

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЕДИНИЦ ЧИСЛОВЫХ КОЛЕЦ
С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОЙ ЦЕПНОЙ ДРОБИ

© 2019 г. А. Д. Брюно

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
125047 Россия, Москва, Миусская пл., 4

E-mail: abruno@keldysh.ru

Поступила в редакцию 30.07.2018 г.

После доработки 02.09.2018 г.

Принята к публикации 20.09.2018 г.

Предлагается глобальное обобщение цепной дроби, основанное на компьютерной алгебре и дающее наилучшие диофантовы приближения. На нем базируется способ вычисления основных единиц алгебраических колец и нахождение всех решений некоторого класса диофантовых уравнений. Приведены примеры в размерностях 2, 3, 4.

DOI: 10.1134/S0132347419020055

I. ВВЕДЕНИЕ

Пусть в вещественном n -мерном пространстве $\mathbb{R}^n = \{X\}$ задано m однородных вещественных форм $f_i(X)$, $i = 1, \dots, m$, $2 \leq m \leq n$. Выпуклая оболочка множества значений $G(X) = (|f_1(X)|, \dots, |f_m(X)|) \in \mathbb{R}_+^m$ для целочисленных $X \in \mathbb{Z}^n$ во многих случаях является выпуклым многогранным множеством, граница которого для $\|X\| < \text{const}$ вычисляется с помощью стандартной программы компьютерной алгебры. Точки $X \in \mathbb{Z}^n$, для которых значения $G(X)$ лежат на этой границе, названы граничными. Они являются наилучшими диофантовыми приближениями для корневых множеств указанных форм. Их вычисление дает глобальное обобщение цепной дроби (раздел III). Для $n = 3$ обобщить цепную дробь безуспешно пытались Эйлер, Якоби, Дирихле, Эрмит, Пуанкаре, Гурвиц, Клейн, Минковский, Брун, Арнольд и многие другие.

Пусть $p(\xi)$ — целый неприводимый в $\mathbb{Q}$ многочлен степени n и λ — его корень. Набор основных единиц кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ можно вычислить по граничным точкам некоторой совокупности линейных и квадратичных форм, построенных по корням многочлена $p(\xi)$ (раздел IV). До сих пор эти единицы вычислялись только для $n = 2$ (с помощью обычных цепных дробей [1, гл. II, § 7]), $n = 3$ (с помощью алгоритмов Вороного [2]) и $n = 4$, когда комплексны все четыре корня многочлена $p(\xi)$,

Парусниковым [3], но большинство найденных им единиц не являются основными. Каждая единица определяет как автоморфизм граничных точек $X \in \mathbb{R}^n$, так и автоморфизм соответствующих точек $G(X) \in \mathbb{R}_+^m$. В логарифмической проекции положительного ортанта $\mathbb{R}_+^m$ на $\mathbb{R}^{m-1}$ можно найти фундаментальную область для группы автоморфизмов, соответствующих единицам (раздел V).

С помощью этих конструкций можно находить целочисленные решения диофантовых уравнений специального вида (раздел VI). Аналогично вычисляются все указанные объекты для других колец поля $\mathbb{Q}(\lambda)$ (раздел VII). В разделе VIII перечислены предшествующие вычисления основных единиц. Приведены примеры для $n = 2, 3$ и 4 (разделы IX–XII).

Наш подход обобщает цепную дробь, позволяет вычислить наилучшие совместные приближения, основные единицы алгебраических колец поля $\mathbb{Q}(\lambda)$ и все решения некоторого класса диофантовых уравнений для любого n .

II. ЦЕПНАЯ ДРОБЬ

Пусть α_0 и α_1 — натуральные числа. Для нахождения их наибольшего общего делителя используется алгоритм Евклида последовательного деления с остатком:

$$\alpha_0 = a_0\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 = a_1\alpha_2 + \alpha_3, \\ \alpha_2 = a_2\alpha_3 + \alpha_4, \dots$$

где натуральные числа $a_0, a_1, a_2, \dots$ суть неполные частные. Это алгоритм разложения числа $\alpha = \alpha_0/\alpha_1$ в правильную цепную дробь [4], и он применим к любым вещественным числам α . При этом $a_0 = [\alpha]$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α , $a_1 = [1/(\alpha - a_0)]$, ..., т.е.

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}, \quad (1)$$

и

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k+1} \\ \alpha_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \alpha_{k+1} \end{pmatrix}, \quad a_k = [\alpha_k/\alpha_{k+1}]. \quad (2)$$

Если разложение (1) оборвать на a_k и свернуть эту оборванную цепную дробь в рациональное число p_k/q_k , то получается *подходящая дробь*, которая дает наилучшее рациональное приближение к числу α . При этом

$$\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3) \\ \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_k \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \pm 1,$$

т.е. векторы (α_k, α_{k+1}) и (p_k, q_k) принадлежат сопряженным плоскостям, и пара векторов (p_k, q_k) , (p_{k-1}, q_{k-1}) может служить базисом в одной из них. Лагранж [4, § 10] доказал, что для квадратичных иррациональностей α разложение в цепную дробь периодически (и обратно), т.е. последовательность неполных частных $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ начиная с какого-то номера состоит из повторяющегося отрезка $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+l}$.

Итак, разложение числа в цепную дробь:

- просто;
- дает наилучшие рациональные приближения к числу;
- конечно для рационального числа;
- периодически для квадратичных иррациональностей [4, § 10];
- устроено как для почти всех чисел [4, гл. III] для кубических иррациональностей [5].

Кроме того, оно обладает еще рядом замечательных свойств.

III. ГЛОБАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ЦЕПНОЙ ДРОБИ И НАИЛУЧШИЕ ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Обобщить цепную дробь для векторов безуспешно пытались Эйлер, Якоби, Дирихле, Эрмит,

Пуанкаре, Гурвиц, Клейн, Минковский, Брун, Арнольд и многие другие [6, 7, п. 1.2]. Только пошаговые алгоритмы Вороного [2] безотказны, но сложны.

В [7–9] предложено следующее обобщение цепной дроби.

Пусть в n -мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $X = (x_1, \dots, x_n)$ заданы m однородных вещественных форм (т.е. многочленов от переменных) $f_i(X), \dots, f_m(X)$, $2 \leq m \leq n$.

Модули $g_i(X) = |f_i(X)|$ форм $f_i(X)$, $i = 1, \dots, m$, задают отображение $G(X) = (g_1(X), \dots, g_m(X))$ пространства $\mathbb{R}^n$ в положительный ортант $\mathbf{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_+^m$ в m -мерном пространстве $\mathbb{R}^m$ с координатами $S = (s_1, \dots, s_m)$: $s_i = g_i(X) = |f_i(X)|$, $i = 1, \dots, m$. При этом целочисленная решетка $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ отображается в некоторое множество $\mathbf{Z} \subset \mathbf{S}$. Замыкание выпуклой оболочки $\mathbf{H}$ множества $\mathbf{Z} \setminus 0$ является выпуклым множеством. Все целочисленные точки $X \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$, отображающиеся на границу $\partial \mathbf{H}$ множества $\mathbf{H}$, назовем **граничными**.

Задача 1. Найти все граничные точки X .

Решение задачи 1. В дальнейшем ограничимся случаями, когда выпуклое множество $\mathbf{H}$ является многогранным, т.е. его граница $\partial \mathbf{H}$ состоит из вершин, ребер, граней различных размерностей и не содержит непрерывных “кривых” частей. В этих случаях граница $\partial \mathbf{H}$ вычисляется с помощью стандартных программ компьютерной алгебры, предназначенных для вычисления выпуклых многогранных оболочек [10, 11]. Это и дает алгоритмическое обобщение цепной дроби на любую размерность. Примеры см. в [7].

В частности, это дает возможность вычислить наилучшие совместные рациональные приближения $q_1/q_0, \dots, q_l/q_0$ к вещественным числам $\beta_1, \dots, \beta_l$, где $q_0, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{Z}$ и $f_0(q_0) = q_0$, $f_i(q_0, q_i) = q_0\beta_i - q_i$, $i = 1, \dots, l$. Здесь $n = m = l + 1$. Если $l = 1$, то получаем одно число β_1 , тогда выпуклый многогранник $\mathbf{H}$ — это выпуклый многоугольник на плоскости с координатами $|q_0|, |q_0\beta_1 - q_1|$. Его граница $\partial \mathbf{H}$ — это ломаная линия, вершины которой соответствуют подходящим дробям q_1/q_0 цепной дроби числа β_1 .

Гипотеза 1. Если все $f_1, \dots, f_m$ суть линейные и квадратичные формы, то граница $\partial \mathbf{H}$ не имеет непрерывных кривых участков, т.е. является многогранной.

Более того, до сих пор неизвестно ни одного набора форм $f_1, \dots, f_m$, для которого граница $\partial \mathbf{H}$ не была бы многогранной.

