ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2021, № 1, с. 56–64

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 517.9+004.4

ПОИСК РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ МАШИНЫ АТВУДА С ДВУМЯ КОЛЕБЛЮЩИМИСЯ ГРУЗАМИ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

© 2021 г. А. Н. Прокопеня[a],*

[a] *Варшавский университет естественных наук – SGGW, Польша 02-776 Варшава, ул. Новоурсыновска, 159*

**E-mail: alexander_prokopenya@sggw.pl*

Поступила в редакцию 27.08.2020 г.
После доработки 02.09.2020 г.
Принята к публикации 12.09.2020 г.

Обсуждается проблема поиска равновесных состояний машины Атвуда, в которой шкив конечного радиуса заменяется двумя отдельными малыми шкивами и оба груза могут колебаться в вертикальной плоскости. Получены дифференциальные уравнения движения системы и вычислены их решения в виде степенных рядов по малому параметру. Показано, что в случае грузов одинаковой массы равновесное положение r = const системы существует только при одинаковых амплитудах и частотах колебаний грузов и сдвиге фаз $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$. Кроме того, возможно состояние динамического равновесия, когда оба груза совершают колебания с одинаковыми амплитудами и частотами, а сдвиг фаз составляет $\alpha = \pm\pi/2$. При этом длины маятников также совершают колебания около некоторого равновесного значения. Сравнение полученных результатов с соответствующими численными решениями уравнений движения подтверждает их корректность. Все необходимые вычисления выполняются с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

DOI: 10.31857/S013234742101009X

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическая машина Атвуда (см. [1]), в которой один из грузов может колебаться в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, представляет собой консервативную механическую систему с двумя степенями свободы, которая была предметом исследования многих работ (см. [2–7]). Следует отметить, что учет колебаний груза приводит к значительному усложнению уравнений движения системы и их общее решение не может быть записано в символьной форме. Численное исследование уравнений движения показывает, что машина Атвуда с одним колеблющимся грузом демонстрирует весьма интересное поведение и может совершать различные виды движения, например, квазипериодическое и хаотическое движение (см. [3, 5, 7]).

Заметим, что колебания груза приводят к возрастанию средней силы натяжения нити, причем ее величина оределяется амплитудой колебаний (см. [8]). Поэтому при небольшой разнице масс и соответствующей амплитуде колеблющийся груз меньшей массы может тянуть более тяжелый груз вверх, что невозможно в отсутствие колебаний. С другой стороны, при заданной разнице масс можно выбрать такие начальные условия, при которых система будет находиться в состоянии динамического равновесия, когда груз большей массы уравновешивается колеблющимся грузом меньшей массы. В таком случае более тяжелый груз совершает поступательное движение и также колеблется около некоторого равновесного положения, а груз меньшей массы ведет себя как маятник, длина которого совершает малые колебания. При этом наблюдается резонанс частот вида 2 : 1, т.е. частота колебаний длины маятника в два раза превышает частоту колебаний угловой переменной. Соответствующее равновесное состояние системы описывается периодическим решением уравнений движения, построенным в [9].

Если оба груза имеют одинаковые массы ($m_1 = m_2$), то в отсутствие колебаний система может находиться в равновесии при любом положении грузов. Если же один из грузов совершает колебания, то равновесное состояние машины Атвуда не существует, поскольку колеблющийся груз будет двигаться вниз и тянуть второй груз вверх даже при малой амплитуде колебаний. Однако можно ожидать, что рассматриваемая система может находиться в состоянии динамического равновесия,

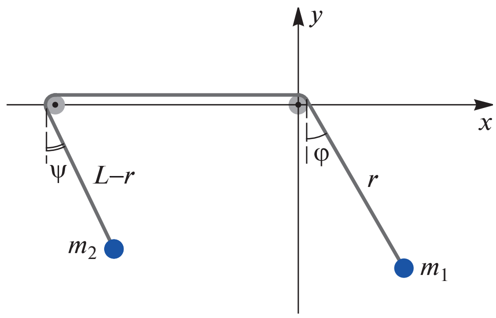

Рис. 1. Машина Атвуда с двумя колеблющимися грузами.

когда второй груз также совершает колебания. Численное решение уравнений движения машины Атвуда с двумя колеблющимися грузами показало, что такое состояние системы существует, если оба груза совершают синфазные колебания или колеблются в противофазе с одинаковыми амплитудами и частотами (см. [10]).

Целью данной работы является поиск решений уравнений движения машины Атвуда с двумя колеблющимися грузами одинаковой массы, определяющих состояния динамического равновесия системы, когда длина маятника r совершает малые колебания около некоторого равновесного значения, а также определение условий, при которых такие решения существуют. Поскольку уравнения движения системы существенно нелинейны и записать их точное решение не представляется возможным, будем искать приближенные решения в виде степенных рядов. Отметим, что построение и исследование таких решений обычно связано с выполнением весьма громоздких символьных вычислений, которые удобно выполнять с помощью систем компьютерной алгебры (см., напр., [11–15]). В данной работе для выполнения всех расчетов и визуализации полученных результатов используется система компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* [16].

