

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КВАНТОВОЙ ЗАПУТАННОСТИ В КОНЕЧНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ: КОМПЬЮТЕРНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

© 2021 г. В. В. Корняк^{а,*}

^а Объединенный институт ядерных исследований,
141980 Дубна Московской области, Россия

*E-mail: vkornyak@gmail.com

Поступила в редакцию 01.07.2020 г.

После доработки 20.07.2020 г.

Принята к публикации 12.09.2020 г.

Рассматривается поведение квантовой запутанности в процессе унитарной эволюции в конструктивных моделях многокомпонентных квантовых систем. Описываются группы симметрий квантовых систем, допускающих возникновение геометрических структур, ассоциированных с квантовой запутанностью. Алгоритмы моделирования динамики квантовой запутанности основаны на методах компьютерной алгебры и вычислительной теории групп. Приводятся примеры конкретных вычислений.

DOI: 10.31857/S0132347421020072

1. ВВЕДЕНИЕ

Составные квантовые системы представляют особый интерес из-за наличия запутанных состояний. Понятие запутанности лежит в основе квантовых вычислений и квантовой информатики. Запутанность ответственна за такие, противоречащие обыденной интуиции, но экспериментально наблюдаемые явления, как нелокальные квантовые корреляции и квантовая телепортация. В настоящее время популярна идея о том, что геометрическое пространство физических теорий не фундаментально, а возникает за счет квантовой запутанности как приближенная феноменологическая (“эмерджентная”) структура. При этом предполагается, что метрику физического пространства можно вывести из числовых характеристик квантовых корреляций, исходя из представления о том, что чем выше квантовые корреляции между подсистемами составной системы, тем меньше геометрическое расстояние между ними.

Компьютерное моделирование представляет естественным методом исследования проблем, связанных с квантовой запутанностью. Любое компьютерное моделирование возможно только если проблема сформулирована в конечных терминах. Более того, физика, как эмпирическая наука, нечувствительна к замене бесконечностей в физических теориях подходящими конечными конструкциями. В данной работе мы используем подход, называемый для краткости “конечной

квантовой механикой”. Также мы старались избегать введения далеко идущих феноменологических упрощений и приближений, по возможности придерживаясь твердо установленных законов и правил квантовой механики.

2. КОНЕЧНАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Конечной квантовой механикой мы называем версию квантовой теории, в которой унитарные группы операторов эволюции заменяются унитарными представлениями конечных групп¹, а поля комплексных и вещественных чисел заменяются их плотными конструктивными подполями, естественно возникающими из структур конкретных групп. Этот подход подробно описан в [1, 2]. Недавно Т. Бэнкс [3] проанализировал более раннее изложение [4] подхода с точки зрения реальной физики и космологии и пришел к заключению, что в его рамках можно воспроизвести результаты всех возможных экспериментов, объясняемых любой традиционной квантовой теорией.

В основе конечной квантовой механики лежит тот факт, что любое линейное представление конечной группы является подпредставлением подходящего перестановочного представления. Из этого следует, что формализм квантовой механики

¹ Любое линейное представление конечной группы над полем характеристики нуль является унитарным.

ки можно полностью² воспроизвести исходя из перестановок некоторого множества элементов

$$\Omega = \{e_0, \dots, e_{N-1}\} \cong \{0, \dots, N-1\}. \quad (2.1)$$

Здесь “изоморфизм” $\cong$ означает взаимно однозначное соответствие множеств. Для упрощения обозначений будем считать, что $\Omega = \{0, \dots, N-1\}$.

Г. ’т Хоофт в своей интерпретации квантовой механики [5] выделяет особые множества взаимно ортогональных состояний в гильбертовых пространствах, переходящие друг в друга под действием перестановок. Такие состояния ’т Хоофт наделяет статусом быть “элементами реальности” и называет “онтологическими” или, для краткости, “онтическими”. Мы будем придерживаться аналогичной терминологии, называя элементы множества Ω и связанные с ними конструкции *онтическими*. Интерпретируя Ω как множество базисных элементов, введем полумодуль H_N над полукольцом натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Элементы полумодуля, $|n\rangle = (n_0, \dots, n_{N-1})^T \in H_N$, $n_i \in \mathbb{N}$, будем называть *натуральными векторами*.

Пусть на множестве Ω действует группа перестановок $G \leq S_N$. Это действие определяет *перестановочное представление* группы G в полумодуле H_N . Матрицы перестановочного представления имеют вид

$$\mathcal{P}(g)_{i,j} = \delta_{ig,j},$$

где ig обозначает действие (справа) элемента группы $g \in G$ на элемент множества $i \in \Omega$.

Для каждой конечной группы G однозначно строится список всех ее неприводимых представлений из которых можно составить любое представление как прямую сумму. Поле, над которым любое линейное представление группы G можно разложить на неприводимые компоненты, называется *расщепляющим* полем для G . Для получения расщепляющего поля для данной группы G достаточно к натуральным числам $\mathbb{N}$ добавить ℓ -й примитивный корень из единицы r_ℓ , где ℓ — некоторый делитель наименьшего общего кратного порядков элементов группы. При этом получается кольцо, полем частных которого является абелево расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}(r_\ell)$, называемое ℓ -м круговым полем. Расщепляющим полем будет некоторое подполе кругового поля: $\mathcal{F} \leq \mathbb{Q}(r_\ell)$. Расширение полукольца $\mathbb{N}$ до поля $\mathcal{F}$ индуцирует расширение полумодуля H_N до N -мерного гильбертова пространства $\mathcal{H}_N$, в котором

элементы полумодуля H_N представлены целочисленными векторами в неотрицательном ортанте. Поле $\mathcal{F}$ является плотным подполем либо поля вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо поля комплексных чисел $\mathbb{C}$, в зависимости от структуры группы G , и поэтому эмпирически неотличимо от одного из этих континуальных полей.

