ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2021, № 2, с. 28–33

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.421.6

СИМВОЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

С. А. Гутник[a,b,*], В. А. Сарычев[c,**]

[a] Московский государственный институт международных отношений, 119454 Москва, Проспект Вернадского, 76, Россия

[b] Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Институтский переулок, 9, Россия

[c] Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Миусская пл., 4, Россия

*E-mail: s.gutnik@inno.mgimo.ru

**E-mail: vas31@rambler.ru

Поступила в редакцию 27.06.2020 г.
После доработки 21.07.2020 г.
Принята к публикации 02.09.2020 г.

В статье предложены два наиболее простых метода определения положений равновесия спутника, движущегося в центральном ньютоновом силовом поле по круговой орбите под действием гравитационного момента. В первом методе применялись подходы линейной алгебры, во втором алгоритмы компьютерной алгебры. Положения равновесия спутника в орбитальной системе координат при заданных значениях главных центральных моментов инерции определяются корнями системы нелинейных алгебраических уравнений. Для определения равновесных решений проводилась декомпозиция системы алгебраических уравнений с применением методов линейной алгебры и алгоритмов построения базисов Гребнера. Положения равновесия спутника определялись путем исследования числа действительных корней алгебраических уравнений из полученных базисов Гребнера. С использованием предложенного подхода показано, что спутник с неравными главными центральными моментами инерции имеет на круговой орбите 24 положения равновесия.

DOI: 10.31857/S0132347421020060

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе представлены результаты применения методов линейной и компьютерной алгебры для исследования положений равновесия спутника – твердого тела, движущегося в центральном ньютоновом силовом поле по круговой орбите.

Данная задача решалась довольно сложными методами в 60-х годах прошлого века. Благодаря решению задачи о положениях равновесия спутника большое распространение получили гравитационные системы ориентации, принцип работы которых основан на том, что в центральном ньютоновом поле сил спутник с неравными главными центральными моментами инерции имеет на круговой орбите 24 положения равновесия, четыре из которых являются устойчивыми [1–3]. Подробное рассмотрение динамики спутников с гравитационными системами ориентации представлено в [4].

Исследование движения спутника в центральном ньютоновом силовом поле по круговой орбите под действием гравитационного момента представляет значительный практический интерес для создания систем управления ориентацией искусственных спутников Земли. Важным свойством гравитационных систем ориентации является возможность функционировать на орбите продолжительное время без расходования энергии и (или) рабочего тела.

В настоящей статье проводится подробное исследование положений равновесия спутника с применением алгебраических методов, которые ранее успешно использовались для изучения положений равновесия спутника-гиростата в работах [5–7], динамики спутника с аэродинамической системой ориентации [8], динамики движения связки двух тел [9]. Положения равновесия спутника определяются действительными корнями системы алгебраических уравнений. Для определения равновесных решений проводилась декомпозиция системы алгебраических уравнений с применением методов линейной алгебры и алгоритмов построения базисов Гребнера [10, 11]. Для исследования применялась система компьютерной алгебры Maple [12]. Найдены все положения равновесия спутника на круговой орбите.

Системы компьютерной алгебры широко используются при решении задач небесной механики, в частности, при исследовании задачи трех тел [13]. Так, с применением символьных вычислений были получены новые результаты при рассмотрении классической задачи трех тел с переменными массами в общем случае и поиске положений равновесия в ограниченной задаче четырех тел в работах [14–17].

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение спутника – твердого тела относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного момента. Для записи уравнений движения введем две правые прямоугольные системы координат с началом в центре масс O спутника. В орбитальной системе координат $OXYZ$ ось OZ направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника, ось OX направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс O спутника. Тогда ось OY будет направлена вдоль нормали к плоскости орбиты. В связанной со спутником системе координат $Oxyz$ – Ox, Oy, Oz – главные центральные оси инерции спутника.

Определим ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат с использованием самолетных углов тангажа α, рыскания β и крена γ. Направляющие косинусы осей Ox, Oy, Oz в орбитальной системе координат выражаются через самолетные углы с помощью соотношений [4]:

$$\begin{gathered}
a_{11} = \cos(x, X) = \cos\alpha\cos\beta, \\
a_{12} = \cos(y, X) = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma, \\
a_{13} = \cos(z, X) = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma, \\
a_{21} = \cos(x, Y) = \sin\beta, \\
a_{22} = \cos(y, Y) = \cos\beta\cos\gamma, \\
a_{23} = \cos(z, Y) = -\cos\beta\sin\gamma, \\
a_{31} = \cos(x, Z) = -\sin\alpha\cos\beta, \\
a_{32} = \cos(y, Z) = \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma, \\
a_{33} = \cos(z, Z) = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.
\end{gathered} \tag{1}$$

При малых колебаниях спутника углу тангажа соответствует поворот вокруг оси OY, углу рыскания – поворот вокруг оси OZ, углу крена – поворот вокруг оси OX.

