ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2021, № 1, с. 5–10

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 519.85

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ В ТОЧКЕ

© 2021 г. М. С. Апанович[a,b,*], А. П. Ляпин[b,], К. В. Шадрин[a,***]**

[a] *Красноярский государственный медицинский университет имени профессора В.Ф. Войно-Ясенецкого, 660022 Красноярск, ул. Партизана Железняка, 1, Россия*

[b] *Сибирский федеральный университет, 660041 Красноярск, пр. Свободный, 79, Россия*

**E-mail: marina.apanovich@list.ru*

***E-mail: aplyapin@sfu-kras.ru*

****E-mail: kvsh_buffon@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.07.2020 г.
После доработки 06.09.2020 г.
Принята к публикации 12.09.2020 г.

В данной работе представлен алгоритм вычисления решения задачи Коши для двумерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами в точке по коэффициентам разностного уравнения и начальным данным задачи Коши методами компьютерной алгебры. В одномерном случае решение задачи Коши для разностного уравнения не представляет сложности, однако уже в двумерном случае число неизвестных растет на каждом шаге очень быстро. Для автоматизации процесса вычисления решения задачи Коши для двумерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами в заданной точке в среде MATLAB был разработан алгоритм, где входными данными являются: матрица коэффициентов, полученная исходя из структуры двумерного полиномиального разностного уравнения; координаты точки, регламентирующей структуру матрицы начальных данных; координаты точки, регламентирующей размерность матрицы начальных данных; матрица начальных данных. Результатом работы алгоритма является решение задачи Коши для двумерного разностного уравнения, представляющее собой значение функции в искомой точке.

DOI: 10.31857/S0132347421010039

1. ВВЕДЕНИЕ

Линейные разностные уравнения имеют многочисленные приложения в различных областях науки и техники, а поиск их решений является сложной математической задачей. Например, разностные уравнения часто используются в моделях динамики с дискретным временем ([1, 2]), для приближенного (численного) решения дифференциальных уравнений ([3]), а в комбинаторном анализе разностные уравнения в сочетании с методом производящих функций (дискретным аналогом преобразования Фурье) дают мощный аппарат исследования перечислительных задач (см., например, [4–6]). Для пространства решений многомерного разностного уравнения задаются дополнительные условия (“начальные”, “граничные”, “данные Коши”), которые позволяют из бесконечного множества решений выделить единственное, а возникающая при этом задача называется задачей Коши для многомерного разностного уравнения.

Разработке алгоритмов решения многомерных разностных уравнений с постоянными и полиномиальными коэффициентами посвящено значительное число работ (см., например, [7–9]), а в [10] рассмотрены разностные уравнения с коэффициентами в виде рациональных функций. Алгоритм вычисления производящей функции решения задачи Коши для двумерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами по коэффициентам разностного уравнения и начальным данным задачи Коши представлен в работах [11] и [12]. В данной работе представлен алгоритм вычисления решения задачи Коши для двумерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами в точке по коэффициентам разностного уравнения и начальным данным задачи Коши.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, $\mathbb{Z}^n = \overbrace{\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}^{n}$ – n-мерную целочисленную решетку и $\mathbb{Z}_+^n$ – подмножество этой решетки, состоящее из точек с целыми неотрицательными координатами (в частности, $\mathbb{Z}^2$ и $\mathbb{Z}_+^2$ – двумерная решетка и ее подмножество). Пусть δ_1 – оператор сдвига по переменной x_1, т.е. $\delta_1 f(x_1, x_2) = f(x_1 + 1, x_2)$, а δ_2 – оператор сдвига по переменной x_2, т.е. $\delta_2 f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + 1)$.

Рассмотрим полиномиальный разностный оператор вида

$$P(\delta) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \delta^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1} \cdot \delta_2^{\alpha_2}$, c_α – постоянные коэффициенты, m – порядок оператора $P(\delta)$.

Будем рассматривать разностные уравнения вида

$$P(\delta_1, \delta_2) f(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_+^2, \qquad (1)$$

где $f(x_1, x_2)$ – неизвестная функция.