Любое перестановочное представление имеет *тривиальное* подпредставление в одномерном подпространстве, порождаемом вектором $\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_N$.

$(N-1)$ -мерное подпредставление, дополнительное к тривиальному, называется *стандартным* представлением. Для симметрической группы S_N (в отличие от ее собственных подгрупп) стандартное представление всегда является неприводимым.

Квантово-механическое поведение (интерференции и т.д.) проявляется именно в стандартном представлении, а квантовые состояния можно описать с помощью проекций натуральных векторов в $(N-1)$ -мерное стандартное пространство. Скалярное произведение для нормированных проекций в стандартное пространство натуральных векторов $|n\rangle$ и $|m\rangle$ имеет вид

$$S(n, m) = \frac{N \langle n | m \rangle - \langle n \rangle \langle m \rangle}{\sqrt{N \langle n | n \rangle - \langle n \rangle^2} \sqrt{N \langle m | m \rangle - \langle m \rangle^2}},$$

$$\text{где } \langle n \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} n_k, \quad \langle n | m \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} n_k m_k.$$

В статье [3] используется естественное предположение о том, что для описания реальных физических систем число N должно быть порядка числа фундаментальных (планковских) степеней свободы рассматриваемой системы (приводятся оценки $N \sim \text{Exp}(10^{20})$ для 1 см^3 материи и $N \sim \text{Exp}(10^{123})$ для всей Вселенной). Там же для установления соответствия между конечной квантовой механикой и традиционной теорией, основанной на непрерывных унитарных группах, используется утверждение о том, что для достаточно больших N (согласно [6] $N \geq 72$) наиболее общая конечная подгруппа группы $SU(N-1)$ имеет структуру полупрямого произведения конечной абелевой A и симметрической групп:

$$G = A \rtimes S_N \leq SU(N-1). \quad (2.2)$$

С помощью проекций натуральных векторов в стандартное пространство можно с произвольной точностью воспроизвести любое квантовое состояние. Однако, квантовые состояния, соответствующие коллинеарным векторам, эквивалентны. Чтобы устранить эту избыточность, можно предвари-

² Если пренебречь эмпирически несущественными элементами традиционного формализма, такими как разного рода бесконечности.

тельно спроектировать натуральные векторы на пересечение единичной сферы $\mathbb{S}^{\mathcal{N}-1} \subset \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ с неотрицательным ортантом. Это пересечение мы обозначим символом $\mathbb{S}_+^{\mathcal{N}-1}$. Проекции натуральных векторов составляют плотное подмножество в $\mathbb{S}_+^{\mathcal{N}-1}$. Для моделирования физических систем можно, отказавшись от требования плотности, воспользоваться конечными подмножествами натуральных векторов.

Назовем векторами порядка $m \geq 2$ натуральные векторы, координаты которых принадлежат множеству $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Полное число таких векторов равно $m^{\mathcal{N}}$, тогда как площадь $\mathbb{S}_+^{\mathcal{N}-1}$ равна $\frac{\mathcal{N}\pi^{\mathcal{N}/2}}{2^{\mathcal{N}}\Gamma(\mathcal{N}/2+1)} \sim \sqrt{\frac{\mathcal{N}}{\pi}} \left(\frac{e\pi}{2\mathcal{N}}\right)^{\mathcal{N}/2}$. Мы видим, что с ростом $\mathcal{N}$ число векторов порядка m быстро растет при любом m , тогда как площадь $\mathbb{S}_+^{\mathcal{N}-1}$ быстро убывает, т.е. векторы порядка m хорошо представляют значительную часть квантовых состояний.

2.1. Онтические векторы

Натуральные векторы порядка 2 мы будем называть *онтическими*. Такие векторы обладают наиболее естественными и удобными для вычислений свойствами. Онтический вектор $|q\rangle$ можно записать в виде битовой строки длины $\mathcal{N}$. Интерпретируя эту строку, как характеристическую функцию, можно отождествить онтический вектор с соответствующим нетривиальным подмножеством множества онтических элементов (2.1): $q \subset \Omega$. Полное множество онтических векторов имеет вид $\mathcal{Q} = 2^{\Omega} \setminus \{\emptyset, \Omega\}$, $|\mathcal{Q}| = 2^{\mathcal{N}} - 2$. Для нормализованных проекций онтических векторов $|q\rangle$ и $|r\rangle$ в стандартное пространство имеем скалярное произведение

$$S(q, r) = \frac{\mathcal{N} \langle q \& r \rangle - \langle q \rangle \langle r \rangle}{\sqrt{\langle q \rangle \langle \sim q \rangle \langle r \rangle \langle \sim r \rangle}}$$

и соответствующее правило Борна для квантовых вероятностей

$$\mathbf{B}(q, r) = \frac{(\mathcal{N} \langle q \& r \rangle - \langle q \rangle \langle r \rangle)^2}{\langle q \rangle \langle \sim q \rangle \langle r \rangle \langle \sim r \rangle}.$$

Здесь $a \& b$ означает побитовое “И” для битовых строк, $\sim a$ – побитовую инверсию, $\langle a \rangle$ – число единиц в битовой строке (вес Хэмминга).

