образующая хорошую пару с логарифмической функцией, пропорциональна матрице

$$T_{\ln} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1+i & -i \\ -i & 0 & 1 & -1+i \\ -1+i & -i & 0 & 1 \\ 1 & -1+i & -i & 0 \end{pmatrix}$$

или же комплексно сопряженной с ней матрице. Здесь $i = \sqrt{-1}$.

Соответствующее якобиево отображение $x + \ln(T_{\ln}x)$ не допускает элементарного обращения. В частности, в отличие от всех рассмотренных выше случаев, обратное отображение не является конечной суперпозицией логарифмической функции и арифметических операций. Отметим, что $T_{\ln}^3 + 8iT_{\ln} = 0$. Применение функции `permuteRowsAndColumns` позволяет заключить, что любая матрица, перестановочно подобная матрице $T_{\ln}$, также образует хорошую пару с логарифмической функцией. Вопрос об алгоритмическом описании множества всех матриц Тёплица, образующих хорошую пару с заданной аналитической функцией, является, по-видимому, открытым.

Отметим, что в трехмерном случае матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

образует хорошую пару с логарифмической функцией. Обращение соответствующего якобиева отображения требует решения трансцендентной системы уравнений

Таблица 3. Количество и время вычисления всех универсальных матриц размера $2 \le n \le 10$

Размерность n пространства переменных	Число всех унив. матриц размера n	Время расчета, с.
2	3	<0.01
3	11	<0.01
4	49	<0.01
5	261	0.06
6	1631	0.45
7	11743	4.67
8	95901	52.37
9	876809	610.57
10	8877691	9551.02

$$\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^{\xi} = s, \quad \left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^{\eta} = t, \quad \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\zeta} = u$$

относительно переменных ξ, η, ζ.

4.4. Многомерный случай: семейство матриц ранга 2, образующих хорошие пары с функцией возведения в квадрат

Параметризация множества всех якобиевых отображений вида $x + (Ax)^d$ в произвольной размерности n и для произвольной степени d (здесь, как и ранее, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ – вектор комплексных переменных, A – квадратная матрица размера n) находится, по-видимому, далеко за пределами современных возможностей компьютерной алгебры. Несмотря на это, процедуры и функции пакета JC позволяют строить и изучать свойства семейств якобиевых отображений в произвольной размерности, удовлетворяющих ряду дополнительных предположений.

Для целого положительного ℓ введем обозначения $\overline{s} = (s_1,\dots,s_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$, $\overline{t} = (t_1,\dots,t_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ и положим $|\overline{s}| := s_1 + \dots + s_\ell$. С помощью функций `JacobianEquations` и `allPrincipalMinors`, входящий в пакет JC, сформируем следующую квадратную матрицу размера $\ell + 2$:

$$M(\overline{s},\overline{t}) := \begin{pmatrix} -|\overline{s}| - |\overline{t}| & -\dfrac{|\overline{s}|(|\overline{s}| + |\overline{t}|)}{|\overline{t}|} & \overline{s} \\ -\dfrac{|\overline{t}|(|\overline{s}| + |\overline{t}|)}{|\overline{s}|} & -|\overline{s}| - |\overline{t}| & \overline{t} \\ -\dfrac{(|\overline{s}| + |\overline{t}|)^2}{|\overline{s}|} & -\dfrac{(|\overline{s}| + |\overline{t}|)^2}{|\overline{t}|} & \overline{s} + \overline{t} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\dfrac{(|\overline{s}| + |\overline{t}|)^2}{|\overline{s}|} & -\dfrac{(|\overline{s}| + |\overline{t}|)^2}{|\overline{t}|} & \overline{s} + \overline{t} \end{pmatrix}.$$

Последние ℓ строк матрицы $M(\overline{s},\overline{t})$ одинаковы и равны сумме первых двух ее строк. Команда `JMatrDeg` позволяет осуществить непосредственную проверку того факта, что матрица $M(\overline{s},\overline{t})$ образует хорошую пару с функцией $\varphi(\zeta) = \zeta^2$. Соответствующее якобиево отображение $x + (M(\overline{s},\overline{t})x)^2$ может быть обращено с помощью функции `NewtonInverse`, однако результат ее работы слишком громоздок для включения в текст статьи. Мы отсылаем читателя к результатам компьютерных экспериментов, представленных на сайте пакета JC.

