ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2023, № 1, с. 56–60

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 517.55 + 004.421.6

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СРЕЗКИ ДИСКРИМИНАНТА МНОГОЧЛЕНА

© 2023 г. А. П. Ляпин[a,b,*] (ORCID: 0000-0002-0149-7587),
Е. Н. Михалкин[a,**] (ORCID: 0000-0002-1410-9117)
[a] Сибирский федеральный университет
660041 Красноярск, пр. Свободный, 79, Россия
[b] Фэрмонтский государственный университет
26554 Фэрмонт, Западная Вирджиния, Локуст ул., 1201, США
*E-mail: aplyapin@sfu-kras.ru
**E-mail: mikhalkin@bk.ru
Поступила в редакцию 14.07.2022 г.
После доработки 14.08.2022 г.
Принята к публикации 22.08.2022 г.

Разработана программа, вычисляющая срезку дискриминанта многочлена одной переменной на грани многогранника Ньютона дискриминанта данного многочлена, а также результат ее факторизации в произведение дискриминантов многочленов меньших степеней.

DOI: 10.31857/S0132347423010065, **EDN:** GSECON

1. ВВЕДЕНИЕ

Дискриминантом многочлена степени n:

$$f(y) = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n \qquad (1.1)$$

называется неприводимый многочлен $\Delta_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ с целочисленными коэффициентами, который обращается в нуль тогда и только тогда, когда f имеет кратные корни. Иногда дискриминант многочлена f будем обозначать $\Delta_n(f)$.

Структура многогранника Ньютона дискриминанта отражает геометрию дискриминантной гиперповерхности. В частности, асимптотическое поведение гиперповерхности “на бесконечности” контролируется “экстремальными” мономами дискриминанта, которые соответствуют вершинам многогранника Ньютона. Дискриминанты, в свою очередь, играют фундаментальную роль в теории алгебраических функций, в теории особенностей, в алгебраической геометрии и математической физике, о чем свидетельствует значительное число публикаций (см., например, [1–6]).

В работах [7–9] было доказано интересное свойство срезок дискриминанта на грани его многогранника Ньютона, а именно, они допускают фактороизацию в дискриминанты многочленов меньших степеней. *Данная работа посвящена алгоритму вычисления этих срезок. Также приводится результат факторизации полученных срезок в дискриминанты других многочленов. В основе алгоритма лежат формулы, приведенные и доказанные в статьях [8, 10] для граней многогранника Ньютона дискриминанта общего многочлена одного переменного. Используются факторизационные формулы, полученные в недавних статьях [7, 8].*

Отметим, что количество слагаемых в дискриминанте многочлена быстро растет с увеличением степени многочлена. Так, если дискриминант кубического уравнения содержит пять слагаемых, то дискриминант многочлена четвертой степени состоит из шестнадцати слагаемых, для многочлена пятой степени дискриминант содержит 59 слагаемых, а для многочлена 10-й степени он состоит из 133881 монома. Поэтому вычисление срезки дискриминанта весьма затруднительно без специальной программы.

2. МНОГОГРАННИК НЬЮТОНА ДЛЯ ДИСКРИМИНАНТА МНОГОЧЛЕНА

Напомним, что *многогранником Ньютона* $\mathcal{N}(\Delta_n)$ дискриминанта многочлена (1.1) называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^{n+1}$ множества всех показателей $k = (k_0, k_1, \ldots, k_n)$ мономов, участвующих в Δ_n.