Из очевидных тождеств $\langle \sim a \rangle = \mathcal{N} - \langle a \rangle$ и $\langle a \& b \rangle + \langle a \& \sim b \rangle = \langle a \rangle$ следуют симметрии для скалярного произведения и вероятности Борна относительно замены подмножеств онтических элементов их дополнениями:

$$S(q, r) = -S(\sim q, r) = -S(q, \sim r) = S(\sim q, \sim r), \\ \mathbf{B}(q, r) = \mathbf{B}(\sim q, r) = \mathbf{B}(q, \sim r) = \mathbf{B}(\sim q, \sim r).$$

3. СОСТАВНЫЕ КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть компоненты M -компонентной квантовой системы индексируются элементами множества

$$X \equiv \{0, \dots, M-1\}. \quad (3.1)$$

Гильбертово пространство такой составной системы имеет вид

$$\tilde{\mathcal{H}} = \bigotimes_{x \in X} \mathcal{H}_x. \quad (3.2)$$

Мы будем рассматривать “однородные” системы, для которых все пространства $\mathcal{H}_x$ изоморфны, т.е. $\mathcal{H}_x \cong \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ – представитель класса изоморфизма, который мы будем называть *локальным* гильбертовым пространством. Если $\dim \mathcal{H} = n$, то $\dim \tilde{\mathcal{H}} = n^M \equiv \mathcal{N}$. Как принято в физике, ортонормированные базисные элементы гильбертовых про-

странств записываются в виде $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ и

т.д. Таким образом, базисные элементы локального $\mathcal{H}$ и полного $\tilde{\mathcal{H}}$ пространств имеют, соответственно, вид $|i\rangle$, $0 \leq i \leq n-1$ и $|\tilde{i}\rangle$, $0 \leq \tilde{i} \leq \mathcal{N}-1$. Связь между базисными элементами полного и локального пространств выражается взаимно однозначным соотношением

$$|\tilde{i}\rangle = |i_0\rangle \otimes |i_1\rangle \otimes \dots \otimes |i_{M-1}\rangle \equiv \bigotimes_{x \in X} |i_x\rangle, \quad (3.3)$$

где индекс $\tilde{i}$ вычисляется по формуле

$$\tilde{i} = i_0 n^{M-1} + \dots + i_{M-1} \equiv \sum_{m=0}^{M-1} i_m n^{M-m-1}.$$

Из взаимной однозначности соответствия (3.3) видно, что любое гильбертово пространство, размерность которого равна степени натурального числа, можно разложить в тензорное произведение изоморфных “локальных” гильбертовых пространств.

Состояние квантовой системы, описываемое одним вектором $|v\rangle$, называется *чистым*. В общем случае квантовое состояние можно описать матрицей плотности ρ , которая представляет собой положительно полуопределенную эрмитову матрицу с единичным следом. Матрица плотности чистого состояния имеет вид

$$\rho = \frac{|v\rangle\langle v|}{\langle v | v \rangle} \quad (3.4)$$

и является оператором проектирования ранга один. Матрица плотности общего вида описывает состояния, называемые *смешанными*, и представляет собой взвешенную сумму матриц плотностей чистых состояний.

Статистика поведения выделенной подсистемы составной системы полностью описывается *редуцированной матрицей плотности*, получаемой из матрицы плотности всей системы взятием следов по всем компонентам, не входящим в рассматриваемую подсистему. В общем случае редуцированная матрица плотности описывает смешанное состояние, даже если состояние системы в целом является чистым. С другой стороны, любое смешанное состояние можно получить редукцией некоторого чистого состояния в гильбертовом пространстве большей размерности³.

Некоторые состояния составной системы можно представить как тензорные произведения состояний подсистем. Такие состояния называются *сепарабельными*. Состояния, не являющиеся сепарабельными, называются *запутанными*.

Для иллюстрации рассмотрим пример четырехмерного гильбертова пространства, представленного как тензорное произведение двух двумерных: $\tilde{\mathcal{H}}_4 = \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$. Базисные элементы пространства $\tilde{\mathcal{H}}_4$ выражаются через базисные элементы пространства $\mathcal{H}_2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |\tilde{0}\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle, & |\tilde{1}\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle, \\ |\tilde{2}\rangle &= |1\rangle \otimes |0\rangle, & |\tilde{3}\rangle &= |1\rangle \otimes |1\rangle. \end{aligned}$$

Для примера рассмотрим только онтические векторы. Из четырнадцати онтических векторов в четырехмерном пространстве восемь являются сепарабельными:

$$\begin{aligned} |\tilde{0}\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle, \\ |\tilde{1}\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle, \\ |\tilde{2}\rangle &= |1\rangle \otimes |0\rangle, \\ |\tilde{3}\rangle &= |1\rangle \otimes |1\rangle, \\ |\tilde{0}\rangle + |\tilde{1}\rangle &= |0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle), \\ |\tilde{0}\rangle + |\tilde{2}\rangle &= (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle, \\ |\tilde{1}\rangle + |\tilde{3}\rangle &= (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle, \\ |\tilde{2}\rangle + |\tilde{3}\rangle &= |1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \end{aligned}$$

и шесть запутанными:

$$\begin{aligned} |\tilde{1}\rangle + |\tilde{2}\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle, \\ |\tilde{0}\rangle + |\tilde{3}\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle, \\ |\tilde{0}\rangle + |\tilde{1}\rangle + |\tilde{2}\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle, \\ |\tilde{0}\rangle + |\tilde{1}\rangle + |\tilde{3}\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle, \\ |\tilde{0}\rangle + |\tilde{2}\rangle + |\tilde{3}\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle, \\ |\tilde{1}\rangle + |\tilde{2}\rangle + |\tilde{3}\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle. \end{aligned}$$

4. СИММЕТРИИ СИСТЕМ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВОМ

Любая подгруппа симметрической группы онтического множества имеет перестановочное представление в гильбертовом пространстве составной квантовой системы и может служить группой симметрий этой системы. Здесь мы рассмотрим специальный тип групп симметрий составных систем — подгруппы симметрической группы, сконструированные из заданных групп “геометрических” и “локальных” симметрий.