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассматривается машина Атвуда, в которой шкив конечного радиуса заменяется двумя отдельными малыми шкивами и оба груза могут колебаться в вертикальной плоскости (рис. 1). Такая модификация классической машины Атвуда (см. [1]) не изменяет ее физической природы, но позволяет исключить влияние размеров шкива и сосредоточиться на исследовании влияния колебаний на движение системы.

Рассматриваемая система имеет три степени свободы, а ее функция Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + \frac{m_2}{2}(\dot r^2 + (L-r)^2\dot\psi^2) + \\ + m_1 g r\cos\varphi + m_2 g(L-r)\cos\psi,\end{aligned} \tag{2.1}$$

где точка над символом означает полную производную соответствующей функции по времени, g – ускорение свободного падения, r и $(L - r)$ – расстояния между шкивами и грузами m_1 и m_2 соответственно, а углы φ и ψ определяют отклонения грузов от вертикали (см. рис. 1). Выражение (2.1) записано в предположении, что радиусы шкивов пренебрежимо малы и изменением длины нити r и $(L - r)$ при колебаниях грузов за счет наматывании нити на шкив можно пренебречь.

Используя функцию Лагранжа (2.1) и выполняя дифференцирование с помощью встроенной функции D системы *Mathematica* (см. [16]), получаем уравнения движения в виде

$$r\ddot\varphi = -g\sin\varphi - 2\dot r\dot\varphi \tag{2.2}$$

$$(L-r)\ddot\psi = -g\sin\psi + 2\dot r\dot\psi, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)\ddot r = m_1 g\cos\varphi - m_2 g\cos\psi + \\ + m_1 r\dot\varphi^2 - m_2(L-r)\dot\psi^2.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Для удобства дальнейших вычислений введем безразмерные переменные

$$r^*(t^*) = r(t)/R_0, \quad t^* = t\sqrt{g/R_0}, \tag{2.5}$$

где R_0 – длина нити r в положении равновесия $\varphi = 0$, $\psi = 0$ в отсутствие колебаний при $m_1 = m_2$. Далее безразмерные переменные r^*, t^* будем обозначать обычным образом через r, t. Тогда уравнения движения (2.2)–(2.4) принимают вид

$$r\ddot\varphi = -\sin\varphi - 2\dot r\dot\varphi, \tag{2.6}$$

$$(k-r)\ddot\psi = -\sin\psi + 2\dot r\dot\psi, \tag{2.7}$$

$$2\ddot r = \cos\phi - \cos\psi + r\dot\varphi^2 - (k-r)\dot\psi^2, \tag{2.8}$$

где учтено равенство масс тел и введен параметр $k = L/R_0 > 1$.

Легко видеть, что при $r = \mathrm{const}$ уравнения (2.6), (2.7) сводятся к двум независимым уравнениям колебаний математических маятников длиной r и $k - r$ соответственно:

$$\begin{gathered}\ddot{\varphi} + \frac{1}{r}\sin\varphi = 0,\\ \ddot{\psi} + \frac{1}{k-r}\sin\psi = 0.\end{gathered} \qquad (2.9)$$

Уравнения (2.9) имеют равновесные решения $\varphi = 0$, $\psi = 0$, подстановка которых в уравнение (2.8) обращает его в тождество при $r = \mathrm{const}$. Это ожидаемый результат, поскольку в отсутствие колебаний система может находиться в равновесии при любом значении $r = \mathrm{const}$. Кроме того, уравнение (2.8) имеет решение $r = \mathrm{const}$ и в случае ненулевых решений уравнений (2.9), которые выражаются через эллиптические функции (см., например, [17]), если выполняется условие $\varphi(t) = \pm\psi(t)$. Это возможно при $k = 2r$, когда оба маятника совершают нелинейные колебания одинаковой частоты и амплитуды (см. [10]), а их фазы совпадают ($\varphi(t) = \psi(t)$) или противоположны ($\varphi(t) = -\psi(t)$).

Однако система (2.6)–(2.8) может иметь и другие решения, которые описывают связанные колебания двух математических маятников переменной длины. Целью данной работы является поиск решений системы (2.6)–(2.8), описывающих состояния динамического равновесия, когда оба маятника совершают нелинейные колебания, а функция $r(t)$ совершает малые квазипериодические колебания около некоторого равновесного значения.

Отметим, что уравнения (2.6)–(2.8) являются нелинейными и существование квазипериодических движений грузов в окрестности состояний динамического равновесия, которыми мы интересуемся в данной работе, возможно только вследствие нелинейного взаимодействия между степенями свободы системы.

3. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Напомним, что колебания математического маятника приводят к увеличению средней силы натяжения нити, причем ее величина определяется амплитудой колебаний (см. [8]). Поскольку мы рассматриваем машину Атвуда с двумя колеблющимися грузами одинаковой массы, можно ожидать, что при одинаковых амплитудах колебаний система будет находиться в состоянии динамического равновесия, при котором переменные $r(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ совершают малые колебания около некоторых равновесных значений и являются квазипериодическими функциями времени. Поскольку уравнения движения (2.6)–(2.8) являются нелинейными, частоты колебаний маятников будут зависеть от амплитуд (см., например, [18]). Далее будем считать, что амплитуды колебаний грузов определяются параметром ε, который предполагается малым, но конечным. При $\varepsilon \to 0$, функции $r(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ должны сводиться к равновесному решению $r = 1$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Для удобства вычислений произведем замену переменных

$$\begin{gathered}r(t) \to 1 + \varepsilon r(t),\\ \varphi(t) \to \sqrt{\varepsilon}\varphi(t), \quad \psi(t) \to \sqrt{\varepsilon}\psi(t),\end{gathered} \qquad (3.1)$$

и будем предполагать, что $r(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ являются ограниченными осциллирующими функциями. Подставляя (3.1) в (2.6)–(2.8) и заменяя тригонометрические функции их разложениями в степенные ряды с точностью до пятого порядка включительно, перепишем уравнения движения в виде, удобном для применения теории возмущений (см. [18, 19]):

$$\ddot{\varphi} + \varphi = -\varepsilon\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} - \frac{1}{6}\varphi^3\right) - \frac{\varepsilon^2}{120}\varphi^5, \qquad (3.2)$$

$$(k-1)\ddot{\psi} + \psi = \varepsilon\left(r\ddot{\psi} + 2\dot{r}\dot{\psi} + \frac{1}{6}\psi^3\right) - \frac{\varepsilon^2}{120}\psi^5, \qquad (3.3)$$

$$\begin{gathered}\ddot{r} = -\frac{1}{4}(\varphi^2 - \psi^2) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}(k-1)\dot{\psi}^2 + \\ + \frac{\varepsilon}{2}\left(r(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{24}(\varphi^4 - \psi^4)\right).\end{gathered} \qquad (3.4)$$

Решение системы (3.2)–(3.4) будем искать в виде степенных рядов по малому параметру ε:

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + \ldots, \qquad (3.5)$$

$$\psi(t) = \psi_0(t) + \varepsilon\psi_1(t) + \varepsilon^2\psi_2(t) + \ldots, \qquad (3.6)$$

$$r(t) = r_0(t) + \varepsilon r_1(t) + \varepsilon^2 r_2(t) + \ldots. \qquad (3.7)$$

Функции $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$ в разложениях (3.5), (3.6) представляют собой решения уравнений (3.2), (3.3) при $\varepsilon = 0$ и без ограничения общности рассуждений могут быть представлены в виде

$$\varphi_0(t) = \cos(\omega_1 t), \quad \psi_0(t) = \cos(\omega_2 t + \alpha), \qquad (3.8)$$

где начальная фаза переменной $\varphi_0(t)$ равна нулю, а постоянная α определяет разность фаз колебаний маятников в момент времени $t = 0$. Амплитуды колебаний в (3.8) одинаковы, что обеспечивает равенство нулю постоянной составляющей функции в правой части уравнения (3.4) и не приводит к появлению линейной или квадратичной зависимости от времени функции $r_0(t)$ в (3.7), которая является решением уравнения (3.4) при $\varepsilon = 0$. Напомним, что интересующее нас решение (3.7) описывает малые колебания длины $r(t)$ около равновесного значения $r = 1$, а амплитуды колебаний переменных $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются параметром ε (см. (3.1)).

Частоты колебаний ω_1, ω_2 также можем представить в виде степенных рядов по ε:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{10} + \varepsilon\omega_{11} + \varepsilon^2\omega_{12} + \ldots, \\ \omega_2 &= \omega_{20} + \varepsilon\omega_{21} + \varepsilon^2\omega_{22} + \ldots. \end{aligned} \tag{3.9}$$

где частоты гармонических колебаний $\omega_{10} = 1, \omega_{20} = 1/\sqrt{k-1}$ определяются уравнениями (3.2), (3.3) при $\varepsilon = 0$. Коэффициенты $\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{12}, \omega_{22}, \ldots$ в разложениях (3.9) будут определяться из условия, что в правой части уравнений (3.2) и (3.3) отсутствуют резонансные члены, пропорциональные $\cos(\omega_1 t)$, $\sin(\omega_1 t)$ и $\cos(\omega_2 t)$, $\sin(\omega_2 t)$ соответственно, которые приводят к неограниченному возрастанию амплитуды колебаний (см. [17, 18]). Поскольку левые стороны уравнений (3.2), (3.3) должны обращаться строго в нуль при подстановке в них функций вида (3.8) с точными значениями частот (3.9), эти уравнения перепишем в эквивалентном виде

$$\begin{gathered} \ddot{\varphi} + \omega_1^2\varphi = (\omega_1^2 - 1)\varphi - \\ - \varepsilon\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} - \frac{1}{6}\varphi^3\right) - \frac{\varepsilon^2}{120}\varphi^5, \end{gathered} \tag{3.10}$$

$$\begin{gathered} \ddot{\psi} + \omega_2^2\psi = \left(\omega_2^2 - \frac{1}{k-1}\right)\psi + \\ + \frac{\varepsilon}{k-1}\left(r\ddot{\psi} + 2\dot{r}\dot{\psi} + \frac{1}{6}\psi^3\right) - \frac{\varepsilon^2}{120(k-1)}\psi^5. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Полученная в результате система уравнений (3.4), (3.10), (3.11) записана в форме, удобной для вычисления неизвестных функций $r_k(t)$, $\varphi_k(t)$, $\psi_k(t)$ в разложениях (3.5)–(3.7). Соответствующий алгоритм символьных вычислений в данной работе реализуется с помощью системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* [16]. Сначала определяем правила замены вида