Для точек x и y решетки $\mathbb{Z}^n$ неравенство $x \ge y$ означает, что $x_i \ge y_i$ для $i = 1, \ldots, n$, а запись $x \ngeq y$ означает, что найдется $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $x_{i_0} < y_{i_0}$.

Фиксируем $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ такое, что $\beta \ne (0, m)$, $\beta \ne (m, 0)$, $|\beta| = m$ и $c_\beta \ne 0$. Обозначим

$$X_{0,\beta} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : (x_1, x_2) \ngeq \beta\}$$

и сформулируем задачу: *найти функцию $f(x_1, x_2)$, которая для всех $(x_1, x_2) \in X_{0,\beta}$ совпадает с заданной функцией $\varphi(x_1, x_2)$, т.е. удовлетворяет условию*

$$f(x) = \varphi(x), \quad x \in X_{0,\beta}. \qquad (2)$$

Задачу (1)–(2) будем называть задачей Коши для полиномиального разностного оператора $P(\delta)$, $\varphi(x)$ – функцией начальных данных этой задачи, а $f(x)$ – решением задачи Коши.

Известно (см. [13, 14]), что задача (1)–(2) однозначно разрешима, если выполняется условие

$$|c_\beta| > \sum_{\substack{|\alpha| = |\beta|, \\ \alpha \ne \beta}} |c_\alpha|. \qquad (3)$$

Поставим задачу: вычислить значение функции $f(x_1, x_2)$ в точке с координатами (y_1, y_2).

3. ОПИСАНИЕ ВХОДНЫХ ДАННЫХ

Решение задачи Коши (1)–(2) для двумерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами в точке $y = (y_1, y_2)$ представляет собой значение функции $f(x_1, x_2)$ в заданной точке. Алгоритм вычисления значения функции $f(x_1, x_2)$ в заданной точке $y = (y_1, y_2)$ имеет рекурсивный характер и сводится к вычислению значений функции $f(x_1, x_2)$ на конечном подмножестве точек x из множества точек $X_{0,y} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : (x_1, x_2) \ngeq (y_1, y_2)\}$ и удовлетворяющих условию $|x_1 + x_2| \le |y_1 + y_2|$.

Начальные данные (2) задаются квадратной матрицей F, содержащей конечное подмножество значений начальных данных задачи Коши. Матрица начальных данных F будет иметь размерность $(y_1 + y_2 + 1) \times (y_1 + y_2 + 1)$.

Коэффициенты двумерного разностного уравнения задаются квадратной матрицей C, имеющей нижнетреугольный вид.

Проиллюстрируем процедуру задания функции начальных данных на примере.

Для разностного уравнения

$$\begin{aligned} &c_{02} f(x_1, x_2 + 2) + c_{01} f(x_1, x_2 + 1) + \\ &+ c_{11} f(x_1 + 1, x_2 + 1) + c_{10} f(x_1 + 1, x_2) + \\ &+ c_{20} f(x_1 + 2, x_2) + c_{00} f(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

и $\beta = (1, 1)$ матрица коэффициентов C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} c_{02} & 0 & 0 \\ c_{01} & c_{11} & 0 \\ c_{00} & c_{10} & c_{20} \end{pmatrix},$$

а матрица начальных данных F размерности, например, 4 × 4 будет иметь вид

$$F = \begin{pmatrix} \varphi(0,3) & & & \\ \varphi(0,2) & * & & \\ \varphi(0,1) & * & * & \\ \varphi(0,0) & \varphi(1,0) & \varphi(2,0) & \varphi(3,0) \end{pmatrix}.$$

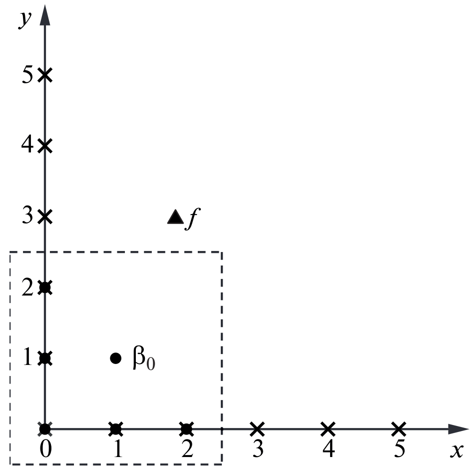

Рис. 1. Расположение элементов матрицы C в декартовой системе координат.