IV. ОСНОВНЫЕ ЕДИНИЦЫ КОЛЬЦА $\mathbb{Z}[\lambda]$

Пусть дан целый неприводимый в $\mathbb{Q}$ вещественный многочлен

$$p(\xi) = \xi^n + b_1 \xi^{n-1} + \dots + b_{n-1} \xi + b_n \quad (4)$$

с целыми коэффициентами b_i , т.е. он не разлагается в произведение двух нетривиальных многочленов с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Ему соответствует кольцо $\mathbb{Z}[\lambda]$ чисел вида

$$\xi(X) = x_1 + x_2 \lambda + \dots + x_n \lambda^{n-1} \quad (5)$$

с целыми коэффициентами x_i , где λ — корень многочлена (4) и $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$. Каждому числу (5) соответствует квадратная матрица $D(\xi) = (d_{ij})$:

$$\lambda^i \xi(X) = \sum_{j=0}^{n-1} d_{ij} \lambda^j, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6)$$

Определитель $\det D(\xi)$ называется нормой числа (5) и обозначается $N(\xi)$. Норма произведения чисел равна произведению их норм: $N(\xi_1 \cdot \xi_2) = N(\xi_1) \cdot N(\xi_2)$. Те числа (5), у которых норма $N(\xi) = \pm 1$, называются единицами [1, гл. II]. В дальнейшем предполагаем, что среди корней многочлена $p(\xi)$ нет единиц, т.е. $|b_n| \neq 1$. Этим исключается кручение в абелевой группе единиц. Существует такой набор единиц $\Sigma = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$, что всякая единица $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\lambda]$ однозначно представляется в виде

$$\varepsilon = \pm \varepsilon_1^{a_1} \dots \varepsilon_r^{a_r}, \quad (7)$$

где a_i — целые числа. Эти единицы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ называются основными.

Задача 2. Для фиксированного многочлена (4) найти набор основных единиц кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$.

Решение задачи 2. Пусть неприводимый в $\mathbb{Q}$ многочлен (4) имеет l вещественных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ и k пар комплексно сопряженных корней $\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_{l+k}, \bar{\lambda}_{l+1}, \dots, \bar{\lambda}_{l+k}$, $l + 2k = n$. Здесь $l \geq 0, k \geq 0$. Рассмотрим $m = k + l$ форм

$$f_i(X) = \langle L_i, X \rangle, \quad i = 1, \dots, l, \quad (8)$$

$$f_{l+j}(X) = \langle K_{l+j}, X \rangle \langle \bar{K}_{l+j}, X \rangle, \quad j = 1, \dots, k, \quad (9)$$

где

$$L_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1}), \quad (10)$$

$$\langle L_i, X \rangle = x_1 + \lambda_i x_2 + \dots + \lambda_i^{n-1} x_n, \quad (11)$$

$$K_{l+j} = (1, \lambda_{l+j}, \lambda_{l+j}^2, \dots, \lambda_{l+j}^{n-1}), \quad (12)$$

$$\bar{K}_{l+j} = (1, \bar{\lambda}_{l+j}, \bar{\lambda}_{l+j}^2, \dots, \bar{\lambda}_{l+j}^{n-1}). \quad (13)$$

По теореме Дирихле [1, гл. II, § 4, п. 3] для многочлена (4) число основных единиц $r = k + l - 1$. Далее предполагаем, что $m = k + l \geq 2$. Ибо если $k + l \leq 1$, то $r \leq 0$ и по теореме Дирихле основные единицы отсутствуют.

Теорема 1. ([1, гл. II, § 1, п. 2]). Для чисел (5) с $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$N(\xi) = f(X) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(X) \dots f_m(X). \quad (14)$$

Поэтому для всех единиц вида (5)

$$f(X) = \pm 1 \quad \text{и} \quad g(X) \stackrel{\text{def}}{=} |f(X)| = 1. \quad (15)$$

Пусть $\check{\mathbb{Z}}^n$ — множество точек $X \in \mathbb{Z}^n$ со свойством (15). Рассмотрим для него (т.е. для $X \in \check{\mathbb{Z}}^n$) конструкции раздела III: множество $\check{\mathbf{Z}}$ значений

$$G(X) = (g_1(X), \dots, g_m(X)) \subset \mathbf{S} = \mathbb{R}_+^m, \quad (16)$$

где $g_i(X) = |f_i(X)|$, $i = 1, \dots, m$, выпуклую оболочку $\check{\mathbf{H}}$ множества $\check{\mathbf{Z}}$ и ее границу $\partial \check{\mathbf{H}}$. Граница $\partial \check{\mathbf{H}}$ имеет размерность $m - 1 = r$, не имеет кривых участков и состоит из вершин, ребер и граней.

Гипотеза 2. Все грани границы $\partial \check{\mathbf{H}}$ являются симплексами, а значение $G_0 = (1, 1, \dots, 1)$ является ее вершиной.

Пусть Δ — некоторая $(m - 1)$ -мерная грань границы $\partial \check{\mathbf{H}}$, содержащая вершину $G_0 = (1, 1, \dots, 1)$, а $R_1, \dots, R_{m-1}$ — ее ребра, содержащие G_0 .

Теорема 2. Пусть G_i — вторая вершина ребра R_i , отличная от вершины G_0 , $i = 1, \dots, m - 1$. Числа (5), у которых $G(X) = G_i$, $i = 1, \dots, m - 1$, образуют набор основных единиц кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$.

Следовательно, для вычисления основных единиц надо на некотором ограниченном множестве $\|X\| < \text{const}$, $X \in \check{\mathbb{Z}}^n$ вычислить кусок границы $\partial \check{\mathbf{H}}$, содержащий $(m - 1)$ -мерную грань Δ .

Каждому числу (5) соответствует матрица

$$T(\xi) = x_1 E + x_2 B + \dots + x_n B^{n-1}, \quad (17)$$

где E — единичная, а B — это матрица, сопровождающая многочлен (4):

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \dots & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Если число (5) является единицей, то матрица $T(\xi)$ унимодулярна и линейное преобразование $X^* = T(\xi)X$ в $\mathbb{R}^n$ индуцирует автоморфизм

$$s_i^* = g_i(X)s_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (19)$$

множества $\check{\mathbf{H}}$ в $\mathbf{S} = \mathbb{R}_+^m$. Следовательно, каждой единице ε соответствуют два автоморфизма: граничных точек в $\mathbb{R}^n$ и многогранника $\mathbf{H}$ в $\mathbb{R}_+^m$, т.е. $T(\varepsilon)$ — это период обобщенной цепной дроби. Количество независимых периодов равно $m - 1$. Это — обобщение теоремы Лагранжа [4, § 10], доказанной для $n = l = 2$, $k = 0$, т.е. $m = k + l = 2$.

V. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ОБЛАСТЬ

В поле $\mathbb{Q}(\lambda)$ всякая целая степень $t \geq n$ числа ξ из (5) однозначно записывается в виде многочлена от λ степени $n - 1$, ибо

$$\lambda^n = -(b_n + b_{n-1}\lambda + \dots + b_1\lambda^{n-1}). \quad (20)$$

Поэтому отношение двух многочленов от λ однозначно записывается в виде многочлена от λ степени $n - 1$.

Теорема 3. Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Q}^n$ и $\xi(X) \cdot \xi(Y) = \xi(Z)$, тогда $f_i(X) \cdot f_i(Y) = f_i(Z)$, $i = 1, \dots, m$.

Следствие 1. В условиях теоремы 3 $g_i(X) \cdot g_i(Y) = g_i(Z)$, $i = 1, \dots, m$.

Логарифмическая замена

$$h_i(X) = \ln g_i(X), \quad i = 1, \dots, m, \quad (21)$$

$$H \stackrel{\text{def}}{=} (h_1, \dots, h_m)$$

взаимно однозначно переводит $\mathbf{S} = \mathbb{R}_+^m$ в $\mathbb{R}^m$. При этом $(m - 1)$ -мерная граница $\partial\mathbf{H}$ многогранного множества $\mathbf{H}$ переходит в $(m - 1)$ -мерную поверхность, которая взаимно однозначно проектируется на $\mathbb{R}^{m-1} = \{H'\}$, где $H' \stackrel{\text{def}}{=} (h_1, \dots, h_{m-1})$.

На $\mathbb{R}^{m-1}$ автоморфизм (19) принимает вид

$$h_i^* = \ln g_i(X) + h_i, \quad i = 1, \dots, m - 1, \quad (22)$$

т.е. является параллельным переносом. Единицы кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ образуют абелеву группу по умножению. По теореме 3 их логарифмы H образуют абелеву группу по сложению. В $\mathbb{R}^{m-1}$ имеется фундаментальная область $\mathcal{F}$ относительно сдвигов (22) этой группы. Пусть m -мерные векторы G_i , $i = 1, \dots, m - 1$, соответствующие основным единицам теоремы 2, имеют вид $G_i = (g_{1i}, \dots, g_{mi})$. Положим

$$\Gamma_i = (\ln g_{1i}, \dots, \ln g_{m-1,i}), \quad i = 1, \dots, m - 1. \quad (23)$$

Теорема 4. В $\mathbb{R}^{m-1}$ фундаментальная область относительно сдвигов (22), (23) — это $(m - 1)$ -мерный “куб”

$$\mathcal{F} = \{H' = \mu_1\Gamma_1 + \dots + \mu_{m-1}\Gamma_{m-1}, \quad 0 \leq \mu_i \leq 1, i = 1, \dots, m - 1\}. \quad (24)$$

При вычислении границы выпуклой оболочки некоторого множества точек трудности возрастают вместе с ростом количества точек. Чтобы уменьшить эти трудности, можно вычисления разбить на следующие 6 шагов.