Для однородной составной системы изоморфные локальные гильбертовы пространства $\mathcal{H}_x$ лежат на орбите некоторой группы G , действующей на множестве X , которое можно интерпретировать как “геометрическое пространство” с группой “пространственных симметрий” G .

Пусть локальное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ является пространством перестановочного представления группы “локальных симметрий” $F \leq S_n$, действующей перестановками на “локальном” множестве

$$V \cong \{0, \dots, n-1\}, \quad (4.1)$$

являющемся базисом локального пространства.

Исходя из групп F и G и естественных свойств, которыми должно обладать геометрическое пространство, можно конкретизировать структуру группы симметрий $\tilde{W}$, унитарное представление которой в полном гильбертовом пространстве (3.2) описывает квантовые свойства системы в целом. Прежде всего, группа $\tilde{W}$ переставляет компоненты составной системы, ассоциированные с точками пространства X (3.1), в соответствии с действием пространственной группы G , поэтому должен существовать гомоморфизм $h: \tilde{W} \rightarrow G$. Образ этого гомоморфизма — вся группа G , т.е., $\text{im}(h) = h(\tilde{W}) = G$. Естественно предположить, что, если все точки пространства неподвижны (т.е., на X действует единица $1_G \in G$ пространственной группы), то группа $\tilde{W}$ должна действовать как прямое произведение M экземпляров локальной группы

³ Метафора “Church of the Larger Hilbert Space” (J.A. Smolin) характеризует убеждение, что любое смешанное состояние фактически происходит из более фундаментального чистого состояния большей системы.

F (которое мы будем обозначать символом F^X) покомпонентно на декартово произведение M экземпляров множества (4.1) (которое мы обозначим символом V^X). Это означает, что $\ker(h) \cong F^X$, т.е., ядро гомоморфизма h изоморфно группе функций на точках пространства со значениями в локальной группе. Ядро любого гомоморфизма является нормальной подгруппой, поэтому $\tilde{W}$ содержит нормальную подгруппу, изоморфную F^X . Таким образом, группа $\tilde{W}$ представляет собой расширение группы функций F^X с помощью группы G пространственных симметрий. Это означает, что $\tilde{W}/F^X \cong G$ или, эквивалентно, что существует короткая точная последовательность

$$1 \rightarrow F^X \rightarrow \tilde{W} \rightarrow G \rightarrow 1.$$

Множество элементов группы $\tilde{W}$ можно отождествить (как множество) с декартовым произведением множеств F^X и G , т.е., элементы группы $\tilde{W}$ можно представить в виде пар $(f(x), g)$, где $f(x) \in F^X$, $g \in G$.

При построении расширения следует учесть, что расширения групп определяются с точностью до эквивалентности расширений [7]. В нашем случае эквивалентность описывается групповым изоморфизмом $\Phi: \tilde{W} \rightarrow \tilde{W}$, обеспечивающим коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{W} & & \\ & \nearrow & \downarrow \Phi & \searrow & \\ 1 & \longrightarrow & F^X & & G \longrightarrow 1. \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & \tilde{W} & & \end{array} \quad (4.2)$$

Проведя вычисления для рассматриваемого случая, получаем следующее

Предложение.

• *Классы эквивалентности расширений (4.2) параметризуются антигомоморфизмами⁴ пространственной группы: $\mu: G \rightarrow G$.*

• *Изоморфизм эквивалентных расширений имеет вид*

$$\Phi: (f(x), g) \mapsto (f(x\varphi(g)), g),$$

• *где $\varphi: G \rightarrow G$ — произвольная функция.*

⁴ Антигомоморфизм — это отображение групп, обращающее порядок группового умножения: $\mu(ab) = \mu(b)\mu(a)$.

• *Основные групповые операции имеют следующий явный вид:*

$$v(x)(f(x), g) = v(x\mu(g))f(x\varphi(g)), \quad (4.3)$$

$$(f(x), g)(f(x'), g') =$$

$$= (f(x\varphi(gg')^{-1}\mu(g')\varphi(g))$$

$$f(x\varphi(gg')^{-1}\varphi(g')), gg'), \quad (4.4)$$

$$(f(x), g)^{-1} =$$

$$= (f(x\varphi(g^{-1})^{-1}\mu(g)^{-1}\varphi(g))^{-1}, g^{-1}), \quad (4.5)$$

где (4.3) — действие элемента группы $(f(x), g) \in \tilde{W}$ на функцию $v(x) \in V^X$, (4.4) — групповое умножение в $\tilde{W}$ и (4.5) — взятие обратного элемента.

Известны два универсальных, т.е. существующих для любых групп вне зависимости от их конкретных свойств, антигомоморфизма: $\mu(g) = 1$ и $\mu(g) = g^{-1}$.

Случай $\mu(g) = 1$ неинтересен, так как приводит к тривиальному расширению, т.е. прямому произведению групп: $\tilde{W} \cong F^X \times G$.