Тогда уравнения движения спутника относительно центра масс запишутся в виде [18]:

$$\begin{gathered}
A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} = 0, \\
B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} = 0, \\
C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} = 0,
\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}
p = \overline{p} + \omega_0 a_{21}, \quad \overline{p} = \dot{\alpha}a_{21} + \dot{\gamma}, \\
q = \overline{q} + \omega_0 a_{22}, \quad \overline{q} = \dot{\alpha}a_{22} + \dot{\beta}\sin\gamma, \\
r = \overline{r} + \omega_0 a_{23}, \quad \overline{r} = \dot{\alpha}a_{23} + \dot{\beta}\cos\gamma.
\end{gathered} \tag{3}$$

В уравнениях (2), (3) A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника; p, q, r – проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси Ox, Oy, Oz; ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите. Точкой обозначено дифференцирование по времени t.

Для системы уравнений движения (2), (3) справедлив обобщенный интеграл энергии [19, 20]

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}(A\overline{p}^2 + B\overline{q}^2 + C\overline{r}^2) + \\
+ \frac{3}{2}\omega_0^2((A - C)a_{31}^2 + (B - C)a_{32}^2) + \\
+ \frac{1}{2}\omega_0^2((B - A)a_{21}^2 + (B - C)a_{23}^2) = \text{const}.
\end{gathered} \tag{4}$$

3. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Пусть все три главные центральные моменты инерции спутника различны ($A \neq B \neq C$), тогда, положив в уравнениях (2) и (3) $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$, $\beta = \beta_0 = \text{const}$, $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$, получим уравнения

$$\begin{gathered}
a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} = 0, \\
a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31} = 0, \\
a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32} = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

позволяющие определить положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. С учетом (1) систему (5) можно рассматривать как систему трех уравнений с неизвестными α_0, β_0 и γ_0.

Другой более удобный для исследования способ замыкания уравнений (5) заключается в добавлении шести условий ортогональности направляющих косинусов

$$\begin{gathered}
a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 - 1 = 0, \\
a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 - 1 = 0, \\
a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Уравнения (5) и (6) образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно шести направляющих косинусов, определяющих положения равновесия спутника. Для этой системы уравнений ставится следующая задача: определить все девять направляющих косинусов, т.е. все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. После нахождения шести направляющих косинусов a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} оставшиеся направляющие косинусы a_{11}, a_{12}, a_{13}, с учетом того, что каждый элемент направляющих косинусов равен своему алгебраическому дополнению, можно определить по формулам

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},\\
a_{12} &= a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, \qquad (7)\\
a_{13} &= a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.
\end{aligned}
$$

Величины a_{11}, a_{12}, a_{13} не обращаются в нуль одновременно.

Решения системы уравнений (5), (6) неоднократно исследовались в научной литературе. Так в работах [1, 2] было показано существование 24 положений равновесия спутника в орбитальной системе координат. В работах [1, 2] решения системы (5) были определены с использованием выражений направляющих косинусов через эйлеровы углы. В явном и довольно сложном виде эти положения равновесия были получены в работе [3].

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА

Уравнения (5), (6) позволяют определить все положения равновесия спутника. Для получения равновесных решений используем вначале подход, основанный на методах линейной алгебры.

Рассмотрим второе и третье уравнения системы (5) относительно переменных a_{21}, a_{31}. Эти уравнения образуют однородную подсистему, определитель которой равен $\Delta_1 = 3(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) = 3a_{11}$. Если $a_{11} \neq 0$, то $a_{21} = 0$, $a_{31} = 0$ и из уравнений (7) следует $a_{12} = a_{13} = 0$, $a_{11}^2 = 1$.