$$rul1 = \{r \to (r_0[\#] + \varepsilon r_1[\#] + \varepsilon^2 r_2[\#]\&),$$

$$\varphi \to (\varphi_0[\#] + \varepsilon\varphi_1[\#] + \varepsilon^2\varphi_2[\#]\&)\};$$

$$\psi \to (\psi_0[\#] + \varepsilon\psi_1[\#] + \varepsilon^2\psi_2[\#]\&)\};$$

и выполняем подстановку выражений (3.5)–(3.7) в уравнения (3.4), (3.10), (3.11). Отметим, что использование анонимных функций (pure functions) в правилах замены приводит к автоматическому вычислению всех производных в уравнениях движения. Кроме того, в правой части каждого уравнения выполняем подстановку

$$\begin{gathered} rul2 = \Big\{\omega_1 \to (1 + \varepsilon\omega_{11} + \varepsilon^2\omega_{12}), \\ \omega_2 \to \frac{1}{\sqrt{k-1}}(1 + \varepsilon\omega_{21} + \varepsilon^2\omega_{22})\Big\}. \end{gathered}$$

Далее в каждом из полученных уравнений разлагаем левую и правую части в степенные ряды по параметру ε с помощью функции *Series*. Для выполнения разложений с точностью до второго порядка, например, достаточно к каждому уравнению применить функцию

$$Series[\#, \{\varepsilon, 0, 2\}]\&.$$

Встроенная функция $Coefficient[eq, \varepsilon, k]$ позволяет выделить в выражении eq коэффициент при ε^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Выполняя описанные выше символьные вычисления и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε в левой и правой части каждого уравнения (3.4), (3.10), (3.11), получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\varphi}_0 + \omega_1^2\varphi_0 = 0, \tag{3.12}$$

$$\ddot{\psi}_0 + \omega_2^2\psi_0 = 0, \tag{3.13}$$

$$\ddot{r}_0 = \frac{1}{4}(\psi_0^2 - \varphi_0^2) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_0^2 - \frac{1}{2}(k-1)\dot{\psi}_0^2, \tag{3.14}$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_1^2\varphi_1 = -r_0\ddot{\varphi}_0 - 2\dot{r}_0\dot{\varphi}_0 + 2\omega_{11}\varphi_0 + \frac{1}{6}\varphi_0^3, \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered} \ddot{\psi}_1 + \omega_2^2\psi_1 = \\ = \frac{1}{k-1}\left(r_0\ddot{\psi}_0 + 2\dot{r}_0\dot{\psi}_0 + 2\omega_{21}\psi_0 + \frac{1}{6}\psi_0^3\right), \end{gathered} \tag{3.16}$$

$$\begin{gathered} \ddot{r}_1 = -\frac{1}{2}\varphi_0\varphi_1 + \frac{1}{2}\psi_0\psi_1 + \dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1 - (k-1)\dot{\psi}_0\dot{\psi}_1 + \\ + \frac{1}{2}r_0(\dot{\varphi}_0^2 + \dot{\psi}_0^2) + \frac{1}{48}(\varphi_0^4 - \psi_0^4), \end{gathered} \tag{3.17}$$

$$\begin{gathered} \ddot{\varphi}_2 + \omega_1^2\varphi_2 = -r_0\ddot{\varphi}_1 - r_1\ddot{\varphi}_0 - 2\dot{r}_0\dot{\varphi}_1 - 2\dot{r}_1\dot{\varphi}_0 + \\ + \omega_{11}^2\varphi_0 + 2\omega_{12}\varphi_0 + 2\omega_{11}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_0^2\varphi_1 - \frac{1}{120}\varphi_0^5, \end{gathered} \tag{3.18}$$

$$\ddot{\psi}_2 + \omega_2^2\psi_2 = \frac{1}{k-1}\Big(r_0\ddot{\psi}_1 + r_1\ddot{\psi}_0 + 2(\dot{r}_0\dot{\psi}_1 + \dot{r}_1\dot{\psi}_0) + 2(\omega_{22}\psi_0 + \omega_{21}\psi_1) + \omega_{21}^2\psi_0 + \frac{1}{2}\psi_0^2\psi_1 - \frac{1}{120}\psi_0^5\Big), \tag{3.19}$$

$$\ddot{r}_2 = \frac{1}{4}(\psi_1^2 - \varphi_1^2) - \frac{1}{2}(\varphi_0\varphi_2 - \psi_0\psi_2) + \frac{1}{2}r_1(\dot{\varphi}_0^2 + \dot{\psi}_0^2) + r_0(\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_0\dot{\psi}_1) + \dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}(\dot{\varphi}_1^2 - (k-1)\dot{\psi}_1^2) - (k-1)\dot{\psi}_0\dot{\psi}_2 + \frac{1}{12}(\varphi_0^3\varphi_1 - \psi_0^3\psi_1), \ldots \tag{3.20}$$

Далее предполагаем, что функции $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют нулевым начальным условиям $\varphi_k(0) = 0$, $\dot{\varphi}_k(0) = 0$, и будем искать такие решения уравнений (3.14)–(3.20), которые описывают малые колебания функций $\varphi_k(t)$, $\psi_k(t)$, $r_k(t)$.