Антигомоморфизм $\mu(g) = g^{-1}$ приводит к полупрямому произведению групп F^X и G , называемому *сплетением групп F и G* :

$$\tilde{W} = F \wr G \cong F^X \rtimes G. \quad (4.6)$$

Что касается произвольной функции φ , в математической литературе при описании сплетений обычно используется выбор $\varphi(g) = g^{-1}$. В реализации наших алгоритмов мы используем два варианта: $\varphi(g) = g^{-1}$ и $\varphi(g) = 1$. В этих случаях выражения (4.3)–(4.5) для групповых операций получаются относительно компактными:

$$\underline{\varphi(g) = g^{-1}}:$$

$$v(x)(f(x), g) = v(xg^{-1})f(xg^{-1}),$$

$$(f(x), g)(f(x'), g') = (f(x)f'(xg), gg'),$$

$$(f(x), g)^{-1} = (f(xg^{-1})^{-1}, g^{-1}).$$

$$\underline{\varphi(g) = 1}:$$

$$v(x)(f(x), g) = v(xg^{-1})f(x),$$

$$(f(x), g)(f(x'), g') = (f(xg^{-1})f'(x), gg'),$$

$$(f(x), g)^{-1} = (f(xg)^{-1}, g^{-1}).$$

Сплетения играют важную роль в теории групп и имеют многочисленные приложения в других разделах математики [8, 9]. В частности, согласно универсальной теореме вложения Калужнина–Краснера [10], сплетение $A \wr B$ содержит в качестве подгруппы любое расширение группы A с помощью группы B , т.е. сплетение является универсальным объектом, содержащим все расширения.

Сплетение локальной F и пространственной G групп является естественной группой симметрий составных квантовых систем, гильбертово пространство которых подразумевает наличие геометрической структуры.

5. КВАНТОВЫЕ ЭНТРОПИИ

Энтропией вероятностного распределения $P = (p_1, \dots, p_n)$ называется вещественная функция $H(P)$, обладающая некоторыми естественными свойствами, в частности, аддитивностью на комбинации независимых распределений:

$$H(PQ) = H(P) + H(Q). \quad (5.1)$$

А. Реньи показал [11], что требуемым свойствам удовлетворяет семейство функций

$$H_\alpha(P) = \frac{1}{1-\alpha} \log \sum_{i=1}^n p_i^\alpha, \quad \alpha \geq 0, \quad \alpha \neq 1, \quad (5.2)$$

называемых энтропиями Реньи порядка α .

Квантовая версия семейства энтропий Реньи имеет вид

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \log \text{tr}(\rho^\alpha), \quad (5.3)$$

где ρ – матрица плотности квантового состояния.

Если условие (5.1), отказавшись от предположения о независимости P и Q , заменить более сильным условием $H(PQ) = H(P) + H(Q|P)$, то получится единственная функция, называемая энтропией Шэннона

$$H_1(P) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i,$$

которую также можно включить в семейство (5.2) с помощью предельного перехода $\alpha \rightarrow 1$. Квантовая версия энтропии Шэннона

$$S_1(\rho) = -\text{tr}(\rho \log \rho) \quad (5.4)$$

называется энтропией фон Неймана.

Семейство энтропий Реньи обладает свойством монотонности: $H_\alpha \geq H_\beta$, если $\alpha < \beta$.

Энтропия H_0 , равная логарифму числа элементов распределения, имеющих ненулевую вероятность: $H_0(P) = \log |\text{supp}(P)|$, называется *энтропией Хартли* или *max-энтропией* (поскольку $H_0 \geq H_\alpha$, для любых α).

Соответственно, *min-энтропией* называется энтропия $H_\infty(P) = -\log \max_i p_i$. Квантовая версия min-энтропии представляет интерес в физических задачах, в которых выражено доминирует одно из собственных значений матрицы плотности (состояния “близкие” к чистым).

Наиболее употребительной в физике является, обладающая “хорошими” статистическими свойствами, энтропия фон Неймана (5.4).

Заметим, что для чистого состояния, матрица плотности которого (3.4) имеет ровно одно, равное единице, собственное значение, любая энтропия из семейства (5.3) равна нулю.

В данной работе мы используем квантовую энтропию Реньи

$$S_2(\rho) = -\log \text{tr}(\rho^2),$$

которая называется *квадратичной энтропией* или *энтропией столкновений*. Вычисление этой энтропии, в отличие от вычислительно проблемных энтропии фон Неймана и min-энтропии, сводится к простой формуле

$$S_2(\rho) = -\log \left(\sum_{i=1}^n \rho_{ii}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |\rho_{ij}|^2 \right),$$

где $\rho = (\rho_{ij})$ – $n \times n$ матрица плотности.

Кроме того, 2-я энтропия Реньи привлекательна, с нашей точки зрения, по следующей причине. Теорема Глисона [12] устанавливает взаимно однозначное соответствие между вероятностными мерами на подпространствах гильбертова пространства и квантовыми состояниями в этом пространстве⁵. Согласно этой теореме, наиболее общее выражение для борновской вероятности имеет вид

$$\mathbf{P} = \text{tr}(\rho_O \rho_S), \quad (5.5)$$

где ρ_O и ρ_S – квантовые состояния “наблюдателя” и “наблюдаемой системы”, соответственно. Поскольку правило Борна это единственный фундаментальный источник вероятности в квантовой теории, представляется естественным связать состояние ρ с некоторой борновской вероятностью. С этой точки зрения 2-я энтропия Реньи это просто логарифм борновской вероятности $\mathbf{P} = \text{tr}(\rho^2)$ – “система наблюдает саму себя”. Это единственная возможность составить формулу глисоновского ти-

⁵ За исключением гильбертовых пространств размерности два.

па (5.5), имея в наличии только состояние ρ и не вводя дополнительные элементы в описание (типа “влияния среды” или наличия других систем).

6. КВАНТОВАЯ ЗАПУТАННОСТЬ В ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМАХ

В настоящее время активно разрабатывается идея о том, что геометрическое (физическое) пространство не фундаментально, а возникает за счет запутанности как приближенная феноменологическая структура внутри гильбертова пространства составной квантовой системы [13]–[15]. При этом метрика и топология определяется мерами запутанности между компонентами составной системы.