Таблица 4. Время обращения якобиева отображения с помощью функций `Solve` и `NewtonInverse`

Разбиение p	Время работы функции `Solve`, с.	Время работы функции `NewtonInverse`, с.
{1, 2}	0.04	0.01
{1, 3}	0.23	0.04
{1, 4}	1.48	0.31
{2, 2}	0.26	0.10
{2, 3}	1.34	0.07
{2, 4}	7.48	0.35
{2, 5}	21.56	1.21
{3, 5}	68.23	4.34
{1, 1, 2}	0.28	0.01
{1, 1, 3}	9.68	0.10
{1, 1, 4}	184.28	1.04
{1, 2, 2}	12.68	0.09
{1, 2, 3}	322.23	1.00
{2, 2, 2}	182.17	3.64

5. ОБОРУДОВАНИЕ, ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И ОЦЕНКА СКОРОСТИ РАБОТЫ ПРОГРАММНОГО КОДА

Представленные в настоящей работе расчеты выполнены в системе компьютерной алгебры `Wolfram Mathematica 11.3` на рабочей станции HP Z Workstation с центральным процессором Intel Xeon Gold 6146 с тактовой частотой 3.20 ГГц и 128 Гб оперативной памяти.

Число различных универсальных матриц быстро растет с увеличением размерности. В таблице 3 приведены результаты компьютерных экспериментов с функцией `allUniversalMatrices` для всех $n \le 10$. Каждая из найденных универсальных матриц определяет n-параметрическое семейство якобиевых отображений вида (2.1), полученных путем взятия произведения Адамара с матрицей однородностей, которая может быть построена с помощью команды `HomogeneitiesOfJEquations`. В следующей таблице время обращения якобиева отображения, заданного универсальной матрицей в степени $d = 2$, с помощью функции NewtonInverse пакета JC сравнивается с временем, которое требуется стандартной функции Solve системы компьютерной алгебры `Mathematica 11.3` для решения этой же задачи. Универсальная матрица здесь определяется целочисленным разбиением p размерности пространства переменных и тождественной перестановкой. Время работы узкоспециализированного алгоритма, учитывающего ключевые свойства якобиева отображения, ожидаемо значительно меньше времени, которое требуется для решения этой задачи с помощью функции общего назначения.

6. БЛАГОДАРНОСТИ

Данное исследование выполнено в рамках государственного задания в сфере научной деятельности Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, номер проекта FSSW-2020-0008.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А.* Поиск рациональных решений дифференциальных и разностных систем с помощью формальных рядов // Программирование. 2015. № 2. С. 69–80.
2. *Drużkowski L.M.* An effective approach to Keller's Jacobian Conjecture // Math. Ann. 1983. № 264. P. 303–313.
3. *van den Essen A.* Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. Birkhäuser, 2000.
4. *van den Essen A. and Washburn S.* The Jacobian Conjecture for symmetric Jacobian matrices // Journal of Pure and Applied Algebra. 2004. № 189. P. 123–133.
5. *Fernandes F.* A new class of non-injective polynomial local diffeomorphisms on the plane // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2022. № 507. 125736.
6. *Grigoriev D. and Radchenko D.* On a tropical version of the Jacobian Conjecture // Journal of Symbolic Computation. 2022. № 109. P. 399–403.
7. *Keller O.H.* Ganze Cremona-Transformationen // Monatshefte für Mathematik und Physik. 1939. № 47. P. 299–306.
8. *Peretz R.* The 2-dimensional Jacobian Conjecture: A computational approach // Algorithmic Algebraic Combinatorics and Gröbner Bases. 2009. P. 151–203.
9. *Stepanova M.A.* Jacobian conjecture for mappings of a special type in $\mathbb{C}^2$ // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2018. № 11(2.3). P. 776–780.
10. *Truong T.T.* Some new theoretical and computational results around the Jacobian Conjecture // International Journal of Mathematics. 2020. № 31(4.1). 2050050.