Уравнения (5), (6) с учетом выражений $a_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} = a_{11}a_{33}$, $a_{23} = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} = -a_{11}a_{32}$, полученных из условий ортогональности, могут быть записаны в более простом виде

$$
\begin{aligned}
a_{32}a_{33} &= 0, \qquad (8)\\
a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

Из (8) следует, что либо $a_{32} = 0$, $a_{33}^2 = 1$, либо $a_{32}^2 = 1$, $a_{33} = 0$. Таким образом, в случае $a_{11}^2 = 1$ получим 8 равновесных решений системы (5), (6), входящих в следующие две группы:

$$
a_{11}^2 = a_{33}^2 = 1, \quad a_{22} = a_{11}a_{33}, \qquad (9)
$$

$$
a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0;
$$

$$
a_{11}^2 = a_{32}^2 = 1, \quad a_{23} = -a_{11}a_{32}, \qquad (10)
$$

$$
a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{22} = a_{31} = a_{33} = 0.
$$

Аналогично проведенному выше исследованию для случая $a_{11}^2 = 1$ рассмотрим первое и третье уравнения системы (5) относительно переменных a_{22}, a_{32}. Эти уравнения образуют однородную подсистему, определитель которой равен $\Delta_2 = -3(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) = -3a_{12}$. Если $a_{12} \neq 0$, то $a_{22} = 0, a_{32} = 0$ и из уравнений (7) следует $a_{11} = a_{13} = 0, a_{12}^2 = 1$. При этих условиях получим из уравнений (5), (6) следующие 8 равновесных решений, входящих в две группы:

$$
a_{12}^2 = a_{33}^2 = 1, \quad a_{21} = -a_{12}a_{33}, \qquad (11)
$$

$$
a_{11} = a_{13} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0;
$$

$$
a_{12}^2 = a_{31}^2 = 1, \quad a_{23} = a_{12}a_{31}, \qquad (12)
$$

$$
a_{11} = a_{13} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0.
$$

Рассматривая далее первое и второе уравнения системы (5) относительно переменных a_{23}, a_{33} как однородную подсистему, определитель которой равен $\Delta_3 = -3(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = 3a_{13}$, получим при условии $a_{13} \neq 0$ равенства $a_{23} = 0$, $a_{33} = 0$. Тогда из уравнений (7) следует, что $a_{11} = a_{12} = 0$, $a_{13}^2 = 1$. При этих условиях получим из уравнений (5), (6) следующие 8 равновесных решений, входящих в две группы:

$$
a_{13}^2 = a_{32}^2 = 1, \quad a_{21} = a_{13}a_{32}, \qquad (13)
$$

$$
a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = a_{33} = 0;
$$

$$
a_{13}^2 = a_{31}^2 = 1, \quad a_{22} = -a_{13}a_{31}, \qquad (14)
$$

$$
a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{33} = 0.
$$

Отметим, что каждая из 6 групп решений (9)–(14) определяет 4 равновесных решения (4 положения равновесия в орбитальной системе координат). Все эти 24 решения соответствуют различным случаям совпадения главных центральных осей инерции спутника с осями орбитальной системы координат. Таким образом, получим, что спутник с различными главными центральными моментами инерции имеет на круговой орбите 24 положения равновесия.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Для нахождения решений системы алгебраических уравнений (5), (6) рассматривалась возможность применения алгоритмов построения базисов Гребнера [10, 11]. Метод построения базиса Гребнера представляет собой алгоритмическую процедуру для полного приведения задачи в случае системы полиномов от многих переменных к рассмотрению полинома от одной переменной. Алгоритмы построения базиса Гребнера реализованы в большинстве современных систем компьютерной алгебры. Исследование проводилось с использованием реализованного в системе компьютерной алгебры Maple 17 [21] пакета построения базисов Гребнера Groebner[Basis]. Построим базис Гребнера для 6 полиномов f_i, которые представляют собой левые части уравнений системы (5), (6) с 6 направляющими косинусами a_{ij} $(i = 2,3,\ j = 1,2,3)$, используя опцию лексикографического упорядочения по переменным `plex`:

```
G:=map(factor,Groebner[Basis]([f1,…,f6], plex(a21,…,a33))).
```

При использовании данной команды система выполняет алгоритм построения базиса Гребнера FGLM, разработанный Фожером, Джиани, Лазардом и Морой (Faugere, Gianni, Lazard, Mora) [22]. Построенный базис Гребнера состоит из 18 полиномов следующего вида:

$$
\begin{gathered}
1.\ a_{33}(a_{33}^2-1)=0, \quad 2.\ a_{32}(a_{32}^2-1)=0,\\
3.\ a_{23}(a_{23}^2-1)=0, \quad 4.\ a_{22}(a_{22}^2-1)=0,\\
5.\ a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2-1=0,\\
6.\ a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2-1=0,\\
7.\ a_{31}(a_{22}^2+a_{23}^2-1)=0,\\
8.\ a_{21}(a_{32}^2+a_{33}^2-1)=0,\\
9.\ 1-a_{23}^2(1-a_{32}^2)-\\
-a_{22}^2(1-a_{33}^2)-a_{33}^2-a_{32}^2=0,\\
10.\ a_{32}a_{33}=0, \quad 11.\ a_{31}a_{33}=0, \quad 12.\ a_{31}a_{32}=0,\\
13.\ a_{23}a_{33}=0, \quad 14.\ a_{22}a_{32}=0, \quad 15.\ a_{22}a_{23}=0,\\
16.\ a_{22}a_{21}=0, \quad 17.\ a_{21}a_{23}=0, \quad 18.\ a_{21}a_{31}=0.
\end{gathered} \tag{15}
$$