Для однородной составной системы матрица плотности наиболее общего квантового состояния в обозначениях раздела 3 имеет вид

$$\tilde{\rho}_X = \sum_{i,j=0}^{N-1} \tilde{\rho}_{ij} |\tilde{i}\rangle \langle \tilde{j}| \equiv \sum_{i,j=0}^{N-1} \tilde{\rho}_{ij} \otimes_{x \in X} |i_x\rangle \langle j_x|,$$

где связь между “локальными” $|i_x\rangle, |j_x\rangle$ и “глобальными” $|\tilde{i}\rangle, |\tilde{j}\rangle$ базисными векторами задается соотношением (3.3). Из правил квантовой механики следует, что статистическое поведение подсистемы, относящейся к подмножеству точек $A \subseteq X$, правильно описывается редуцированной матрицей плотности, получаемой взятием следа по всем компонентам, относящимся к точкам, не входящим в A :

$$\tilde{\rho}_A = \text{tr}_{X \setminus A} \tilde{\rho}_X.$$

Для краткости редуцированные матрицы плотности одноточечных и двухточечных подсистем мы будем обозначать символами типа $\tilde{\rho}_x$ и $\tilde{\rho}_{xy}$.

Представление о геометрии, как о феномене квантовой запутанности, основано на идее определять расстояния между точками пространства X через квантовые корреляции: чем выше корреляции, тем расстояния меньше. Существует множество мер квантовой запутанности и множество способов построения метрических пространств исходя из этих мер. Эти способы используют различные модельные упрощения и аппроксимации [13]–[15]. Чтобы не углубляться в эти упрощения, мы рассмотрим только наиболее часто используемую меру квантовых корреляций.

Типичной мерой запутанности для пары точек $\{x, y\} \subseteq X$ является *взаимная информация*

$$I(x, y) = S(\rho_x) + S(\rho_y) - S(\rho_{xy}). \quad (6.1)$$

Строго говоря, взаимная информация (6.1) имеет “достаточно хороший” смысл только для энтро-

пии фон Неймана $S_1(\rho)$. Для энтропий Реньи с $\alpha \neq 1$ могут возникать различные проблемы, например, выражение (6.1) может оказаться отрицательным. Однако это выражение всегда обращается в нуль на сепарабельных и отлично от нуля на запутанных парах подсистем и поэтому, в любом случае, может служить мерой запутанности.

Мы будем изучать эволюции величин $I(x, y)$ на ребрах $\{x, y\}$ полного графа с вершинами X для проекций онтических векторов в стандартное пространство и его подпространства.

7. ПРИМЕР КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ЗАПУТАННОСТИ

В качестве примера небольшой размерности построим однородную составную квантовую систему, исходя из следующих элементов

- $X \equiv \{0, 1, 2\}$ – геометрическое пространство из $M = 3$ точкам;
- $G = S_3$ – группа симметрий пространства X ;
- $V \equiv \{0, 1, 2\}$ – базис локального гильбертова пространства $\mathcal{H}$ размерности $n = 3$;
- $F = Z_3$ – группа локальных симметрий.

Эти данные являются входными для компьютерной программы, написанной на языке Си.

Программа конструирует гильбертово пространство составной системы, которое, в соответствии с (3.2), имеет структуру

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2.$$

Базис этого пространства мы будем отождествлять с онтическим множеством (2.1), поэтому $N = \dim \tilde{\mathcal{H}} = n^M = 27$.

Также конструируется сплетение (4.6), являющееся группой симметрий составной системы:

$$\tilde{W} = Z_3 \wr S_3 \cong (Z_3 \times Z_3 \times Z_3) \rtimes S_3. \quad (7.1)$$

Заметим, что группа (7.1) имеет, важную для описания конечных подгрупп унитарных групп, структуру (2.2).

Далее, с помощью алгоритма, описанного в [16]–[18], строится набор локальных проекторов, обеспечивающих разложение перестановочного представления локальной группы F на неприводимые подпредставления:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\text{rank} B_1 = \text{rank} B_2 = \text{rank} B_3 = 1.$$

Следующим шагом, программа, используя алгоритм, описанный в [19, 20], вычисляет неприводимые проекторы сплетения (7.1) в виде тензорных полиномов от локальных проекторов:

$$\tilde{B}_1 = B_1^{\otimes 3},$$

$$\tilde{B}_2 = B_2^{\otimes 3},$$

$$\tilde{B}_3 = B_3^{\otimes 3},$$

$$\tilde{B}_4 = B_1 \otimes B_2^{\otimes 2} + B_2 \otimes B_1 \otimes B_2 + B_2^{\otimes 2} \otimes B_1,$$

$$\tilde{B}_5 = B_1^{\otimes 2} \otimes B_3 + B_1 \otimes B_3 \otimes B_1 + B_3 \otimes B_1^{\otimes 2},$$

$$\tilde{B}_6 = B_1 \otimes B_3^{\otimes 2} + B_3 \otimes B_1 \otimes B_3 + B_3^{\otimes 2} \otimes B_1,$$

$$\tilde{B}_7 = B_1^{\otimes 2} \otimes B_2 + B_1 \otimes B_2 \otimes B_1 + B_2 \otimes B_1^{\otimes 2},$$

$$\tilde{B}_8 = B_2^{\otimes 2} \otimes B_3 + B_2 \otimes B_3 \otimes B_2 + B_3 \otimes B_2^{\otimes 2},$$