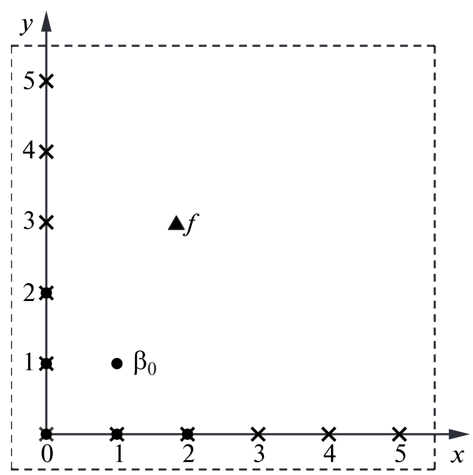

Рис. 2. Расположение элементов матрицы F в декартовой системе координат.

Здесь элементы, обозначенные $*$, вычисляются при выполнении алгоритма. Например $\varphi(1, 1)$ вычисляется с помощью разностного уравнения (4) и начальных данных $\varphi(0,2)$, $\varphi(0,1)$, $\varphi(0,0)$, $\varphi(1,0)$, $\varphi(2,0)$.

Итак, входные данные конечны и имеют вид:

1. точка $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, определяющая размерность матрицы коэффициентов C, $\beta_1 + \beta_2 + 1 = m$;

2. нижнетреугольная матрица $C = (c_{\alpha_1,\alpha_2})$, $\alpha_1 = 0,\dots,m$, $\alpha_2 = 0,\dots,m$ размера $(m+1)\times(m+1)$ из коэффициентов c_{α_1,α_2} двумерного разностного уравнения;

3. точка f с координатами (y_1, y_2), определяющая координаты искомого значения функции $f(x_1, x_2)$ и размерность матрицы начальных данных F;

4. матрица начальных данных $F = (\varphi(x_1, x_2))$, размера $(y_1 + y_2 + 1)\times(y_1 + y_2 + 1)$, где $(x_1, x_2) \in X_{(0,\beta)}$, для всех остальных значений (x_1, x_2) значения $\varphi(x_1, x_2) = 0$.

Поскольку координаты элементов матрицы коэффициентов разностного оператора и матрицы начальных данных в декартовой системе координат (X, Y) не совпадают с их координатами в матрице (строка × столбец), то для технической реализации работы алгоритма целесообразно перейти из декартовой системы координат ($D(d_1, d_2)$) в "матричную" ($M(m_1, m_2)$) по правилу: $D(d_1, d_2) \to M(m_1, m_2)$, где $m_1 = p - d_2$, $m_2 = d_1 + 1$, p — размерность матрицы коэффициентов или матрицы начальных данных.

Например, элемент c_{00} матрицы коэффициентов C, имеющий в декартовой системе координат координаты $(d_1, d_2) = (0, 0)$, в "матричной" системе координат будет иметь координаты $(m_1, m_2) = (3, 1)$, а, например, элемент $\varphi(1, 0)$ матрицы начальных данных F в "матричной" системе координат будет иметь координаты (4, 2).

Далее необходимо будет проверить задачу Коши (1)–(2) на разрешимость, т.е. проверить, выполняется ли условие (3) для коэффициентов разностного оператора $P(\delta)$.

4. ПРИМЕР

Алгоритм был реализован в среде Matlab 2014 32bit. Вычисления производились на машине Intel(R) Core(TM) i5-3330S CPU 2.70 GHz, 32bit, ОЗУ 4.00 Гб под управлением Windows 7 Корпоративная SP1. Время счета для приведенного примера составило менее 1 секунды.