Очевидно, функции (3.8) являются решениями уравнений (3.12), (3.13), а их подстановка в (3.14) и замена произведений тригонометрических функций на сумму тригонометрических функций от кратных аргументов с помощью встроенной функции *TrigReduce* системы *Mathematica* приводит к дифференциальному уравнению

$$\ddot{r}_0 = -\frac{3}{8}\cos(2\omega_1 t) + \frac{3}{8}\cos(2\omega_2 t + 2\alpha). \tag{3.21}$$

Отметим, что выбор одинаковых амплитуд переменных $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$ в (3.8) обеспечивает обнуление постоянной составляющей функции в правой части (3.21) и позволяет найти частное решение дифференциального уравнения (3.21) в виде осциллирующих функций. Для получения такого решения достаточно дважды проинтегрировать правую часть уравнения (3.21) с помощью встроенной функции *Integrate*[#, t, t] &. В результате находим

$$r_0 = \frac{3}{32\omega_1^2}\cos(2\omega_1 t) - \frac{3}{32\omega_2^2}\cos(2\omega_2 t + 2\alpha). \tag{3.22}$$

Далее подставляем решение (3.22) в уравнение (3.15) и, преобразуя его правую часть в линейную комбинацию тригонометрических функций с помощью функции *TrigReduce*, получаем

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_1^2\varphi_1 = \left(2\omega_{11} - \frac{1}{64}\right)\cos(\omega_1 t) + \frac{53}{192}\cos(3\omega_1 t) - \left(\frac{3(k-1)}{64} - \frac{3\sqrt{k-1}}{16}\right)\cos((2\omega_2 - \omega_1)t + 2\alpha) - \left(\frac{3(k-1)}{64} + \frac{3\sqrt{k-1}}{16}\right)\cos((2\omega_2 + \omega_1)t + 2\alpha). \tag{3.23}$$

Аналогичным образом приводим уравнение (3.16) к виду

$$\ddot{\psi}_1 + \omega_2^2\psi_1 = \frac{2}{k-1}\left(\omega_{21} - \frac{1}{128}\right)\cos(\omega_2 t + \alpha) - \left(\frac{3}{64(k-1)^2} - \frac{3}{16(k-1)^{3/2}}\right)\cos((\omega_2 - 2\omega_1)t + \alpha) - \left(\frac{3}{64(k-1)^2} + \frac{3}{16(k-1)^{3/2}}\right)\times \cos((\omega_2 + 2\omega_1)t + \alpha) + \frac{53}{192(k-1)}\cos(3\omega_2 t + 3\alpha). \tag{3.24}$$

Дифференциальные уравнения (3.23), (3.24) описывают вынужденные колебания переменных $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ и их решения будут ограниченными осциллирующими функциями только при условии, что правые части этих уравнений не содержат резонансных членов (см. [17–19]).

Далее рассмотрим специальный случай одинаковых частот $\omega_1 = \omega_2$, что возможно при условии $L = 2R_0$ или $k = 2$, и выделим резонансные члены в правой части (3.23):

$$\left(2\omega_{11} - \frac{1}{64}\right)\cos(\omega_1 t) + \frac{9}{64}\cos(\omega_1 t + 2\alpha).$$

Легко видеть, что существуют только четыре значения начальной фазы α, при которых сумма двух колебаний одинаковой частоты обращается в нуль. Если $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, то резонансные члены исчезают при $\omega_{11} = -\frac{1}{16}$. В этом случае уравнение (3.23) принимает вид

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_1^2\varphi_1 = \frac{1}{24}\cos(3\omega_1 t), \tag{3.25}$$

а его решение, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) = 0$, легко вычисляется с помощью встроенной функции *DSolve*

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{192\omega_1^2}\left(\cos(\omega_1 t) - \cos(3\omega_1 t)\right). \tag{3.26}$$

Если же $\alpha = \pm\pi/2$, то условие обнуления резонансных членов в (3.23) дает $\omega_{11} = \frac{5}{64}$, а соответствующее решение уравнения (3.23) имеет вид

$$\varphi_1(t) = \frac{49}{768\omega_1^2}\left(\cos(\omega_1 t) - \cos(3\omega_1 t)\right). \tag{3.27}$$