Шаг 1. Сначала в кольце $\mathbb{Z}[\lambda]$ находим все единицы с $X \in \mathbb{Z}^n$ из области $\|X\| < \text{const}$, вычисляя значения $g(X)$ в этих X .

Шаг 2. Затем на множестве единиц $\{\check{X}\}$ надо вычислить границу $\partial\check{\mathbf{H}}$ их выпуклой оболочки $\check{\mathbf{H}}$.

Шаг 3. По теореме 2 из $\partial\check{\mathbf{H}}$ выделяем набор основных единиц, представленных в $\mathbf{S}$ вершинами $G_0, G_1, \dots, G_{m-1}$.

Шаг 4. По теореме 4 находим фундаментальную область (24).

Шаг 5. Теперь выпуклая оболочка значений $G(X)$ с $\xi(X) \in \mathbb{Z}[\lambda]$ вычисляется только по тем X , у которых $H'(X)$ попадают в фундаментальную область (24) и ее близкую окрестность.

Шаг 6. По этой части границы $\partial\mathbf{H}$ восстанавливается вся граница $\partial\mathbf{H}$ с помощью периодов G_i , $i = 1, \dots, m - 1$, соответствующих основным единицам, или с помощью сдвигов (22).

VI. ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

Многочлену $p(\xi)$ степени n из (4) соответствует форма $f(X)$ из (14) степени n от n переменных $X = (x_1, \dots, x_n)$. Ее коэффициенты являются многочленами от коэффициентов b_i многочлена (4). Так, при $n = 2$

$$f(X) = x_1^2 - b_1x_1x_2 + b_2x_2^2, \quad (25)$$

при $n = 3$

$$f(X) = x_1^3 - b_1x_1^2x_2 + b_2x_1x_2^2 - b_3x_2^3 + (b_1^2 - 2b_2)x_1^2x_3 + (3b_3 - b_1b_2)x_1x_2x_3 + b_1b_2x_2^2x_3 + (b_2^2 - 2b_1b_3)x_1x_3^2 - b_2b_3x_2x_3^2 + b_3^2x_3^3, \quad (26)$$

при $n = 4$

$$f(X) = x_1^4 - b_1x_1^3x_2 + (b_1^2 - 2b_2)x_1^3x_3 + (-b_1^3 + 3b_1b_2 - 3b_3)x_1^3x_4 + b_2x_1^2x_2^2 + (-b_1b_2 + 3b_3)x_1^2x_2x_3 + (b_1^2b_2 - b_1b_3 - 2b_2^2 + 4b_4)x_1^2x_2x_4 + (-2b_1b_3 + b_2^2 + 2b_4)x_1^2x_3^2 + \dots \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 & + (2b_1^2b_3 - b_1b_2^2 - 5b_1b_4 + b_2b_3)x_1^2x_3x_4 + \\
 & + (3b_1^2b_4 - 3b_1b_2b_3 + b_2^3 - 3b_2b_4 + 3b_3^2)x_1^2x_4^2 - b_3x_1x_2^3 + \\
 & + (b_1b_3 - 4b_4)x_1x_2^2x_3 + \\
 & + (-b_1^2b_3 + b_1b_4 + 2b_2b_3)x_1x_2^2x_4 + (3b_1b_4 - b_2b_3)x_1x_2x_3^2 + \\
 & + (-3b_1^2b_4 + b_1b_2b_3 + 4b_2b_4 - 3b_3^2)x_1x_2x_3x_4 + \\
 & + (b_1b_2b_4 + 2b_1b_3^2 - b_2^2b_3 - 5b_3b_4)x_1x_2x_4^2 + \\
 & + (-2b_2b_4 + b_3^2)x_1x_3^3 + (2b_1b_2b_4 - b_1b_3^2 + b_3b_4)x_1x_3^2x_4 + \\
 & + (-b_1b_3b_4 - 2b_2^2b_4 + b_2b_3^2 + 4b_4^2)x_1x_3x_4^2 + \\
 & + (-3b_1b_4^2 + 3b_2b_3b_4 - b_3^3)x_1x_4^3 + \\
 & + b_4x_2^4 - b_1b_4x_2^3x_3 + b_4(b_1^2 - 2b_2)x_2^3x_4 + b_2b_4x_2^2x_3^2 - \\
 & - b_4(b_1b_2 - 3b_3)x_2^2x_3x_4 - \\
 & - b_4(2b_1b_3 - b_2^2 - 2b_4)x_2^2x_4^2 - b_3b_4x_2x_3^3 + \\
 & + b_4(b_1b_3 - 4b_4)x_2x_3^2x_4 + \\
 & + b_4(3b_1b_4 - b_2b_3)x_2x_3x_4^2 - b_4(2b_2b_4 - b_3^2)x_2x_4^3 + \\
 & + b_4^2x_3^4 - b_1b_4^2x_3^3x_4 + b_2b_4^2x_3^2x_4^2 - b_3b_4^2x_3x_4^3 + b_4^3x_4^4.
 \end{aligned}$$

Для любого n при $x_3 = \dots = x_n = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 f(X) &= x_1^n - b_1x_1^{n-1}x_2 + \\
 &+ b_2x_1^{n-2}x_2^2 + \dots + (-1)^{n-1}b_{n-1}x_1x_2^{n-1} + (-1)^nb_nx_2^n.
 \end{aligned}$$

Задача 3. Для заданного многочлена (4) найти все решения (5) с $\xi \in \mathbb{Z}[\lambda]$ уравнения

$$f(X) = \beta, \quad (28)$$

где число β рационально, $\beta \neq \pm 1$.

Решение задачи 3.

Теорема 5. ([1, гл. II, § 5, теорема 1]). Все решения (5) с $\xi \in \mathbb{Z}[\lambda]$ уравнения (48) имеют вид

$$\xi = \xi_j^0 \varepsilon_1^{a_1} \dots \varepsilon_r^{a_r}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (29)$$

где $\xi_1^0, \dots, \xi_J^0$ — конечное множество выделенных решений и $a_1, \dots, a_r$ — любые целые числа. Если выделенных решений ξ_j^0 нет, то уравнение (28) не имеет решений.

Далее дается набросок конструктивного доказательства этой теоремы, позволяющий вычислять соответствующие постоянные и выделенные решения $\xi_1^0, \dots, \xi_J^0$.

Согласно предыдущим разделам находим набор основных единиц $\Sigma = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1})$ кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ и по ним строим фундаментальную область $\mathcal{F}$ в координатах $H' \stackrel{\text{def}}{=} (h_1, \dots, h_{m-1})$.

Лемма 1. Для всех точек $X \in \mathbb{R}^n$, у которых логарифмические проекции $H' = (h_1, \dots, h_{m-1})$ лежат в фундаментальной области $\mathcal{F}$, справедливы оценки

$$\mu_i \leq g_i(X) \leq v_i, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (30)$$

где $0 < \mu_i < v_i$ — вещественные числа.

Лемма 2. Для всех точек X , у которых $H' \in \mathcal{F}$ и выполнено равенство $g(X) = |\beta|$, справедливы оценки

$$\mu_m \leq g_m(X) \leq v_m, \quad (31)$$

где $0 < \mu_m < v_m$ — вещественные числа.

Нижние оценки в (30) нужны для получения верхней оценки в (31).

Поскольку $\langle K, X \rangle = \langle \text{Re}K, X \rangle + i \langle \text{Im}K, X \rangle$, то

$$\langle K, X \rangle \langle \bar{K}, X \rangle = \langle \text{Re}K, X \rangle^2 + \langle \text{Im}K, X \rangle^2. \quad (32)$$

Лемма 3. Если

$$\begin{aligned}
 \gamma &\stackrel{\text{def}}{=} \det(\Lambda_1, \dots, \Lambda_l, \text{Re}K_{l+1}, \\
 &\text{Im}K_{l+1}, \dots, \text{Re}K_{l+k}, \text{Im}K_{l+k}) \neq 0,
 \end{aligned} \quad (33)$$

то области в $\mathbb{R}^n$, где выполнены неравенства (30) и (31), ограничены.

Поскольку

$$\gamma = \frac{1}{(-2i)^k} \det(\Lambda_1, \dots, \Lambda_l, K_{l+1}, \bar{K}_{l+1}, \dots, K_{l+k}, \bar{K}_{l+k}), \quad (34)$$

и последний определитель отличается от определителя Вандермонда

$$W = \prod_{1 \leq i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$$

ненулевым множителем, то условие (33) эквивалентно условию, что у многочлена (4) нет кратных корней. Но это так по условию, что многочлен (4) неприводим в $\mathbb{Q}$.