$$\tilde{B}_9 = B_2 \otimes B_3^{\otimes 2} + B_3 \otimes B_2 \otimes B_3 + B_3^{\otimes 2} \otimes B_2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{10} = & B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 + B_2 \otimes B_1 \otimes B_3 + \\ & + B_1 \otimes B_3 \otimes B_2 + B_3 \otimes B_1 \otimes B_2 + \\ & + B_2 \otimes B_3 \otimes B_1 + B_3 \otimes B_2 \otimes B_1, \end{aligned}$$

$$\text{rank} \tilde{B}_1 = \text{rank} \tilde{B}_2 = \text{rank} \tilde{B}_3 = 1,$$

$$\text{rank} \tilde{B}_4 = \text{rank} \tilde{B}_5 = \dots = \text{rank} \tilde{B}_9 = 3,$$

$$\text{rank} \tilde{B}_{10} = 6.$$

Эти проекторы определяют неприводимые инвариантные подпространства $\tilde{\mathcal{H}}_i = \tilde{B}_i \mathcal{H}$. Размерности этих подпространств равны рангам соответ-

ствующих проекторов: $\dim \tilde{\mathcal{H}}_i = \text{rank} \tilde{B}_i$. Таким образом, 27-мерное перестановочное представление сплетения (7.1) расщепляется на 3 одномерных, 6 трехмерных и одно 6-мерное неприводимые подпредставления.

Как отмечалось ранее, для построения квантовых моделей пригодны только подпространства, принадлежащие стандартному $(N-1)$ -мерному подпространству, т.е. в нашем случае, пространства $\tilde{\mathcal{H}}_2, \tilde{\mathcal{H}}_3, \dots, \tilde{\mathcal{H}}_{10}$ либо их прямые суммы.

С помощью формулы Глисона для борновской вероятности (5.5) можно показать, что для разбиения гильбертова пространства на взаимно ортогональные подпространства, вероятность обнаружить квантовое состояние в одном из подпространств пропорциональна его размерности. Поэтому наиболее предпочтительным является полное 26-мерное стандартное подпространство. Оператор проектирования в это подпространство в терминах тензорных полиномов от локальных проекторов имеет вид

$$\tilde{B}_{std} = \tilde{B}_2 + \tilde{B}_3 + \dots + \tilde{B}_{10} \equiv I_3^{\otimes 3} - B_1^{\otimes 3}. \quad (7.2)$$

Представление в виде тензорных полиномов позволяет свести вычисления с матрицами больших размерностей к последовательности операций с небольшими матрицами.

Для управления вычислениями создаются три множества:

1. Множество проекторов в подпространства, вычисления в которых представляют интерес. По умолчанию это множество состоит из одного элемента $\tilde{B}_{std}$.

2. Множество онтических векторов, эволюция которых будет вычисляться. Это множество задается либо вручную, либо строится с помощью генератора случайных чисел.

3. Множество элементов группы $\tilde{W}$, порождающих эволюции. Это множество также либо задается вручную, либо генерируется случайно. Элементы, порождающие эволюцию, являются дискретными аналогами гамильтонианов⁶.

Выбрав по одному элементу из каждого множества мы строим полную эволюцию. Вследствие конечности группы $\tilde{W}$ эволюция циклична. Длина цикла не превышает порядок группового элемента $\tilde{w} \in \tilde{W}$, порождающего эволюцию. При этом для каждого ребра $\{x, y\} \subseteq X$ полного графа

⁶ Любую унитарную матрицу можно представить в виде экспоненты эрмитовой, а соответствующую формулу $U = e^{iH}$ интерпретировать как унитарную эволюцию за один шаг по времени, порождаемую гамильтонианом H .

вычисляется выражение (6.1) (аналог взаимной информации для энтропии Реньи порядка 2).

Приведем примеры результатов вычислений для эволюций проекции запутанного оптического вектора

$$|000\rangle + |210\rangle + |120\rangle + |201\rangle + |011\rangle + |021\rangle + \\ + |221\rangle + |002\rangle + |102\rangle + |012\rangle + |112\rangle + |212\rangle$$

в стандартное подпространство. Здесь $|ijk\rangle$ – сокращение для $|i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle$.

Эволюция длины 3

t	g^t	$I(0, 1)$	$I(0, 2)$	$I(1, 2)$
0	()	1.34	0.80	0.66
1	()	1.34	0.80	0.66
2	()	1.34	0.80	0.66

Эволюция длины 6

t	g^t	$I(0, 1)$	$I(0, 2)$	$I(1, 2)$
0	()	1.34	0.80	0.66
1	(0, 2)	0.66	0.80	1.34
2	()	1.34	0.80	0.66
3	(0, 2)	0.66	0.80	1.34
4	()	1.34	0.80	0.66
5	(0, 2)	0.66	0.80	1.34

Эволюция длины 9

t	g^t	$I(0, 1)$	$I(0, 2)$	$I(1, 2)$
0	()	1.34	0.80	0.66
1	(0, 2, 1)	0.66	1.34	0.80
2	(0, 1, 2)	0.80	0.66	1.34
3	()	1.34	0.80	0.66
4	(0, 2, 1)	0.66	1.34	0.80
5	(0, 1, 2)	0.80	0.66	1.34
6	()	1.34	0.80	0.66
7	(0, 2, 1)	0.66	1.34	0.80
8	(0, 1, 2)	0.80	0.66	1.34

В этих таблицах эволюции в момент времени t вычисляются как степень $\tilde{w}^t$ некоторого элемента сплетения $\tilde{w} = (f(x), g) \in Z_3^X \rtimes S_3 \cong Z_3 \wr S_3$. Элемент пространственной группы g^t описывает “движение” точек пространства $X = \{0, 1, 2\}$ в процессе эволюции: () означает отсутствие движения, (0, 2) – перестановку двух точек, (0, 1, 2) – поворот “по часовой стрелке” и (0, 2, 1) – поворот “против часовой стрелки”.