Условие обнуления резонансных членов в уравнении (3.24) приводит к таким же результатам $\omega_{21} = -\frac{1}{16} = \omega_{11}$ или $\omega_{21} = \frac{5}{64} = \omega_{11}$, что естественно ожидать, так как частоты колебаний предполагаются одинаковыми ($\omega_1 = \omega_2$). При $\alpha = 0$ решения уравнений (3.23) и (3.24) совпадают и имеют вид (3.26), а при $\alpha = \pi$ знак функции $\psi_1(t)$ изменяется на противоположный ($\psi_1(t) = -\varphi_1(t)$). Заметим, что при $\omega_1 = \omega_2$ функции $\varphi_0(t)$ и $\psi_0(t)$ в (3.8) также совпадают при $\alpha = 0$ и имеют противоположные знаки при $\alpha = \pi$. В обоих случаях подстановка найденных функций $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ в (3.17) с учетом (3.8) приводит к обнулению правой части, что дает решение $r_1(t) = 0$. Поскольку $r_0(t) = 0$ при $\omega_1 = \omega_2$ (см. (3.22)), то можно утверждать, что с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$ включительно длина обоих маятников остается постоянной $r(t) = 1$, а сами маятники совершают колебания с одинаковыми частотами и амплитудами синфазно ($\varphi(t) = \psi(t)$) или в противофазе ($\varphi(t) = -\psi(t)$).

При $\omega_{11} = \omega_{21} = \frac{5}{64}$ решение уравнения (3.23) имеет вид (3.27) при обоих значениях начальной фазы $\alpha = \pm\pi/2$, а решения уравнения (3.24), удовлетворяющие начальному условию $\psi_1(0) = 0$, запишем в виде

$$\psi_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t) \pm \frac{49}{768\omega_1^2}\cos(3\omega_1 t). \tag{3.28}$$

Поскольку при решении уравнения (3.24) начальное значение производной $\dot{\psi}_1(0)$ не задано, решение (3.28) содержит постоянную C_1, которая далее будет найдена при решении уравнения (3.17).

Действительно, при подстановке функций (3.27), (3.28) в уравнение (3.17) получаем

$$\ddot{r}_1 = \frac{49}{3072} \pm \frac{C_1}{4} + \left(\pm\frac{3}{4}C_1 - \frac{175}{1024}\right)\cos(2\omega_1 t). \tag{3.29}$$

При условии $C_1 = \mp 47/768$ постоянная составляющая функции в правой части (3.29) обнуляется, что приводит к осциллирующему частому решению

$$r_1(t) = \frac{7}{128\omega_1^2}\cos(2\omega_1 t). \tag{3.30}$$

Вычисления в более высоких порядках по ε выполняются аналоничным образом с применением встроенных функций системы *Mathematica*, таких как *Expand*, *TrigExpand*, *Collect*, *Coefficient*, *D*, *Integrate*, *Series*, *Normal*, *DSolve*. Так, подстановка найденных выше функций в (3.18) при $\alpha = 0$ приводит к уравнению

$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_1^2\varphi_2 = \left(2\omega_{12} - \frac{1}{1536}\right)\cos(\omega_1 t) - \\ - \frac{1}{384}\cos(3\omega_1 t) - \frac{3}{2560}\cos(5\omega_1 t). \tag{3.31}$$

Условие отсутствия резонансных членов, пропорциональных $\cos(\omega_1 t)$, дает $\omega_{12} = 1/3072$, а решение уравнения (3.31), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_2(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$, получается в виде

$$\varphi_2(t) = -\frac{23}{61440}\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3072}\cos(3\omega_1 t) + \\ + \frac{1}{20480}\cos(5\omega_1 t). \tag{3.32}$$

Анализ уравнения (3.19) дает $\omega_{22} = 1/3072 = \omega_{12}$, а вычисление функции $\psi_2(t)$ приводит к результату $\psi_2(t) = \varphi_2(t)$ при $\alpha = 0$ и $\psi_2(t) = -\varphi_2(t)$ при $\alpha = \pi$. Далее из уравнения (3.20) находим $r_2(t) = 0$.

Описанный процесс последовательного решения дифференциальных уравнений, которые получаются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях параметра ε в левой и правой части каждого из уравнений (3.4), (3.10), (3.11), можно продолжить и вычислить решения (3.5)–(3.7) и частоты (3.9) с требуемой точностью, хотя в более высоких порядках такие вычисления становятся все более громоздкими. Например, с точностью до третьего порядка по ε находим

$$\varphi(t) = \sqrt{\varepsilon}\cos(\omega_1 t) + \\ + \frac{\varepsilon^{3/2}}{192}\left(\cos(\omega_1 t) - \cos(3\omega_1 t)\right) + \frac{\varepsilon^{5/2}}{61440}\times \\ \times\left(17\cos(\omega_1 t) - 20\cos(3\omega_1 t) + 3\cos(5\omega_1 t)\right), \tag{3.33}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 1 - \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon^2}{3072} - \frac{23\varepsilon^3}{737280}. \tag{3.34}$$

При этом длины маятников одинаковы и не изменяются $r(t) = 1 = k - r(t)$, а колебания маятников происходят синфазно ($\psi(t) = \varphi(t)$) или в противофазе ($\psi(t) = -\varphi(t)$).