Доказанная в [1] теорема показывает, что каждая вершина многогранника Ньютона $\mathcal{N}(\Delta_n)$ для дискриминанта многочлена f определяется некоторым разбиением отрезка [0, n] набором целых точек

$$0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_s < i_{s+1} = n.$$

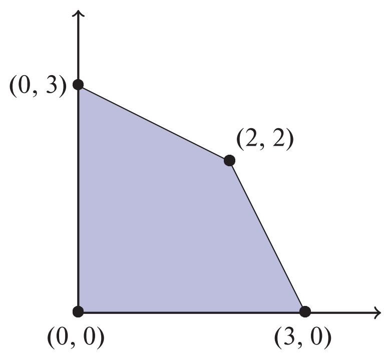

Рис. 1. Многогранник Ньютона приведенного дискриминанта кубического многочлена

Теорема 1 ([1], с. 412). *Многогранник Ньютона дискриминанта многочлена* (1.1) *комбинаторно эквивалентен* ($n-1$)*-мерному кубу*; *он содержит* 2^{n-1} *вершин*, *которые находятся в биективном соответствии со всевозможными подмножествами*

$$I \subset \{1,2,\ldots,n-1\}.$$

Вершина v_I, *соответствующая подмножеству* $I = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_s\}$, *имеет координаты*

$$k_0 = i_1 - i_0 - 1, \quad k_n = i_{s+1} - i_s - 1,$$

$$k_{i_q} = i_{q+1} - i_{q-1}, \quad \text{для} \quad i_q \in I,$$

$$k_i = 0, \quad \text{для} \quad i \notin I \cup \{0,n\}.$$

Пусть $l_q = i_{q+1} - i_q$ ($0 \le q \le s$). *Тогда моном*

$$a^{v_I} = a_0^{l_0-1} a_{i_1}^{l_1+l_0} a_{i_2}^{l_2+l_1} \ldots a_{i_s}^{l_s+l_{s-1}} a_n^{l_s-1}$$

встречается в Δ_n *с коэффициентом*

$$c_{v_I} = \prod_{q=0}^{s} (-1)^{\frac{l_q(l_q-1)}{2}} l_q^{l_q}.$$

Проиллюстрируем утверждение теоремы на примере кубического многочлена

$$f(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3.$$

Дискриминант Δ этого многочлена имеет вид:

$$-27a_0^2a_3^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_0a_2^3 + a_1^2a_2^2 + 18a_0a_1a_2a_3.$$

В рассматриваемом случае имеется 4 подмножества $I \subset \{1,2\}$:

$$I_0 = \varnothing, \quad I_1 = \{1\}, \quad I_2 = \{2\}, \quad I_3 = \{1,2\}.$$

Соответствующие мономы будут следующими:

$$-27a_0^2a_3^2, \ -4a_1^3a_3, \ -4a_0a_2^3, \ a_1^2a_2^2.$$

Отметим, что моном $18a_0a_1a_2a_3$ соответствует внутренней целочисленной точке $(1, 1, 1, 1) \subset \mathcal{N}(\Delta)$ и теорема о нем ничего не утверждает.

Многогранник $\mathcal{N}(\Delta_n)$ имеет $n-1$ гиперграней $\{h_k^0\}$, лежащих в координатных гиперплоскостях $\{t_k = 0\}$, $k = 1,\ldots,n-1$ (предполагается, что в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ выбраны координаты $t = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n)$), и $n-1$ некоординатных гиперграней. Здесь речь идет о гипергранях наивысшей размерности, т.е. коразмерности 1. Обозначим через h_k некоординатную грань многогранника $\mathcal{N}(\Delta_n)$, противоположную к координатной грани h_k^0.

В работах [8] и [10] показано, что многогранник $\mathcal{N}(\Delta_n)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $t_0, t_1, \ldots, t_n$ высекается следующими неравенствами:

$$\begin{cases} t_k \ge 0, \\ \sum_{j=1}^{n-1} \min(j,k)[n - \max(j,k)]t_j \le nk(n-k), \end{cases} \tag{2.1}$$

$k = 1,2,\ldots,n-1$. Каждая его некоординатная гипергрань h_k определяется уравнением

$$h_k := \left\{ t \in \mathcal{N}(\Delta_n) : \sum_{j=1}^{n-1} \min(j,k)[n - \max(j,k)]t_j = nk(n-k) \right\}.$$

Согласно известному свойству биоднородности дискриминанта, переменные t_0, t_n однозначно восстанавливаются через переменные $t_1, \ldots, t_{n-1}$ по формулам

$$\sum_{j=0}^{n} t_j = 2(n-1), \ \sum_{j=1}^{n} jt_j = n(n-1). \tag{2.2}$$

Отметим, что при вычислении дискриминанта многочлена (1.1) мы можем сокращать число переменных на два. А потом, по формулам (2.2), сокращенные переменные восстанавливать (см. пример в конце этого параграфа).