Рассмотрим первое уравнение (15) по переменной $a_{33} : a_{33}(a_{33}^2-1) = 0$. При условии $a_{33}^2 = 1$ $(a_{31} = a_{32} = a_{23} = 0)$ из уравнений (5) следуют равенства $a_{22}a_{23} = 0$, $a_{22}a_{21} = 0$, $a_{21}a_{23} = 0$. Эти равенства также входят в соотношения 15, 16 и 17 базиса Гребнера (15). В этом случае возможны 8 решений, когда либо $a_{21}^2 = 1$, либо $a_{22}^2 = 1$, которые в точности совпадают с рассмотренными выше группами решений (9) и (11).

Из второго уравнения (15) также можно получить две группы по 4 решения при условии $a_{32}^2 = 1$ $(a_{31} = a_{33} = a_{22} = 0)$, когда либо $a_{21}^2 = 1$, либо $a_{23}^2 = 1$, которые также следуют из третьего равенства (15) и совпадают с рассмотренными выше группами решений (10) и (13).

Построим далее базис Гребнера, используя другой лексикографический порядок, чтобы получить полином по переменной a_{31} –

```
plex(a21,a22,a23,a32,a33,a31):
```

$$
\begin{gathered}
1.\ a_{31}(a_{31}^2-1)=0, \quad 2.\ a_{32}(a_{32}^2-1)=0,\\
3.\ a_{23}(a_{23}^2-1)=0, \quad 4.\ a_{22}(a_{22}^2-1)=0,\\
5.\ a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2-1=0,\\
6.\ a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2-1=0,\\
7.\ a_{31}(a_{22}^2+a_{23}^2-1)=0,\\
8.\ a_{23}(a_{31}^2+a_{32}^2-1)=0, \quad 9.\ a_{21}a_{31}=0,\\
10.\ a_{32}a_{33}=0, \quad 11.\ a_{31}a_{33}=0, \quad 12.\ a_{31}a_{32}=0,\\
13.\ a_{23}a_{33}=0, \quad 14.\ a_{22}a_{32}=0,\\
15.\ a_{22}a_{23}=0, \quad 16.\ a_{22}a_{21}=0, \quad 17.\ a_{21}a_{23}=0.
\end{gathered} \tag{16}
$$

Вариант, когда $a_{31} = 0$ был рассмотрен в предыдущем случае. Рассмотрим далее случай $a_{31}^2 = 1$ $(a_{32} = a_{33} = a_{21} = 0)$. Из уравнений (5) следуют равенства $a_{22}a_{23} = 0$, $a_{22}a_{21} = 0$, $a_{21}a_{23} = 0$. Эти равенства также входят в соотношения 15, 16 и 17 базиса Гребнера (16). В этом случае возможны 8 решений, когда либо $a_{22}^2 = 1$, либо $a_{23}^2 = 1$, которые следуют из третьего и четвертого равенства (16). Эти решения в точности совпадают с рассмотренными выше группами решений (12) и (14).

Из построенных базисов Гребнера следует, что в каждый из 3-х случаев, когда $a_{31}^2 = 1$, $a_{32}^2 = 1$, $a_{33}^2 = 1$, входит 8 положений равновесия спутника. Всего существуют 24 положения равновесия спутника на круговой орбите (9)–(14). Такой же результат можно получить, построив базис Гребнера, применяя лексикографический порядок по переменным a_{21}, a_{22}, a_{23} и рассмотрев случаи, когда $a_{21}^2 = 1$, $a_{22}^2 = 1$, $a_{23}^2 = 1$.

Используя левую часть обобщенного интеграла энергии (4) в качестве функции Ляпунова, можно показать, что при условии

$$B > A > C \tag{17}$$

одно из решений (9) ($a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$), $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$ будет устойчивым [19, 20]. Легко убедиться в том, что достаточным условиям устойчивости (17) удовлетворяют и оставшиеся три решения (9). Таким образом, из 24 положений равновесия существуют четыре устойчивых равновесия, для которых ось максимального момента инерции спутника совпадает с нормалью к плоскости орбиты, а ось минимального момента инерции спутника совпадает с радиусом-вектором орбиты. Решения (10)–(14) условиям (17) не удовлетворяют.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование положений равновесия спутника, движущегося по круговой орбите, с применением методов линейной и компьютерной алгебры.