Следует отметить, что при $\psi(t) = \varphi(t)$ или $\psi(t) = -\varphi(t)$ правая часть точного уравнения движения (2.8) обращается в нуль и при начальных условиях $r(0) = 1$, $\dot{r}(0) = 0$ его точным решением есть постоянная функция $r(t) = 1$. При этом уравнения (2.6), (2.7) являются независимыми и сводятся к (2.9). Таким образом, выражение (3.33) определяет приближенное решение нелинейного дифференциального уравнения колебаний математического маятника (2.9). Соответственно, разложение (3.34) дает приближенное выражение для частоты нелинейных колебаний маятника, которая является функцией амплитуды колебаний, и совпадает с соответствующим разложением точного выра-

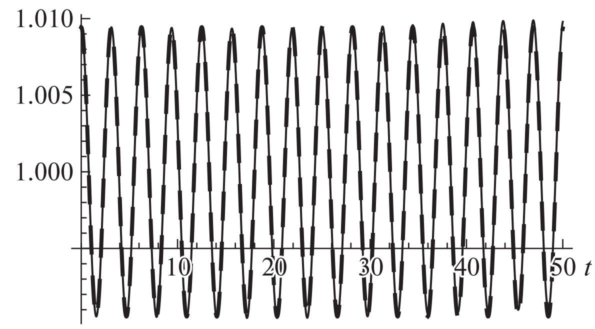

Рис. 2. Сравнение аналитического и численного решений $r(t)$ ($\varepsilon = 0.05$).

жения, выраженного через эллиптические функции Якоби (см. [17]).

Выбор начальной фазы $\alpha = \pi/2$ приводит к появлению зависимости функции $r(t)$ от времени, хотя вычисления функций $\varphi_k(t)$, $\psi_k(t)$, $r_k(t)$ во втором и более высоких порядках по ε производятся подобно случаю $\alpha = 0$. Так, подстановка выражений (3.8), (3.22), (3.27), (3.28), (3.30) в уравнения (3.18), (3.19) дает

$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_1^2\varphi_2 = \left(2\omega_{12} - \frac{1717}{24576}\right)\cos(\omega_1 t) + \frac{2335}{12288}\cos(3\omega_1 t) - \frac{5493}{40960}\cos(5\omega_1 t), \tag{3.35}$$

$$\ddot{\psi}_2 + \omega_1^2\psi_2 = \left(-2\omega_{22} + \frac{1717}{24576}\right)\sin(\omega_1 t) + \frac{2335}{12288}\sin(3\omega_1 t) + \frac{5493}{40960}\sin(5\omega_1 t). \tag{3.36}$$

Из условия обнуления резонансных членов в правых частях уравнений (3.35), (3.36) получаем

$$\omega_{12} = \omega_{22} = \frac{1717}{49152}. \tag{3.37}$$

Решения уравнений (3.35), (3.36), удовлетворяющие начальным условиям $\varphi_2(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$, $\psi_2(0) = 0$, легко вычисляются с помощью встроенной функции *DSolve*:

$$\varphi_2(t) = \frac{17857}{983040\omega_1^2}\cos(\omega_1 t) - \frac{2335}{98304\omega_1^2}\cos(3\omega_1 t) + \frac{1831}{327680\omega_1^2}\cos(5\omega_1 t), \tag{3.38}$$

$$\psi_2(t) = C_2\sin(\omega_1 t) - \frac{2335}{98304\omega_1^2}\sin(3\omega_1 t) - \frac{1831}{327680\omega_1^2}\sin(5\omega_1 t). \tag{3.39}$$

Неизвестная постоянная C_2 в выражении (3.39) может быть найдена из уравнения (3.20). Действительно, подставляя полученные выше решения в уравнение (3.20), получаем

$$\ddot{r}_2 = \frac{17857}{3932160} + \frac{C_2}{4} + \left(\frac{3}{4}C_2 - \frac{139453}{1966080}\right)\cos(2\omega_1 t) + - \frac{394633}{11796480}\cos(6\omega_1 t). \tag{3.40}$$

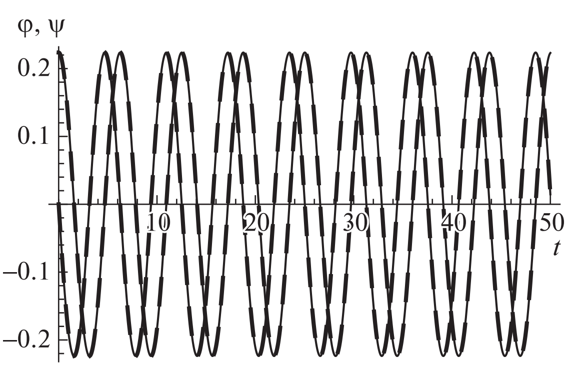

Рис. 3. Сравнение аналитического и численного решений $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ ($\varepsilon = 0.05$).