На рисунке 1 изображен многогранник Ньютона дискриминанта приведенного кубического многочлена

$$y^3 + a_2y^2 + a_1y + 1.$$

Это есть проекция многогранника $\mathcal{N}(\Delta_3)$ полного кубического многочлена на плоскость $t_0 = 0$, $t_3 = 0$. Для рассматриваемого многочлена дискриминант Δ равен

$$-27 - 4a_1^3 - 4a_2^3 + a_1^2a_2^2 + 18a_1a_2. \tag{2.3}$$

Согласно формулам (2.1) многогранник Ньютона приведенного дискриминанта рассматриваемого кубического многочлена задается системой неравенств

$$t_1 \geq 0, \quad t_2 \geq 0, \quad 2t_1 + t_2 \leq 6, \quad t_1 + 2t_2 \leq 6.$$

Что же касается дискриминанта полного кубического многочлена, то он находится из дискриминанта (2.3) приведенного кубического многочлена по формулам

$$t_0 = \frac{6 - 2t_1 - t_2}{3}, \quad t_3 = \frac{6 - t_1 - 2t_2}{3},$$

которые получаются из (2.2), и имеет вид

$$-27a_0^2a_3^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_0a_2^3 + a_1^2a_2^2 + 18a_0a_1a_2a_3.$$

3. ФАКТОРИЗАЦИЯ СРЕЗОК ДИСКРИМИНАНТА НА ГРАНИ МНОГОГРАННИКА НЬЮТОНА

Срезкой дискриминанта Δ на гипергрань h_k его многогранника Ньютона мы называем многочлен $\Delta|_{h_k}$, состоящий из всех мономов Δ, показатели которых принадлежат h_k. В качестве примера вычислим срезку дискриминанта многочлена четвертой степени

$$f(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 \tag{3.1}$$

на гипергрань h_2. Как показывают вычисления, дискриминант многочлена (3.1) следующий:

$$\begin{gathered} 56a_0^3a_4^3 - 27a_1^4a_4^2 - 128a_0^2a_2^2a_4^2 - 4a_3a_3^3 + 16a_0a_2^4a_4 - \\ - 4a_1^2a_2^3a_4 - 27a_0^2a_3^4 - 192a_0^2a_1a_3a_4^2 - 6a_0a_1^2a_3^2a_4 + \\ + 144a_0^2a_2a_3^2a_4 + 144a_0a_1^2a_2a_4^2 + 18a_1^3a_2a_3a_4 + \\ + a_1^2a_2^2a_3^2 - 4a_0a_2^3a_3^2 - 80a_0a_1a_2^2a_3a_4 + 18a_0a_1a_2a_3^3. \end{gathered}$$

Грань h_2 многогранника Ньютона многочлена (3.1) определяется системой:

$$t_1 \geq 0, \quad t_2 \geq 0, \quad t_3 \geq 0, \quad t_1 + 2t_2 + t_3 = 8.$$

Тогда срезка дискриминанта рассматриваемого многочлена будет иметь вид:

$$\Delta_4|_{h_2} = 16a_0a_2^4a_4 - 4a_1^2a_2^3a_4 + a_1^2a_2^2a_3^2 - 4a_0a_2^3a_3^2.$$