Неравенства (30), (31) выделяют в $\mathbb{R}^n$ всего 2^m ограниченных областей вида

$$\mu_{ii} \leq \kappa_i f_i(X) \leq v_i, \quad \kappa_i = \pm 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (35)$$

В каждой из них количество целочисленных точек $X \in \mathbb{Z}^n$ конечно. В каждой из этих точек можно вычислить $f(X)$ и отобрать те X_i , в которых выполнено уравнение (28). Наконец, среди этих точек X_i оставляем только те $X_1^0, \dots, X_J^0$, для которых отношения $\xi(X_i^0)/\xi(X_j^0)$ по $j \neq i$ не лежат в $\mathbb{Z}[\lambda]$. Тогда $\xi_j^0 = \xi(X_j^0)$, $j = 1, \dots, J$, являются выделенными решениями уравнения (48) и все решения этого уравнения имеют вид (49).

Это первый способ. Он заключается в том, что в каждом ортанте пространства $\mathbb{R}^n = \{X\}$ кусок множества значений $X : f(X) = \beta$ заключается в некоторый параллелепипед. В каждом из них перебираются все точки X решетки $\mathbb{Z}^n$ и находятся те, которые удовлетворяют уравнению (28). Затем среди всех этих точек всех ортантов оставляются все выделенные решения.

Второй способ. Все искомые точки решетки лежат в множестве $-v_i \leq f_i(X) \leq v_i$, $i = 1, \dots, m$. Найдем все точки пересечения поверхностей

$$f_i(X) = \pm v_i, \quad i = 1, \dots, m$$

и для каждого x_j выберем значение $z_j = \max |x_j|$ среди этих точек пересечения. Затем среди точек X решетки, для которых

$$-z_j \leq x_j \leq z_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

найдем все те, которые удовлетворяют уравнению (48). Затем, вычисляя их попарные отношения, находим множество выделенных решений. Этот способ удобнее для вычислений на компьютере, но дает много лишних решений, которые не являются выделенными.

VII. ОБОБЩЕНИЯ

A. Единицы с положительной нормой

Для единицы ϵ норма $N(\epsilon) = \pm 1$. Иногда нужны только единицы, у которых норма положительна. Чтобы при четном n найти базисный набор таких (квазиосновных) единиц $\hat{\Sigma} = (\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_{m-1})$, надо в описанной процедуре раздела 4 оставлять только те точки $X \in \check{\mathbb{Z}}^n$, для которых $f(X) = +1$, и по ним указанным выше способом выделить мультипликативный базис. При нечетном n всякой единице ϵ соответствует единица ϵ' с $N(\epsilon') = 1$: это либо ϵ , либо $-\epsilon$, т.е. в записи (5) X заменяется на $-X$.

B. Произвольный порядок

Согласно [1, гл. II, § 2] полный модуль в поле $\mathbb{Q}(\lambda)$, содержащий число 1 и являющийся коль-

цом, называется **порядком** поля $\mathbb{Q}(\lambda)$. Очевидно, что кольцо $\mathbb{Z}[\lambda]$ является порядком поля $\mathbb{Q}(\lambda)$. Но в этом поле могут быть и другие порядки. Например, если в записи (5) все x_2 — четные, то получим подкольцо кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$. Все результаты разделов IV–VI, доказанные для порядка $\mathbb{Z}[\lambda]$, справедливы для любого порядка Ω поля $\mathbb{Q}(\lambda)$. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — базис порядка Ω , т.е. все числа $\alpha \in \Omega$ имеют вид

$$\alpha = y_1\omega_1 + y_2\omega_2 + \dots + y_n\omega_n, \quad y_i \in \mathbb{Z}. \quad (36)$$

При записи этих чисел в виде (5) коэффициенты x_i могут быть рациональными числами.

Отметим отличия, возникающие для произвольного порядка Ω . Единицы (5) этого порядка могут иметь рациональные коэффициенты x_i . Существует такой набор единиц $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r \in \Omega$, что все единицы поля имеют вид (7). Назовем эти единицы основными. Для них справедливы все конструкции и теоремы разделов IV–VI. Только матрица периода $T(\epsilon)$ может иметь рациональные элементы, но $\det T(\epsilon) = N(\epsilon) = \pm 1$. Поэтому для отыскания основных единиц порядка надо вычислять $f(X)$ на решетке чисел (56), записанных в виде (5) с рациональными x_i . Дальнейшие вычисления такие же, как для кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$. Мультипликативный базис единиц с положительной нормой образует набор квазиосновных единиц $\hat{\Sigma} = (\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_{m-1})$ с положительной нормой. Здесь также можно найти фундаментальные области $\mathcal{F}$ и $\hat{\mathcal{F}}$, соответствующие наборам Σ и $\hat{\Sigma}$.

C. Максимальный порядок

В поле $\mathbb{Q}(\lambda)$ имеется максимальный порядок $\tilde{\Omega}$. Его базис $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_r$ называется фундаментальным, о его вычислении см. [1, гл. II, § 2]. Все сказанное для порядка $\mathbb{Z}[\lambda]$ справедливо и для максимального порядка. В частности, он имеет набор основных единиц $\Sigma = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$, набор квазиосновных единиц $\hat{\Sigma} = (\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_r)$ с положительными нормами и соответствующие им фундаментальные области $\mathcal{F}$ и $\hat{\mathcal{F}}$.

VIII. ПРЕДШЕСТВЕННИКИ И ДИСКРИМИНАНТЫ

Для $n = 2$, $k = 0$, $l = 2$, когда $m = 2$ и $r = 1$, т.е. для вещественных квадратичных полей способ вычисления основной единицы максимального порядка $\tilde{\Omega}$, основанный на разложении в цепную дробь, описан в книге [1, гл. II, § 7]. В конце этой книги в табл. 1 приведены значения основных еди-

ниц $\varepsilon > 1$ максимальных порядков полей $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ для $2 \leq d \leq 101$, $d \in \mathbb{Z}$.

Для $n = 3$, $m = 2$ ($r = 1$) и $n = 3$, $m = 3$ ($r = 2$) основные единицы максимальных порядков вычислял Вороной [2] с помощью своих пошаговых обобщений цепной дроби. В [6, 7, 12] вычислены многоугольники и многогранники $\partial\mathbf{H}$ с помощью других обобщений.

Для $n = 4$, $k = 2$, $l = 0$, т.е. $m = 2$ ($r = 1$), Парусников [3] вычислил единицы максимальных порядков полей $\mathbb{Q}(\lambda)$ для 41 многочлена (4) с помощью пошагового алгоритма. Но большинство найденных им единиц не являются основными, а являются лишь их целыми степенями.

Напомним, как определить число l вещественных и число k пар комплексно сопряженных корней многочлена (4) в случае, когда нет кратных корней, т.е. дискриминант многочлена D отличен от нуля.

Случай $n = 2$. Тогда $D = b_1^2 - 4b_2$. Имеем $l = 2$, $k = 0$, если $D > 0$; $k = 1$, если $D < 0$.

Случай $n = 3$. Тогда $D = -4b_1^2b_3 + b_1^2b_2^2 + 18b_1b_2b_3 - 4b_2^2 - 27b_3^2$. Имеем $l = 3$, $k = 0$, если $D > 0$; $l = 1$, $k = 1$, если $D < 0$.

Случай $n = 4$. Тогда

$$D = -27b_1^4b_4^2 + 18b_1^3b_2b_3b_4 - 4b_1^3b_3^3 - \quad (37)$$

$$- 4b_1^2b_2^3b_4 + b_1^2b_2^2b_3^2 +$$

$$+ 144b_1^2b_2b_4^2 - 6b_1^2b_3^2b_4 +$$

$$+ 18b_1b_2b_3^3 - 80b_1b_2^2b_3b_4 + 16b_2^4b_4 -$$

$$- 4b_2^3b_3^2 - 192b_1b_3b_4^2 - 128b_2^2b_4^2 +$$

$$+ 144b_2b_3^2b_4 - 27b_3^4 + 256b_4^3,$$

$$D_1 = -6b_1^3b_3 + 2b_1^2b_2^2 - 12b_1^2b_4 + 28b_1b_2b_3 -$$

$$- 8b_2^3 + 32b_2b_4 - 36b_3^2,$$

$$D_2 = 3b_1^2 - 8b_2.$$

Здесь D_1 и D_2 — субдискриминанты многочлена (4). $l = 2$, $k = 1$, если $D < 0$;

$l = 0$, $k = 2$, если $D > 0$ и либо $D_1 = D_2 = 0$, либо хотя бы один из D_1 и D_2 отрицателен;

$l = 4$, $k = 0$, если все D, D_1, D_2 положительны [14, 15].