Пример 1. Фиксируем $\beta = \beta_0 = (1,1)$.

Будем рассматривать полиномиальный разностный оператор

$$P(\delta_1, \delta_2) = c_{02}\delta_2^2 + c_{01}\delta_2 + c_{11}\delta_1\delta_2 + \\ + c_{10}\delta_1 + c_{20}\delta_1^2 + c_{00}.$$

Множество начальных данных будет иметь вид:

$$X_{0,(1,1)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : (x_1, x_2) \not\geq (1,1)\}$$

Зададим матрицу коэффициентов полиномиального разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$

$$C = \begin{pmatrix} c_{02} & 0 & 0 \\ c_{01} & c_{11} & 0 \\ c_{00} & c_{10} & c_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Расположение элементов матрицы C в декартовой системе координат представлено на рис. 1

Поставим задачу найти значения функции f в точке с координатами (2, 3), т.е. $f(2,3)$.

Зададим матрицу начальных данных:

$$X_{0,(1,1)} = F = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Расположение элементов матрицы F в декартовой системе координат представлено на рис. 2.

1. Переход из декартовой системы координат в "матричную":

$p = 3$ — размерность матрицы коэффициентов

$i = 6$ — размерность матрицы начальных данных

$\beta_1 = [2,2]$ — координаты точки β_0 в "матричной" системе координат.

"Матричная" система координат для коэффициентов разностного оператора $P(\delta)$:

	1	2	3
1	•		
2	•	•β_0	
3	•	•	•

Здесь • — коэффициенты c_α.

$F_1 = [3,3]$ — координаты точки f в "матричной" системе координат.

"Матричная" система координат начальных данных:

	1	2	3	4	5	6
1	×					
2	×					
3	×		f			
4	×					
5	×					
6	×	×	×	×	×	×

Здесь × — начальные данные.

2. Проверка матрицы C на разрешимость задачи Коши (1)–(2): $|10| = |c_{1,1}| > |c_{0,2}| + |c_{2,0}| = 5$, следовательно выполняется условие (3) и задача Коши разрешима.

3. Вектор диагонали матрицы коэффициентов C: $a = (1\ 10\ 4)^T$.

4. Получение общей теплицевой матрицы [15], размер которой зависит от искомого значения $f(y_1, y_2)$:

$$column_c = (10\ 1\ 0\ 0)^T,$$

$$row_c = \begin{pmatrix}10 & 4 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$T_1 = \begin{pmatrix}10 & 4 & 0 & 0\\ 1 & 10 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 10 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 10\end{pmatrix}.$$

5. Решение системы линейных уравнений с целью нахождения значений f, которые могут потребоваться для вычисления искомого значения.

На каждом шаге размер матрицы Теплица постоянно увеличивается с ростом числа неизвестных, а также происходит запись найденных значений функции F в матрицу начальных данных F.

$$F = \begin{pmatrix}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -4.90 & -1.98 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0.72 & 7.14 & 4.33 & 0 & 0\\ 4 & -7.50 & -4.82 & -7.26 & -7 & 0\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\end{pmatrix}$$

6. Переход к декартовой системе координат $f(2,3) = F(3,3)$.

Output: значение функции в искомой точке $f(2,3) = -1.98$.

Входными данными алгоритма в этом случае будут:

1. $\beta_0 = (1,1)$;
2. матрица коэффициентов

$$C = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 10 & 0\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix};$$

3. $f_0 = (2,3)$;
4. матрица начальных данных

$$F = \begin{pmatrix}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\end{pmatrix}.$$

```
>Plan((1,1), (1 3 4, 0 10 2, 0 0 4), (2,
3), (7 1 2 3 4 5, 0 0 0 0 0 6, 0 0 0 0 0
7, 0 0 0 0 0 8, 0 0 0 0 0 9, 0 0 0 0 0 10));
```

Алгоритм 1: Пример оформления алгоритма

Input: Точка β_0, матрица коэффициентов C, точка f_0, матрица начальных данных F.
Output: Значение функции $f(x_1, x_2)$ в точке с координатами (y_1, y_2).