В статье [7] доказано свойство факторизуемости срезки дискриминанта $\mathcal{N}(\Delta_n)$ на любую из некоординатных гиперграней в произведение двух дискриминантов меньших степеней. В частности, последняя срезка факторизуется в произведение двух дискриминантов квадратных уравнений:

$$\begin{gathered} 16a_0a_2^4a_4 - 4a_1^2a_2^3a_4 + a_1^2a_2^2a_3^2 - 4a_0a_2^3a_3^2 = \\ = a_2^2(a_1^2 - 4a_0a_2)(a_3^2 - 4a_2a_4) = \\ = a_2^2\Delta_2(a_0, a_1, a_2)\Delta_2(a_2, a_3, a_4). \end{gathered}$$

В статье [8] доказано свойство факторизуемости срезок дискриминанта на грани его многогранника Ньютона большей коразмерности. Именно, пусть

$$h_K := h_{k_1} \cap \ldots \cap h_{k_p},$$

грань $\mathcal{N}(\Delta_n)$, полученная пересечением p некоординатных гиперграней. Здесь мультииндекс $K = \{k_1, \ldots, k_p\}$ определяет разбиение набора $\{0, 1, \ldots, n\}$ на $p + 1$ поднаборов (отрезков)

$$K_i = \{k_i, k_i + 1, \ldots, k_{i+1}\}, \quad i = 0, 1, \ldots, p,$$

считая $k_0 = 0$, $k_{p+1} = n$. Обозначим через $l_i := k_{i+1} - k_i$ длину K_i и

$$f_{K_i} := a_{k_i} + a_{k_i+1}y + \ldots + a_{k_{i+1}}y^{l_i}.$$

Приведем результат, доказанный в работе [8].

Теорема 2. *Срезка Δ_n на грань h_K факторизуется в виде произведения*

$$\Delta_n|_{h_K} = a_K^2 \prod_{i=0}^{p} \Delta_{l_i}(f_{K_i}), \tag{3.2}$$

где $a_K^2 = a_{k_1}^2 \ldots a_{k_p}^2$, а Δ_{l_i} – дискриминанты многочленов f_{K_i} степеней l_i.

Проиллюстрируем данную теорему на примере. Для многочлена седьмой степени $f(y) = \sum_{k=0}^{7} a_k y^k$ срезка $\Delta_7|_{h_{2,5}}$ на грань $h_2 \cap h_5$ представится в виде произведения трех дискриминантов:

$$a_2^2a_5^2\Delta_2(a_0, a_1, a_2)\Delta_3(a_2, a_3, a_4, a_5)\Delta_2(a_5, a_6, a_7),$$

т.е. дискриминантов многочленов $a_0 + a_1y + a_2y^2$, $a_2 + a_3y + a_4y^2 + a_5y^3$ и $a_5 + a_6y + a_7y^2$.

4. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Алгоритм MAIN1(n, *facets*1, *facets*2) построения срезки по определению:

1. по заданному натуральному числу n строим многочлен $f(y)$ степени n и его дискриминат *Dsc* по переменной y;

2. строим список *ListOfTerms* из мономов дискриминанта *Dsc*;

3. по заданному n формируем матрицу *MTRX* и столбец *CLMN* из коэффициентов в правой части системы (2.1);

4. из списка *ListOfTerms* выбираем мономы, у которых показатели степеней переменных $a_1, \ldots, a_{n-1}$ удовлетворяют системе (2.1) уравнений и неравенств, знаки которой задаются списком *facets*1; формируем многочлен *truncation*, являющийся искомой срезкой многочлена;

5. возвращаем факторизацию срезки, используя встроенную функцию *factor*;

6. если множество координатных граней *facets*2 непустое, то определенные в нем коэффи-

Таблица 1.

n	*facets*1	По определению	По теореме 2
3	[1]	<0.01 с	<0.01 с
4	[2]	<0.01 с	<0.01 с
5	[2]	0.094 с	<0.01 с
6	[3]	0.031 с	<0.01 с
7	[3]	0.094 с	0.016 с
8	[4]	0.750 с	<0.01 с
9	[4]	4.062 с	0.016 с
10	[5]	23.609 с	<0.01 с
11	[5]	594.688 с	0.015 с

циенты приравниваем к нолю; возвращаем факторизованную срезку на координатные грани.