Таблица 1. Решения уравнения (28) (71), $\beta = 4$ в параллелепипеде (78)

No.	x_1	x_2	x_3
1	-14	+5	+4
2	-14	-25	+9
3	-13	-19	-6
4	-11	-2	+1
5	-8	-1	+1
6	-6	-1	+1
7	-4	-9	-7
8	-3	-10	+1
9	-3	-2	+1
10	-2	-1	-11
11	-2	-1	+0
12	-1	-1	+0
13	+0	+3	-5
14	+0	-2	+1
15	+0	-1	+1
16	+0	+3	+1
17	+1	+2	+1
18	+2	+3	+1
19	+3	+9	-2
20	+3	-1	+0
21	+4	-1	-1
22	+4	+4	+1
23	+9	-6	+1

IX. ПРИМЕР СЛУЧАЯ $n = 2$, $l = 2$, $k = 0$

Пусть $p(\xi) = \xi^2 - 5$. Тогда $n = 2$, а корни многочлена $p(\xi)$ суть $\lambda = \pm\sqrt{5} \approx \pm 2.23605$. Поэтому $k = 0$, $l = 2$, $m = k + l = 2$ и $r = m - 1 = 1$. Разложение $\sqrt{5}$ в цепную дробь имеет вид

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\ddots}}}}.$$

Подходящие дроби суть

$$2/1, \quad 9/4, \quad 38/17, \quad 161/72, \quad 682/305, \dots$$

На рис. 1 показаны: прямая $x_2 = x_1/\sqrt{5}$, кривые $x_1^2 - 5x_2^2 = \pm 1$ и лежащие на них точки $(x_1, x_2) : (1, 0)$, $(2, 1)$, $(9, 4)$, соответствующие подходящим дробям. На рис. 1 масштабы по осям разные. Здесь

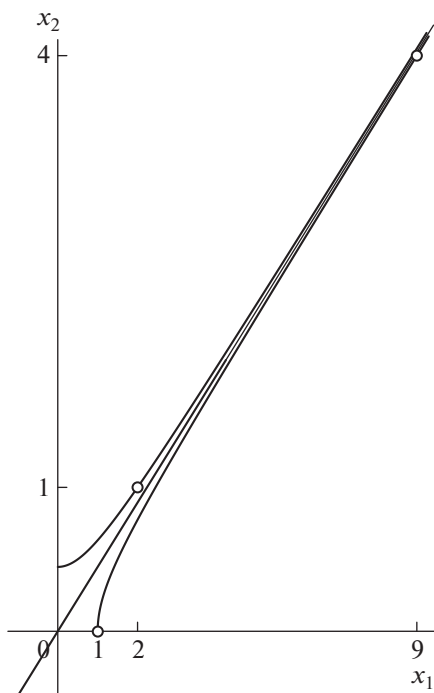


Рис. 1. Прямая $x_2 = x_1/\sqrt{5}$, кривые $x_1^2 - 5x_2^2 = \pm 1$ и точки, соответствующие подходящим дробям цепной дроби $\sqrt{5}$. Масштабы по осям разные.

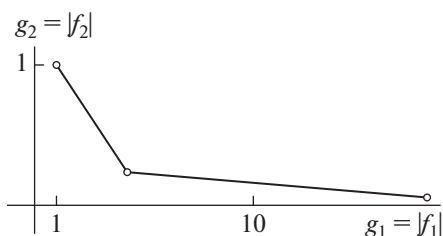


Рис. 2. Кусок ломаной $\partial\mathcal{H}$. Масштабы по осям разные.

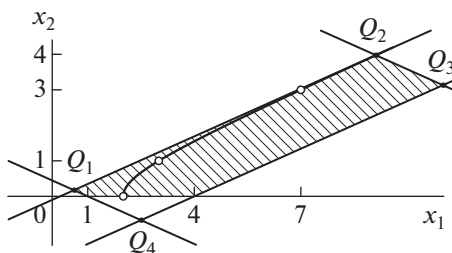


Рис. 3. Область в $\mathbb{R}^2$, где содержатся все выделенные решения ξ_i^0 , заштрихована. Показана кривая $x_1^2 - 5x_2^2 = 4$ и выделенные точки на ней.

$f_1(X) = x_1 + x_2\sqrt{5}$, $f_2(X) = x_1 - x_2\sqrt{5}$ и $f(X) = x_1^2 - 5x_2^2$. В координатах $g_i(X) = |f_i(X)|$, $i = 1, 2$, для целочисленных X получаем ломаную линию, показанную на рис. 2. Ее вершины соответствуют подходящим дробям. Вообще, если $\lambda_1 > 0$ — корень квадратного уравнения, то подходящим дробям цепной дроби числа λ_1 соответствуют вершины ломаной $\partial\mathcal{H}$.

Основная единица максимального порядка $\tilde{\Omega}$ есть $\epsilon = (1 + \lambda)/2 \approx 1.61803$, т.е. в записи (5) $x_1 = x_2 = 1/2$. Поскольку $N(X) = x_1^2 - 5x_2^2$, то $N(\epsilon) = -1$ и квазиосновная единица порядка $\tilde{\Omega}$ есть $\hat{\epsilon} = \epsilon^2 = (3 + \lambda)/2 \approx 2.61803$. Основная единица кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ есть $\epsilon^3 = 2 + \lambda \approx 4.23605$ с нормой $N(\epsilon^3) = -1$. Наконец, квазиосновная единица этого кольца есть $\hat{\epsilon} = \epsilon^6 = 9 + 4\lambda \approx 17.94421$.

Уравнение (48) здесь имеет вид $x_1^2 - 5x_2^2 = \beta$. Положим $\beta = 4$ и найдем все целочисленные решения (x_1, x_2) уравнения

$$x_1^2 - 5x_2^2 = 4, \quad (38)$$

т.е. $\xi(x_1, x_2) = x_1 + x_2\sqrt{5} \in \mathbb{Z}(\sqrt{5})$. Ограничимся решениями $x_1, x_2 \geq 0$, остальные решения получают изменением знаков. Поэтому наша основная единица — это $\hat{\epsilon} = \epsilon^6 = 9 + 4\sqrt{5} \approx 17.94421 < 18$. Фундаментальная область $\hat{\mathcal{F}}$ в координатах x_1, x_2 — это

$$1 \leq f_1 \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + x_2\sqrt{5} \leq \hat{\epsilon} < 18. \quad (39)$$

На кривой (66) над $\hat{\mathcal{F}}$ выполнены неравенства $4/\hat{\epsilon} \leq f_2 \stackrel{\text{def}}{=} x_1 - x_2\sqrt{5} \leq 4$, т.е.

$$\frac{2}{9} \leq x_1 - x_2\sqrt{5} \leq 4. \quad (40)$$

На плоскости $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ неравенства (39), (40) выделяют четырехугольник, ограниченный прямыми $f_1 = 1$, $f_1 = 18$, $f_2 = 2/9$, $f_2 = 4$ и показанный на рис. 3. На нем показана ветвь кривой $f(X) = 4$ и три выделенных точки на ней.

Вершины этого четырехугольника суть

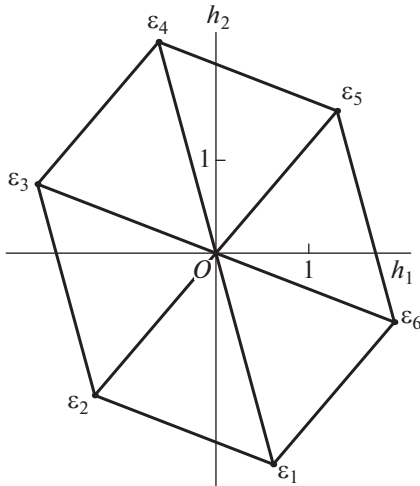


Рис. 4. Логарифмическая проекция вершин, ребер и граней многогранника $\partial\tilde{H}$. Показаны проекции единиц, близкие к нулю. Проекция ребер выпрямлены.

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9}, \frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{9\sqrt{5}} \right) \approx (0.611111, 0.17392), \\ Q_2 &= \left(9 + \frac{1}{9}, \frac{9}{\sqrt{5}} - \frac{1}{9\sqrt{5}} \right) \approx (9.111111, 3.97524), \\ Q_3 &= \left(11, \frac{7}{\sqrt{5}} \right) \approx (11, 3.13051), \\ Q_4 &= \left(\frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{5}}{10} \right) \approx (2.5, -0.67082). \end{aligned} \quad (41)$$

Теперь для каждого целого $x_2 : 0 \leq x_2 \leq 3$ переберем все целые $x_1 : 1 \leq x_1 < 11$ и выберем среди таких точек (x_1, x_2) решения уравнения (66). Получаем точки $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(7, 3)$. Поскольку отношения $(3 + \sqrt{5})/2$, $(7 + 3\sqrt{5})/2$, $\frac{7 + 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ не лежат в $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, то получим три выделенных решения $\xi_1^0 = 2$, $\xi_2^0 = 3 + \sqrt{5}$, $\xi_3^0 = 7 + 3\sqrt{5}$. По теореме 5 все решения с $x_1, x_2 \geq 0$ имеют вид

$$\xi = \xi_i^0 (9 + 4\sqrt{5})^a, \quad i = 1, 2, 3, \quad 0 \leq a \in \mathbb{Z}. \quad (42)$$

10. ПРИМЕР СЛУЧАЯ $n = 3, l = 3, k = 0$

Пусть $p(\xi) = \xi^3 - 7\xi - 2$, все его корни вещественны:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx -2.489288, \quad \lambda_2 \approx -0.289168, \\ \lambda_3 &\approx 2.778457. \end{aligned}$$

Здесь $n = m = l = 3$, $k = 0$, $r = m - 1 = 2$. Фундаментальный базис максимального порядка $\tilde{\Omega}$ есть

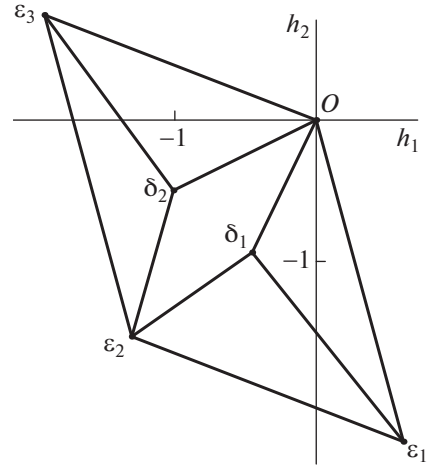


Рис. 5. Логарифмическая проекция многогранника ∂H на фундаментальную область.