Procedure Plan(B$_0$, C; f_0:F)
begin
  $p :=$ размерность матрицы C
  $i :=$ размерность матрицы F
  $\beta_1 :=$ координаты точки β_0 в “матричной” системе координат
  $f_1 :=$ координаты точки f_0 в “матричной” системе координат
  if $|C(\beta_1(1), \beta_1(2))| \le \sum \mathrm{diag}(|C|) - |C(\beta_1(1), \beta_1(2))|$ **then**
    Ошибка ввода матрицы C
  $a := diag(C)$ вектор диагонали матрицы C
  $e := \beta_1(1)$
  $column_c := zeros(i-2, 1)$
  $col := 1$
  while $e \ge 1$ **do**
    $column_c(col) := a(e)$
    $col := col + 1$
    $e := e - 1$
  $row_c := zeros(l, i-2)$
  $e := \beta_1(1)$
  $r := 1$
  $l :=$ длина вектора a
  for m from $\beta_1(1)$ to l **do**
    $row_c(r) = a(e)$
    $r := r + 1$
    $e := e + 1$
  $T_1 := toeplitz(colomn_c, row_c)$
  for k from 1 to $i - p + 1$ **do**
    $T := T_1(1:k, 1:k)$
    $b := zeros(k, 1)$
    for s from 1 to k **do**
      $P := f((end - p + (s - k + 1)) : (end + (s - k)), (s : (p + s - 1))))$
      $P_{work} := P \circ C$
      $b(s) = -\left(\sum (P_{work}((1:end), 1)) + \sum (P_{work}(end, (2:end)))\right)$
  $elements := T^{-1} \cdot b$
  for m from 1 to k **do**
    $F(end + m - (k+1) - (p - \beta_1(1)) + 1, m + \beta_1(2) - 1) := elements(m)$
  return $f(y_1, y_2)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Даджион Д., Мерсеро О.* Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988.
2. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984. 541 с.
3. *Рябенький В.С.* Введение в вычислительную математику: учеб. пособие, изд. 2-е, исправл., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. 296 с.
4. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 440 с.
5. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции: Пер. с англ. М.: Мир, 2005. 767 с.
6. *Bousquet-Melou M., Petkovsek M.* Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case // Discrete Mathematics, 2000, V. 225. P. 51–75.
7. *Абрамов С.А., Геффар А., Хмельнов Д.Е.* Рациональные решения линейных разностных уравнений: универсальные знаменатели и границы знаменателей // Программирование. 2011. № 2. С. 28–39.
8. *Абрамов С.А.* Поиск рациональных решений дифференциальных и разностных систем с помощью формальных рядов // Программирование. 2015. № 2. С. 69–80.
9. *Abramov S.A., Barkatou M.A., van Hoeij M., Petkovsek M.* Subanalytic Solutions of Linear Difference Equations and Multidimensional Hypergeometric Sequences // Journal of Symbolic Computation. 2011. V. 46. P. 1205–1228.
10. *Abramov S., Petkovšek M., Ryabenko A.* Hypergeometric solutions of first-order linear difference systems with rational-function coefficients // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2015. V. 9301. P. 1–14.
11. *Leinartas E.K., Lyapin A.P.* On the Rationality of Multidimentional Recusive Series // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2009. V. 2 (2). P. 449–455.
12. *Kytmanov A.A., Lyapin A.P., Sadykov T. M.* Evaluating the Rational Generating Function for the Solution of the Cauchy Problem for a Two-Dimensional Difference Equation with Constant Coefficients // Programming and Computer Software. 2017. V. 43. № 2. P. 105–111.
13. *Рогозина М.С.* О разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора // Вестник Новосибирского государственного университета. 2014. Т. 14. № 3. С. 83–94.
14. *Лейнартас Е.К., Рогозина М.С.* Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора и мономиальные базисы факторов в кольце полиномов // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56. № 1. С. 111–121.
15. *Иохвидов И.С.* Ганкелевы и теплицевы матрицы. М.: Наука, 1974. 264 с.