Алгоритм MAIN2(n, *facets*1, *facets*2) построения срезки по Теореме 2:

1. по заданному натуральному числу n и номерам граней $facets = \{k_1,\dots,k_p\}$ строим $p+1$ многочленов f_{K_i} с коэффициентами $a_{k_i},\dots,a_{k_{i+1}}$, $i = 0,\dots,p$, причем $k_0 = 0$, $k_{p+1} = n$;

2. для каждого f_{K_i}, $i = 1,\dots,p$, находим дискриминат, используя встроенную функцию *discrim*;

3. находим приведение полученных дискриминатов и домножаем его на $a_{k_1}^2\cdots a_{k_p}^2$ согласно формуле (3.2);

4. если множество координатных граней *facets*2 непустое, то определенные в нем коэффициенты приравниваем к нолю; возвращаем факторизованную срезку на координатные грани.

Алгоритм был реализован в среде Maple 18. Полный код программы доступен по ссылке https://github.com/lyapinap/LM2022. Вычисления производились на машине Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 CPU 2.40 GHz, 64bit, ОЗУ 8.00 Гб под управлением Windows 10.

В таблице 1 приведно сравнительное время вычисления срезок многочлена по определению и по теореме 2 с использованием команды *CPUTime* из пакета *CodeTools*.

5. ПРИМЕР

Команда

$$\mathrm{MAIN}(5,[2],[\,])$$

для многочлена пятой степени

$$f = a_5y^5 + a_4y^4 + a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0$$

и его дискриминанта $\Delta = 3125a_0^4a_5^4 - 2500a_0^3a_1a_4a_5^3 - 3750a_0^3a_2a_3a_5^3 + 2000a_0^3a_2a_4^2a_5^2 + 2250a_0^3a_3^2a_4a_5^2 - 1600a_0^3a_3a_4^3a_5 + 256a_0^3a_4^5 + 2000a_0^2a_1^2a_3a_5^3 - 50a_0^2a_1^2a_4^2a_5^2 + 2250a_0^2a_1a_2^2a_5^3 - 2050a_0^2a_1a_2a_3a_4a_5^2 + 160a_0^2a_1a_2a_4^3a_5 - 900a_0^2a_1a_3^3a_5^2 + 1020a_0^2a_1a_3^2a_4^2a_5 - 192a_0^2a_1a_3a_4^4 - 900a_0^2a_2^3a_4a_5^2 + 825a_0^2a_2^2a_3^2a_5^2 + 560a_0^2a_2^2a_3a_4^2a_5 - 128a_0^2a_2^2a_4^4 - 630a_0^2a_2a_3^3a_4a_5 + 144a_0^2a_2a_3^2a_4^3 + 108a_0^2a_3^5a_5 - 27a_0^2a_3^4a_4^2 - 1600a_0a_1^3a_2a_5^3 + 160a_0a_1^3a_3a_4a_5^2 - 36a_0a_1^3a_4^3a_5 + 1020a_0a_1^2a_2^2a_4a_5^2 + 560a_0a_1^2a_2a_3^2a_5^2 - 746a_0a_1^2a_2a_3a_4^2a_5 + 144a_0a_1^2a_2a_4^4 + 24a_0a_1^2a_3^3a_4a_5 - 6a_0a_1^2a_3^2a_4^3 - 630a_0a_1a_2^3a_3a_5^2 + 24a_0a_1a_2^3a_4^2a_5 + 356a_0a_1a_2^2a_3^2a_4a_5 - 80a_0a_1a_2^2a_3a_4^3 - 72a_0a_1a_2a_3^4a_5 + 18a_0a_1a_2a_3^3a_4^2 + 108a_0a_2^5a_5^2 - 72a_0a_2^4a_3a_4a_5 + 16a_0a_2^4a_4^3 + 16a_0a_2^3a_3^3a_5 - 4a_0a_2^3a_3^2a_4^2 + 256a_1^5a_5^3 - 192a_1^4a_2a_4a_5^2 - 128a_1^4a_3^2a_5^2 + 144a_1^4a_3a_4^2a_5 - 27a_1^4a_4^4 + 144a_1^3a_2^2a_3a_5^2 - 6a_1^3a_2^2a_4^2a_5 - 80a_1^3a_2a_3^2a_4a_5 + 18a_1^3a_2a_3a_4^3 + 16a_1^3a_3^4a_5 - 4a_1^3a_3^3a_4^2 - 27a_1^2a_2^4a_5^2 + 18a_1^2a_2^3a_3a_4a_5 - 4a_1^2a_2^3a_4^3 - 4a_1^2a_2^2a_3^3a_5 + a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2$, выдает срезку на некоординатную гипергрань h_2 многогранника $\mathcal{N}(\Delta)$:

$$\Delta|_{h_2} = 108a_0a_2^5a_5^2 - 72a_0a_2^4a_3a_4a_5 + 16a_0a_2^4a_4^3 + 16a_0a_2^3a_3^3a_5 - 4a_0a_2^3a_3^2a_4^2 - 27a_1^2a_2^4a_5^2 + 18a_1^2a_2^3a_3a_4a_5 - 4a_1^2a_2^3a_4^3 - 4a_1^2a_2^2a_3^3a_5 + a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2,$$

которая в свою очередь, согласно Теореме 2, факторизуется в произведение дискриминантов двух многочленов степеней два и три:

$$a_2^2(27a_2^2a_5^2 - 18a_2a_3a_4a_5 + 4a_2a_4^3 + 4a_3^3a_5 - a_3^2a_4^2)(4a_0a_2 - a_1^2) = a_2^2\Delta_2(a_0 + a_1y + a_2y^2)\Delta_3(a_2 + a_3y + a_4y^2 + a_5y^3).$$

Команда

$$\mathrm{MAIN}(5,[2],[3])$$

находит факторизацию срезки рассматриваемого дискриминанта на грань многогранника $\mathcal{N}(\Delta)$, полученную пересечением некоординатной гиперграни h_2 с координатной h_3^0:

$$a_2^3(27a_2a_5^2 + 4a_4^3)(4a_0a_2 - a_1^2).$$

Время счета для приведенного примера составило менее 0.1 секунды.

6. БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2022-876).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A.* Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Birkhäuser: Boston, 1994.
2. *Васильев В.А.* Ветвящиеся интегралы. М.: МЦНМО, 2000.
3. *Antipova I.A., Kleshkova E.A.* On Facets Of The Newton Polytope For The Discriminant Of The Polynomial System // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. V. 18 (2.1). P. 1180–1188.
4. *Ardila F.* The Geometry of Matroids // Notices Amer. Math. Soc. 2018. V. 65 (8). P. 902–908.
5. *Dickenstein A., Feichtner E.M., Sturmfels B.* Tropical discriminants // J. Amer. Math. Soc. 2007. V. 20. P. 1111–1133.
6. *Krasikov V.A., Sadykov T.M.* On the analytic complexity of discriminants // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2012. V. 279. P. 78–92.
7. *Михалкин Е.Н., Степаненко В.А., Цих А.К.* Геометрия факторизационных тождеств для дискриминантов // Доклады Российской академии наук. Серия: математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 493. С. 21–25.
8. *Mikhalkin E.N., Stepanenko V.A., Tsikh A.K.* Blow-ups for the Horn-Kapranov parametrization of the classical discriminant. В кн. “Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics”. EMS Series of Congress Reports. Publication house EMS. 2021. P. 315–329.
9. *Mikhalkin E.N., Nikzad M., Stepanenko V.A.* Detailed Factorization Identiies for Classical Discriminant // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2022. V. 15 (1.1). P. 23–28.
10. *Passare M., Tsikh A.* Algebraic equations and hypergeometric series. In the book “The legacy of Niels Henrik Abel”. Springer: Berlin-Heidelberg-New York, 2004. P. 653–672.