Метод построения базиса Гребнера является универсальным методом, применяемым для решения систем алгебраических уравнений. Существенным ограничением для применения данного метода является экспоненциальная сложность алгоритмов вычисления базиса Гребнера. В нашем случае время построения базиса Гребнера на персональном компьютере с 8 Гигабайт оперативной памяти и процессором Intel Core i7 2,8 ГГц составило всего около 0.01 сек. Анализ полиномов, входящих в базис Гребнера, позволяет только на основе их вида сделать вывод, что исходная система алгебраических уравнений (5), (6) имеет лишь такие решения, когда направляющие косинусы, определяющие ориентацию спутника, могут принимать значения либо 0, либо 1, то есть возможны только такие решения, когда оси орбитальной и связанной систем совпадают.

В первом методе задача была решена на основе выделения в исходной системе линейных подсистем. При этом нам приходилось делать предположение об отличии от нуля определителей этих линейных подсистем. Случаи равенства нулю данных определителей, когда возникает возможность параметрических решений нами не рассматривалась. При использовании метода построения базиса Гребнера такая задача не возникает.

Применение методов компьютерной алгебры позволяет в достаточно простой форме получить решение классической задачи механики космического полета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sarychev V.A.* Asymptotically Stable Stationary Rotational Motions of a Satellite. Proc. 1st IFAC Symp. on Automatic Control in Space. N. Y. Plenum Press, 1966. P. 277–286.
2. *Likins P.W., Roberson R.E.* Uniqueness of Equilibrium Attitudes for Earth-Pointing Satellites // J. Astronaut Sci. 1966. V. 13. № 2. P. 87–88.
3. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: изд. Московского университета, 1975. 308 с.
4. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Серия Исследование космического пространства. М.: ВИНИТИ, 1978. Т. 11. 224 с.
5. *Гутник С.А., Сантуш Л., Сарычев В.А., Силва А.* Динамика спутника-гиростата, подверженного действию гравитационного момента. Положения равновесия и их устойчивость // Изв. РАН. ТИСУ. 2015. № 3. С. 142–155.
6. *Гутник С.А., Сарычев В.А.* Символьно-численные методы исследования положений равновесия спутника-гиростата // Программирование. 2014. № 3. С. 49–58.
7. *Гутник С.А., Сарычев В.А.* Применение методов компьютерной алгебры для исследования стационарных движений спутника-гиростата // Программирование. 2017. № 2. С. 35–44.
8. *Gutnik S.A., Sarychev V.A.* Symbolic-numeric simulation of satellite dynamics with aerodynamic attitude control system. Lect. Notes Comput. Sci., Springer, Cham. 2018. V. 11077. P. 214–229.
9. *Гутник С.А., Сарычев В.А.* Применение методов компьютерной алгебры для исследования динамики системы двух связанных тел на круговой орбите // Программирование. 2019. № 2. С. 32–40.
10. *Buchberger B.* Theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms // SIGSAM Bull. 1976. V. 10. № 3. P. 19–29.
11. *Бухбергер Б.* Базисы Грёбнера. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов. Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления. М.: Мир, 1986. С. 331–372.
12. *Char B.W., Geddes K.O., Gonnet G.H., Monagan M.B., Watt S.M.* Maple Reference Manual. Watcom Publications Limited, Waterloo, Canada, 1992.
13. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 295 с.
14. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М.* Символьные вычисления в исследованиях проблемы трех тел с переменными массами // Программирование. 2014. № 2. С. 51–59.
15. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М., Иманова Ж.У.* Исследование ограниченной задачи трех тел с переменными массами методами компьютерной алгебры // Программирование. 2017. № 5. С. 18–23.

16. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Шомшекова С.А.* Применение компьютерной алгебры в исследованиях двухпланетной задачи трех тел с переменными массами // Программирование. 2019. № 2. С. 58–65.

17. *Будько Д.А., Прокопеня А.Н.* Символьно-численные методы поиска положений равновесия в ограниченной задаче четырех тел // Программирование. 2013. № 2. С. 30–37.

18. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.

19. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс // Искусственные спутники Земли. 1958. Вып. 1. С. 25–43.

20. *Белецкий В.В.* О либрации спутника // Искусственные спутники Земли. 1959. Вып. 3. С. 13–31.

21. Maple online help: http://www.maplesoft.com/support/help/

22. *Faugere J., Gianni P., Lazard P., Mora T.* Efficient computation of zero-dimensional Grobner bases by change of ordering // J. Symbolic Comput. 1993. V. 16. P. 329–344.