$1, \lambda, (\lambda + \lambda^2)/2$. Здесь $b_1 = 0$, $b_2 = -7$, $b_3 = -2$ и согласно разделу VI

$$\begin{aligned} f(X) &= x_1^3 - 7x_1x_2^2 + 2x_2^3 + 14x_1^2x_2 - \\ &\quad - 6x_1x_2x_3 + 49x_1x_3^2 - 14x_2x_3^2 - 8x_3^3. \end{aligned} \quad (43)$$

Вычисления проведем в 6 шагов раздела V.

Шаг 1. Вычисляя значения $g(Y)$ на точках $\xi = y_1 + y_2\lambda + y_3(\lambda + \lambda^2)/2$ с целыми y_i , находим единицы $\varepsilon_i = (y_1, y_2, y_3)$: $\varepsilon_1 = (0, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 2, 2)$, $\varepsilon_3 = (-2, 0, 1)$, $\varepsilon_4 = (-10, -2, 3)$, $\varepsilon_5 = (5, 2, -2)$, $\varepsilon_6 = (0, 2, -1)$.

Шаг 2. Вычисляем выпуклую оболочку соответствующих точек $G_0, G_i = G(Y_i)$, $i = 1, \dots, 6$, и получаем у нее 6 двумерных граней. Их логарифмические проекции на плоскость h_1, h_2 показаны на рис. 4. На нем логарифмические проекции ребер показаны прямыми отрезками, хотя они являются криволинейными. Заметим, что $\varepsilon_{i+3} = \varepsilon_i^{-1}$, $i = 1, 2, 3$.

Шаг 3. Здесь любая пара ε_i и $\varepsilon_j \neq \varepsilon_i^{\pm 1}$ ($i, j = 1, \dots, 6$) образует набор фундаментальных единиц.

Шаг 4. Для пары $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ фундаментальная область $\mathcal{F}$ — четырехугольник с вершинами $0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Шаг 5. Логарифмическая проекция границы выпуклой оболочки значений $G(Y)$ по $Y \in \mathbb{Z}^3$ с $H'(Y) \in \mathcal{F}$ показана на рис. 5. Тут имеются две новые вершины: $\delta_1 = (0, 1, 1)$ и $\delta_2 = (1, 1, 1)$. На них

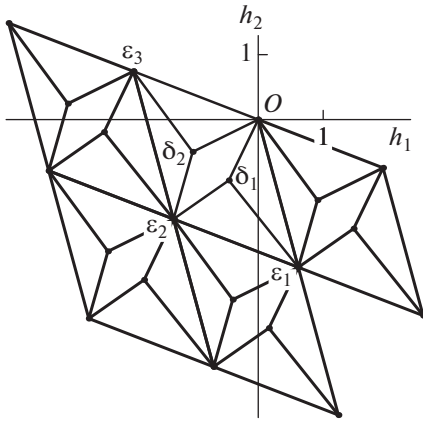


Рис. 6. Логарифмическая проекция многогранника $\partial\mathbf{H}$ на часть плоскости h_1, h_2 .

$g(Y) = 2$. Имеется четырехугольная грань с вершинами $0, \delta_1, \varepsilon_2, \delta_2$.

Шаг 6. Сдвигая фундаментальную область рис. 5 на целочисленные линейные комбинации логарифмов известных единиц, получаем схематическую проекцию всего многогранника $\partial\mathbf{H}$ на плоскость h_1, h_2 , показанную на рис. 6. На рис. 7 показана точная логарифмическая проекция многогранника $\partial\mathbf{H}$ на плоскость h_1, h_2 ; проекции ребер криволинейны. Отрезки в ромбах — это ошибки: их не должно быть. Этот рисунок взят из [7], куда он попал из [13].

Этот пример взят у Вороного [2, § 59, пример]. Там найдены две пары основных единиц $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ и $\varepsilon_2, \varepsilon_4$, но нет аналогов наших рисунков. На самом деле, в этом примере граница $\partial\mathbf{H}$ вычисляется сразу как выпуклая оболочка значений $G(Y)$ по $Y \in \mathbb{Z}^3$, ибо размерность задачи $n = 3$ невелика. Но здесь показано разбиение на шаги, которое может быть полезным при больших размерностях n и m .

Найдем все решения X с $\xi(X) \in \tilde{\Omega}$ уравнения (48) с $\beta = 4$. В единице ε_1 формы

Таблица 2. Точки $\xi_1^0, \dots, \xi_5^0$

No.	x_1	x_2	x_3
1	-14	-25	9
2	-14	5	4
3	-13	-19	-6
4	-11	-2	1
5	-8	-1	1

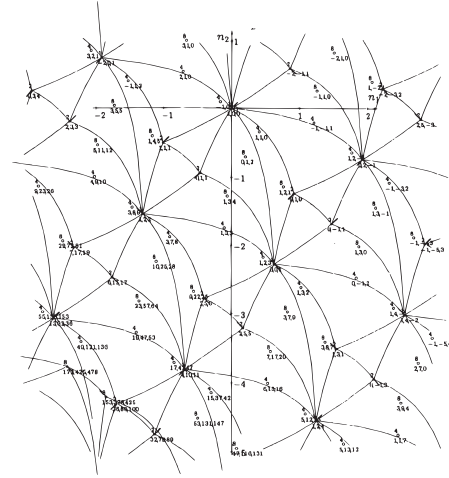


Рис. 7. Аналог рис. 6 с точными проекциями ребер. Ребра, разделяющие ромбы на треугольники, ошибочны.

$$f_1 \approx 1.853, \quad f_2 \approx -0.102, \quad f_3 \approx 5.247. \quad (44)$$

В единице ε_3 формы

$$f_1 \approx -0.147, \quad f_2 \approx -2.102, \quad f_3 \approx 3.247. \quad (45)$$

Используем второй способ нахождения выделенных решений. Согласно рис. 4 фундаментальная область $\mathcal{F}$ лежит внутри квадрата

$$\mathcal{G} = \{\ln(0.147) \leq h_1 \leq \ln(1.853), \quad \ln(0.102) \leq h_2 \leq \ln(2.102)\}. \quad (46)$$

Над этим квадратом лемма 1 принимает вид

$$0.147 \leq g_1(X) \leq 1.853, \quad 0.102 \leq g_2(X) \leq 2.102. \quad (47)$$

Для решения уравнения $g(X) = 4$ имеем

$$g_3(X) = \frac{4}{g_1(X)g_2(X)}.$$

Поэтому для этих решений над квадратом G

$$g_3(X) \leq \frac{4}{0.147 \cdot 0.102} < 267.$$

Теперь согласно (75) все выделенные решения находятся в области

$$-1.853 \leq f_1(X) \leq 1.853, \quad -2.102 \leq f_2(X) \leq 2.102, \quad (48)$$

$$-267 \leq f_3(X) \leq 267. \quad (49)$$

8 точек пересечения (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) , $i = 1, \dots, 8$, шести плоскостей

Таблица 3. Вершины ломаной ∂H для $p(\xi) = \lambda^3 + 22\lambda^2 + 11\lambda + 25$

x_1	x_2	x_3	$g(X)$	$g_1(X)$	$g_2(X)$	$\ln g_1$	$\ln g_2$
29	-171	-8	1	2.711e-05	3.689e+04	-10.52	10.52
96	26	1	109	0.01261	8645	-4.373	9.065
8	65	3	113	0.02463	4587	-3.704	8.431
43	2	0	157	0.08653	1814	-2.447	7.503
10	22	1	85	0.1605	529.7	-1.83	6.272
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	109	465.1	0.2344	6.142	-1.451
2	1	2	113	908.7	0.1244	6.812	-2.085
8	3	7	157	3192	0.04918	8.068	-3.012
15	6	13	85	5919	0.01436	8.686	-4.243
94	37	81	1	3.689e+04	2.711e-05	10.52	-10.52