Как видно из таблиц, эволюции взаимной информации полностью определяются элементами пространственной группы. Аналогичным образом ведут себя эволюции любых энтропий Реньи для любых подсистем составной системы. Это обусловлено тем, что рассматриваемая нами группа операторов эволюции имеет структуру сплетения.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы компьютерной алгебры и вычислительной теории групп использовались в [21] для исследования классических дискретных динамических систем и мезоскопических решеточных моделей, обладающих конечными группами симметрий. Геометрические структуры моделей, изучаемых в [21], являются заранее заданными и не зависящими от состояний системы и ее динамики дискретными пространствами, т.е., графами фиксированной структуры, обладающими подходящими симметриями. Квантовая теория предоставляет возможность “вывести геометрию” из более фундаментальных правил, связанных с квантовой запутанностью. Предлагаемый нами подход позволяет для заданных “начальных квантовых состояний” и “гамильтонианов” получить эволюцию во времени набора весов на ребрах полного графа, характеризующих запутанность между вершинами этого графа. Следующим естественным шагом является разработка алгоритмов выделения геометрических структур в этих наборах данных. В основе таких алгоритмов должно быть выделение подграфов полного графа с доминирующими весами ребер с последующим использованием методов типа *многомерного шкалирования* [22] для приближенного воспроизведения (в тех случаях, когда это возможно и имеет смысл⁷) непрерывных метрических пространств (по возможности невысокой размерности).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kornyak V.V.* Quantum models based on finite groups // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 2018. V. 965. 012023. arXiv:1803.00408 [physics.gen-ph]
2. *Kornyak V.V.* Modeling Quantum Behavior in the Framework of Permutation Groups // EPJ Web of Conferences. 2018. V. 173. 01007. arXiv:1709.01831 [quant-ph]
3. *Banks T.* Finite Deformations of Quantum Mechanics. 2020. 20. p. arXiv:2001.07662 [hep-th].

⁷ Геометрические структуры, возникающие внутри гильбертова пространства, существенно зависят от квантового состояния. Поэтому, например, в [15] рассматриваются лишь квантовые состояния, на которые наложены ограничения, обеспечивающие выполнение *голографического принципа* [23], согласно которому информация (энтропия) о физической системе внутри трехмерной области сосредоточена на двумерной границе этой области.

4. *Kornyak V.V.* Mathematical Modeling of Finite Quantum Systems. In MMCP 2011, Adam G. et al., Eds., LNCS, V. 7125. Springer, 2012. arXiv:1107.5675 [quant-ph]
5. *'t Hooft G.* The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics. *Fundamental Theories of Physics* 185. Springer, 2016. 296 p.
6. *Collins T.* On Jordan's theorem for complex linear groups // *J. Group Theory*. 2007. V. 10. № 4. P. 411–423.
7. *Кириллов А.А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978. 344 с.
8. *Meldrum J.D.P.* Wreath products of groups and semi-groups. New York: John Wiley & Sons Inc., 1995.
9. *James G.D., Kerber A.* The representation theory of the symmetric group. *Encyclopedia of Math. and its Appl.*, vol. 16. Reading: Addison-Wesley, 1981.
10. *Kaloujnine L., Krasner M.* Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes I. // *Acta Sci. Math. Szeged*. 1950. V. 13. P. 208–230. II. // *Acta Sci. Math. Szeged*. 1951. V. 14. P. 39–66. III. // *Acta Sci. Math. Szeged*. 1951. V. 14. P. 69–82.
11. *Rényi A.* On measures of information and entropy / *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability*. 1960. P. 547–561.
12. *Gleason A.M.* Measures on the closed subspaces of a Hilbert space // *Indiana Univ. Math. J.* 1957. V. 6. P. 885–893.
13. *Van Raamsdonk M.* Building up spacetime from quantum entanglement // *Gen. Relativ. Grav.* 2010. V. 42. P. 2323–2329.
14. *Maldacena J., Susskind L.* Cool horizons for entangled black holes // *Fortsch. Phys.* 2013. V. 61. № 9. P. 781–811.
15. *Cao C., Carroll S.M., Michalakis S.* Space from Hilbert space: Recovering geometry from bulk entanglement // *Phys. Rev. D*. 2017. V. 95. 024031.
16. *Kornyak V.V.* Splitting permutation representations of finite groups by polynomial algebra methods, Gerdt V.P. et al., Eds. CASC 2018, Cham: Springer, 2018. LNCS. V. 11077. P. 304–318.
17. *Корняк В.В.* Алгоритм разложения представлений конечных групп с помощью инвариантных проекторов // *Записки научных семинаров ПОМИ*. 2018. V. 468. P. 228–248.
18. *Kornyak V.V.* A new algorithm for irreducible decomposition of representations of finite groups // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. V. 1194. 012060.
19. *Kornyak V.V.* An Algorithm for Computing Invariant Projectors in Representations of Wreath Products. In *CASC 2019*. England M. et al., Eds. Cham: Springer, 2019. LNCS, vol. 11661. P. 300–314.
20. *Корняк В.В.* Вычисление неприводимых разложений перестановочных представлений сплетений конечных групп // *ЖВМиМФ*. 2020. v. 60. № 1. С. 96–108.
21. *Корняк В.В.* Дискретные динамические системы с симметриями: компьютерный анализ // *Программирование*. 2008. V. 34. № 2. С. 33–47.
22. *Borg I., Groenen P.J.F.* Modern Multidimensional Scaling: theory and applications. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2005.
23. *'t Hooft G.* Dimensional Reduction in Quantum Gravity. 1993. arXiv:gr-qc/9310026