Условие обнуления постоянной составляющей функции в правой части уравнения (3.40) дает

$$C_2 = -\frac{17857}{983040}. \tag{3.41}$$

Интегрируя дважды правую часть уравнения (3.40) с учетом (3.41), получаем

$$\begin{aligned} r_2(t) = {} & \frac{332477}{15728640\omega_1^2}\cos(2\omega_1 t) + \\ & + \frac{394633}{424623280\omega_1^2}\cos(6\omega_1 t). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Описанные вычисления можно продолжить и получить функции (3.5)–(3.7) с необходимой точностью, хотя вычисления становятся все более громозкими и для их выполнения требуется применение систем компьютерной алгебры. Используя найденные решения, можно вычислить начальные значения функций $\varphi(0)$, $\psi(0)$, $r(0)$ и их производных $\dot{\varphi}(0)$, $\dot{\psi}(0)$, $\dot{r}(0)$ при выбранном значении параметра ε, а затем найти соответствующие численные решения уравнений движения (3.2)–(3.4) с помощью встроенной функции *NDSolve*. Визуализация найденных аналитических решений при $\varepsilon = 0.05$ (штриховые линии на рис. 2 и 3) демонстрирует хорошее совпадение с численными решениями (сплошные тонкие линии на рис. 2 и 3).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе обсуждается проблема построения решений уравнений движения машины Атвуда с двумя колеблющимися грузами одинаковой массы, которые описывают состояние динамического равновесия системы. Показано, что при одинаковых амплитудах и частотах колебаний система может находиться в равновесии, если оба маятника имеют одинаковую длину $r(t) = 1$ и совершают синфазные колебания или колеблются в противофазе. Существование такого равновесного состояния соответствует нашим ожиданиям, так как система обладает симметрией и оба груза в каждый момент времени действуют на нить с одинаковыми силами. Эта симметрия нарушается при сдвиге фаз $\alpha = \pm\pi/2$ и, хотя в среднем действия обоих грузов на нить уравновешиваются, в каждый момент времени действие на нить одного из грузов оказывается большим. В результате длина каждого из маятников совершает малые колебания около равновесного значения $r = 1$, причем частота этих колебаний равняется удвоенной частоте колебаний угловых переменных $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ и зависит от амплитуды. Соответствующие решения уравнений движения найдены в виде степенных рядов по малому параметру ε, который определяет амплитуды колебаний. Последовательно описаны символьные вычисления, необходимые для определения коэффициентов этих рядов, а сами функции найдены с точностью до второго порядка по ε включительно. Сравнение найденного аналитического решения с численным решением уравнений движения показало справедливость полученных теоретических результатов.

Отметим также, что в данной работе все вычисления и визуализация результатов выполнены с использованием системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Atwood G.* A Treatisa on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies. Cambridge University Press, 1784.
2. *Tufillaro N.B., Abbott T.A., Griffiths D.J.* Swinging Atwood's machine // American Journal of Physics. 1984. V. 52 (3.1). P. 895–903.
3. *Tufillaro N.B.* Motions of a swinging Atwood's machine // J. Physique. 1985. V. 46. P. 1495–1500.
4. *Tufillaro N.B.* Integrable motion of a swinging Atwood's machine // Amer. J. Phys. 1986. V. 54. P. 142–143.
5. *Casasayas J., Nunes T.A., Tufillaro N.B.* Swinging Atwood's machine: integrability and dynamics // J. Physique. 1990. V. 51. P. 1693–1702.
6. *Yehia H.M.* On the integrability of the motion of a heavy particle on a tilted cone and the swinging Atwood's machine // Mech. R. Comm. 2006. V. 33 (25). P. 711–716.
7. *Pujol O., Pérez J.P., Ramis J.P., Simo C., Simon S., Weil J.A.* Swinging Atwood machine: Experimental and numerical results, and a theoretical study // Physica D. 2010. V. 239 (12). P. 1067–1081.
8. *Prokopenya A.N.* Motion of a swinging Atwood's machine: simulation and analysis with Mathematica // Mathematics in Computer Science. 2017. V. 11(3–4). P. 417–425.
9. *Прокопеня А.Н.* Построение периодического решения уравнений движения обобщенной машины Атвуда с применением компьютерной алгебры // Программирование. 2020. Т. 46 (2). С. 53–59.
10. *Prokopenya A.N.* Modelling Atwood's Machine with Three Degrees of Freedom // Mathematics in Computer Science. 2019. V. 13 (1–2). P. 247–257.
11. *Абрамов С.А., Зима Е.Б., Ростовцев В.А.* Компьютерная алгебра // Программирование. 1992. № 5. С. 4–25.
12. *Васильев Н.Н., Еднерал В.Ф.* Компьютерная алгебра в физических и математических приложениях // Программирование. 1994. № 1. С. 70–82.
13. *Прокопеня А.Н.* Некоторые алгоритмы символьных вычислений в исследованиях проблем космиче-

ской динамики // Программирование. 2006. Т. 32 (2.2). С. 16–22.

14. *Прокопеня А.Н.* Символьные вычисления в исследованиях устойчивости решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Программирование. 2007. Т. 33 (2.2). С. 9–16.

15. *Прокопеня А.Н.* Нормализация гамильтониана в ограниченной задаче многих тел методами компьютерной алгебры // Программирование. 2012. Т. 38 (3). С. 65–78.

16. *Wolfram S.* An elementary introduction to the Wolfram Language, 2nd ed. Champaign, IL, USA, Wolfram Media, 2017.

17. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 592 с.

18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. 4-е изд. М.: Наука, 1988, 216 с.

19. *Nayfeh A.H.* Introduction to Perturbation Techniques. New York: John Wiley & Sons, 1981. 519 p.