Таблица 4. Вершины ломаной ∂H для $p(\xi) = \xi^3 + 19\xi^2 + 11\xi + 18$

x_1	x_2	x_3	$g(X)$	$g_1(X)$	$g_2(X)$	$\ln g_1$	$\ln g_2$
49	-145	-8	1	3.723e-05	2.686e+04	-10.2	10.2
67	59	3	64	0.01203	5319	-4.42	8.579
10	19	1	8	0.02475	323.2	-3.699	5.778
1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	64	323.2	0.198	5.778	-1.619
2	1	2	8	664.9	0.01203	6.5	-4.42
79	44	81	1	2.686e+04	3.723e-05	10.2	-10.2

$$f_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + x_2\lambda_1 + x_3\lambda_1^2 = \pm 1.853,$$

$$f_2(X) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_2^2 = \pm 2.102,$$

$$f_3(X) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + x_2\lambda_3 + x_3\lambda_3^2 = \pm 267$$

и $2x_2 \in \mathbb{Z}$, если $x_3 \notin \mathbb{Z}$. В $\mathbb{Q}(\lambda)$ отношение двух чисел $X/Y = Z$, если

$$X = x_1 + x_2\lambda + x_3\lambda^2 = (y_1 + y_2\lambda + y_3\lambda^2)(z_1 + z_2\lambda + z_3\lambda^3), \quad (51)$$

суть $x_1 = \pm 14.17606$, $x_2 = \pm 46.396$, $x_3 = \pm 16.9941$.

Максимальные значения модулей координат этих точек суть

$$x_1 \approx 14.176, \quad x_2 \approx 46.395, \quad x_3 \approx 16.994.$$

В параллелепипеде

$$|x_i| \leq z_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (50)$$

имеется 23 решения нашего уравнения (28), приведенные в табл. 1.

Из них отберем те, отношения которых не лежат в решетке: $x_1 \in \mathbb{Z}$, $2x_3 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \mathbb{Z}$, если $x_3 \in \mathbb{Z}$,

где $\lambda^3 = 7\lambda + 2$ и $\lambda^4 = 7\lambda^2 + 2\lambda$. Для z_i получаем линейную систему 3 уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1z_1 + 2y_3z_2 + 2y_2z_3, \\ x_2 &= y_2z_1 + (y_1 + 7y_3)z_2 + (7y_2 + 2y_3)z_3, \\ x_3 &= y_3z_1 + y_2z_2 + (y_1 + 7y_3)z_3. \end{aligned}$$

Результат показан в табл. 2.

Согласно теореме 4 все решения $\xi \in \tilde{\Omega}$ уравнения (48) суть

$$\xi = \xi_n^0 \epsilon_1^a \epsilon_2^b, \quad n = 1, \dots, 5, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Таблица 5. Вершины ломаной ∂H для $p(\xi) = \xi^3 + 16\xi^2 + 8\xi + 20$

x_1	x_2	x_3	$g(X)$	$g_1(X)$	$g_2(X)$	$\ln g_1$	$\ln g_2$
29	33	2	1	0.0006028	1659	-7.414	7.414
9	-15	-1	65	0.1467	443.1	-1.919	6.094
7	16	1	87	0.2846	305.7	-1.257	5.722
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	65	243.4	0.2671	5.495	-1.32
3	1	2	87	472.2	0.1842	6.157	-1.691
9	3	7	1	1659	0.0006028	7.414	-7.414

Таблица 6. Вершины ломаной ∂H для $p(\xi) = \xi^3 - 4\xi^2 + 25\xi + 17$

x_1	x_2	x_3	$g(X)$	$g_1(X)$	$g_2(X)$	$\ln g_1$	$\ln g_2$
121	396	324	1	9.91e-09	1.009e+08	-18.43	18.43
-317	-479	65	11	1.535e-06	7.167e+06	-13.39	15.79
11	40	36	27	2.212e-05	1.221e+06	-10.72	14.01
-11	-29	-18	13	3.871e-05	3.359e+05	-10.16	12.72
-11	-18	0	1	9.953e-05	1.005e+04	-9.215	9.215
1	1	-1	11	0.01542	713.4	-4.172	6.57
-1	-2	0	27	0.2222	121.5	-1.504	4.8
1	1	0	13	0.3889	33.43	-0.9445	3.509
1	0	0	1	1	1	0	0

Таблица 7. Вершины ломаной ∂H для $p(\xi) = \xi^3 - 8\xi^2 + 21\xi + 13$

x_1	x_2	x_3	$g(X)$	$g_1(X)$	$g_2(X)$	$\ln g_1$	$\ln g_2$
170	243	-173	3	2.628e-07	1.142e+07	-15.15	16.25
91	135	-83	13	5.365e-06	2.423e+06	-12.14	14.7
12	27	7	1	1.047e-05	9.554e+04	-11.47	11.47
1	4	4	9	0.0006305	1.427e+04	-7.369	9.566
-10	-19	1	9	0.00125	7197	-6.684	8.881
-9	-15	5	11	0.001881	5848	-6.276	8.674
9	16	-3	29	0.01099	2639	-4.511	7.878
-1	-2	0	3	0.02511	119.5	-3.685	4.783
0	-1	0	13	0.5126	25.36	-0.6683	3.233
1	0	0	1	1	1	0	0
51	-17	2	9	60.24	0.1494	4.098	-1.901
101	-34	4	9	119.5	0.07533	4.783	-2.586
152	-51	6	11	179.7	0.06121	5.191	-2.793
888	-298	35	29	1050	0.02762	6.956	-3.589
2029	-681	80	3	2399	0.00125	7.783	-6.684

Таблица 8. Вершины ломаной ∂H для $p(\xi) = \xi^3 - 5\xi^2 + 11\xi + 9$

x_1	x_2	x_3	$g(X)$	$g_1(X)$	$g_2(X)$	$\ln g_1$	$\ln g_2$
-1	-1	1	1	0.006801	147	-4.991	4.991
1	1	0	8	0.3789	21.11	-0.9704	3.05
1	0	0	1	1	1	0	0
44	-17	3	8	55.72	0.1436	4.02	-1.941
116	-45	8	1	147	0.006801	4.991	-4.991

XI. ПРИМЕРЫ СЛУЧАЯ $n = 3, l = 1, k = 1$

Здесь $b_1 = 22, b_2 = 11, b_3 = 25$ и согласно разделу VI

Пусть $p(\xi) = \lambda^3 + 22\lambda^2 + 11\lambda + 25$. Этот пример взят из [12, табл. 2]. Здесь

$$\lambda_1 \approx -21.54326,$$

$$\lambda_{2,3} \approx -0.228367 \pm 1.052760i,$$

$$f_1(X) = x_1 - 21.54326x_2 + 464.112305x_3,$$

$$f_2(X) = x_1^2 - 0.45673x_1x_2 - 2.112304x_1x_3 + 1.160455x_2^2 - 0.53002x_2x_3 + 1.346656x_3^2.$$

$$\begin{aligned} f(X) = f_1(X)f_2(X) = & x_1^3 - 22x_1^2x_2 + \\ & + 11x_1x_2^2 - 25x_2^3 + 462x_1^2x_3 - 167x_1x_2x_3 + \\ & + 242x_2^2x_3 - 979x_1x_3^2 - 275x_2x_3^2 + 625x_3^3. \end{aligned}$$

Результаты вычисления выпуклой ломаной ∂H для $\xi \in \mathbb{Z}(\lambda)$ на плоскости $g_1(X) = |f_1(X)|, g_2(X) = |f_2(X)|$ приведены в табл. 3. Каждая ее строка со-

Таблица 9. Основные единицы для многочленов 4-й степени

N	$p(\xi)$	D_2	D_1	D	$\varepsilon(\lambda)$	V	μ_2	μ_3
1	$\xi^4 - 2\xi^2 + 2$	16	-64	512	$1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3$	0	$\varepsilon^2(-\lambda)$	$-\varepsilon^{-3}(\lambda)$
2	$\xi^4 - \xi^2 + 2$	8	-56	1568	$1 - \lambda^2 - \lambda^3$	1	$\varepsilon^3(\lambda)$	$\varepsilon^{-3}(\lambda)$
3	$\xi^4 - \xi^2 + \xi + 2$	8	-92	1257	$-1 + \lambda^2 - \lambda^3$	0	$-\varepsilon^{-1}(\lambda)$	$-\varepsilon^{-1}(\lambda)$
4	$\xi^4 + 2$	0	0	2048	$1 - \lambda^2 - \lambda^3$	0	$-\varepsilon(\lambda)$	$-\varepsilon(\lambda)$
5	$\xi^4 + \xi + 2$	0	-36	2021	$3 - \lambda + \lambda^3$	1		$\varepsilon^4(\lambda)$
6	$\xi^4 + 2\xi + 2$	0	-144	1616	$1 + \lambda - \lambda^2 + \lambda^3$	0	$-\varepsilon(\lambda)$	$-\varepsilon(\lambda)$
7	$\xi^4 + \xi^2 + 2$	-8	56	1568	$1 + \lambda + \lambda^2$	0	$-\varepsilon^{-3}(\lambda)$	
8	$\xi^4 + \xi^2 + \xi + 2$	-8	20	1825	$-1 - \lambda + \lambda^2 - \lambda^3$	0	$\varepsilon^5(\lambda)$	$-\varepsilon^3(\lambda)$
9	$\xi^4 + \xi^2 + 2\xi + 2$	-8	-88	2272	$1 - 3\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3$	2		
10	$\xi^4 + 2\xi^2 + 2$	-16	64	512	$1 - \lambda - \lambda^3$	0	$\varepsilon^{-4}(\lambda)$	?
11	$\xi^4 + 2\xi^2 + 2\xi + 2$	-16	-80	5526	$-3 - \lambda - \lambda^3$	1	$\varepsilon^4(\lambda)$	$\varepsilon^3(\lambda)$
12	$\xi^4 + \xi^3 - 2\xi^2 - \xi + 2$	19	-54	257	$1 - \lambda - \lambda^2$	0	$\varepsilon^{-2}(\lambda)$	$\varepsilon^{-4}(\lambda)$
13	$\xi^4 + \xi^3 - \xi^2 - 2\xi + 2$	11	-154	1384	$1 - \lambda - 2\lambda^2 - \lambda^3$	0	$-\varepsilon^{-1}(\lambda)$	$-\varepsilon^{-1}(\lambda)$
14	$\xi^4 + \xi^3 - \xi^2 - \xi + 2$	11	-80	1556	$1 - \lambda - 2\lambda^2 - \lambda^3$	1	$\varepsilon^{-6}(\lambda)$	$\varepsilon^{-3}(\lambda)$
15	$\xi^4 + \xi^3 - \xi^2 + 2$	11	-892	892	$1 + \lambda$	0	$\varepsilon^{-8}(\lambda)$	$\varepsilon^{-4}(\lambda)$

ответствует вершине ломаной $\partial\mathbf{H}$ и содержит $x_1, x_2, x_3, g(X) = |f(X)|, g_1(X), g_2(X), \ln g_1, \ln g_2$.

В верхней и нижней строках таблицы стоят основные единицы $\varepsilon = 29 - 171\lambda - 8\lambda^2$ и $\varepsilon = 94 + 37\lambda + 81\lambda^2$. Видна периодичность значений $g(X)$ на этих вершинах.

Аналогичные вычисления вершин ломаной $\partial\mathbf{H}$ были проделаны и для других случаев $n = 3, D < 0$ из статьи [12, таблицы 3–7]. Их результаты приводятся ниже в виде таблиц 4–8.

$p(\xi) = \xi^3 + 19\xi^2 + 11\xi + 18; \lambda_1 \approx -18.4568, \lambda_{2,3} \approx -0.27517 \pm 0.94947i$. Табл. 4.

$p(\xi) = \xi^3 + 16\xi^2 + 8\xi + 20; \lambda_1 \approx -15.56866, \lambda_2 \approx -0.215669 \pm 1.1127078i$. Табл. 5.

$p(\xi) = \xi^3 - 4\xi^2 + 25\xi + 17; \lambda_1 \approx -0.6111166, \lambda_{2,3} \approx 2.305558 \pm 4.74366i$. Табл. 6.

$p(\xi) = \xi^3 - 8\xi^2 + 21\xi + 13; \lambda_1 \approx -0.5125546, \lambda_{2,3} \approx 4.256277 \pm 2.692072i$. Табл. 7.

$p(\xi) = \xi^3 - 5\xi^2 + 11\xi + 9; \lambda_1 \approx -0.6210714, \lambda_{2,3} \approx 2.8105357 \pm 2.567484i$. Табл. 8.

XII. ПРИМЕРЫ СЛУЧАЯ $n = 4, l = 0, k = 2$

В препринте [3] В.И. Парусников вычислил по паре единиц для 41 многочлена (5) с $n = 4$ и двумя парами комплексных корней $\lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$. По теореме Дирихле в этих случаях имеется ровно одна фундаментальная единица. Здесь получаем две формы

$$f_i(X) = \langle K_i, X \rangle \langle \bar{K}_i, X \rangle, \quad i = 1, 2,$$

где $K_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \lambda_i^3), X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Для первых 15 многочленов Парусникова мы вычислили вершины ломаной $\partial\mathbf{H}$ по $X \in Z^4$ для двух форм $g_i(X) = |f_i(X)|, i = 1, 2$, и получили для них фундаментальные единицы ε . Результаты приведены в табл. 9. Там каждая строка соответствует одному многочлену. В первом столбце дан его номер n , во втором — сам многочлен $p(\xi)$; в третьем, четвертом и пятом — значения субдискриминантов D_2, D_1 и дискриминанта D , в шестом — значение фундаментальной единицы ε , в седьмом — число вершин V ломаной $\partial\mathbf{H}$ внутри фундаментальной области, в восьмом и девятом — единицы μ_2 и μ_3 Парусникова из его табл. 2 и 3 соответственно.

Для уравнения с $n = 10$ найденная Парусниковым единица μ_3 является столь большой (или малой) степенью основной единицы ε , что оказалась вне просчитанной части ломаной $\partial\mathbf{H}$. В этом

месте поставлен знак вопроса. Пустые места для μ_2 при $n = 5$, для μ_3 при $n = 7$ и для μ_2, μ_3 при $n = 9$ означают, что Парусников не привел этих значений.

Замечание. Если единица $\varepsilon(\lambda) = x_1 + x_2\lambda + x_3\lambda^2 + x_4\lambda^3$, то обычно число $-\varepsilon(\lambda) = -x_1 - x_2\lambda - x_3\lambda^2 - x_4\lambda^3$ является также единицей. Но для биквадратного многочлена $p(\xi)$ число $\varepsilon(-\lambda) = x_1 - x_2\lambda + x_3\lambda^2 - x_4\lambda^3$ также является единицей с той же нормой, ибо вместе с корнем λ многочлен $p(\xi)$ имеет корень $-\lambda$. В табл. 9 такими являются многочлены для $n = 1, 2, 4, 7, 10$.

Предыдущие публикации автора в этом направлении: [16, 17].

XIII. ПЕРСПЕКТИВЫ

Алгоритм разложения в обычную цепную дробь является пошаговым, и каждый шаг однозначен. Алгоритм вычисления обобщенной цепной дроби является глобальным, он не разбивается на шаги и требует большого объема вычислений.

Пример. Марков [18] вычислил фундаментальную единицу

$$2166673601 + 761875860\lambda + 26790170\lambda^2 \quad (52)$$

кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ с $\lambda^3 = 23$. Для ее вычисления по алгоритму раздела VI требуется перебор значений нормы

$$f(X) = x_1^3 + 23x_2^3 - 69x_1x_2x_3 + 23^2x_3^3 \quad (53)$$

для $|x_i| \leq 10^{11}, i = 1, 2, 3$. Правда, Вороной [2, отдел II] вычислил к ней обратную фундаментальную единицу

$$-41399 - 3160\lambda + 6230\lambda^2 \quad (54)$$

за 21 шаг своего алгоритма. Для ее вычисления алгоритмом раздела VI требуется перебор значений нормы (81) для $|x_i| \leq 10^6, i = 1, 2, 3$.

Поэтому для разных n и m желательно найти более простые алгоритмы последовательного вычисления вершин многогранника $\mathbf{H}$. Здесь возможны два следующих подхода.

Подход 1. Пусть известны все вершины $V_1, \dots, V_s$ некоторой гиперграны $H_j^{(m-1)}$ многогранника $\mathbf{H}$. Надо найти все вершины примыкающих к ней гиперграней многогранника $\mathbf{H}$. При этом можно различать несколько случаев и делать некоторый перебор. Такие алгоритмы для $n = 3, m = 1$ и $n = 3$,

$m = 2$ были предложены автором и В.И. Парусниковым в [6, 12, 19–21].

Подход 2. Вместе с многогранником $\mathbf{H}$ в $\mathbb{R}^n$ рассматривать сопряженный многогранник $\mathbf{H}_*$ в двойственном пространстве $\mathbb{R}_*^n$ и двигаться по ним одновременно в зависимости о взаимных свойств граней. Для $n = 3$, $m = 2$ несколько случаев таких пар многогранников описаны в [7, 13]. Отметим, что для обычной цепной дроби многогранники $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}_*$ совпадают, т.е. являются самосопряженными.

Для детальной разработки алгоритмов указанных двух подходов потребуются вычислить много разных примеров с помощью описанного алгоритма обобщенной цепной дроби. Кроме того, надо проверить гипотезу 2 и найти способ ее доказательства.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит А.Б. Батхина и А.А. Соколова за большую помощь в подготовке этой статьи.

Работа поддержана РФФИ, грант 18-01-00422а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борович З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. Наука, М. 1972.
2. Вороной Г.Ф. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей, Из-во Варш. Ун-та, Варшава, 1896. Также: Собр. соч. в 3-х томах. Из-во АН УССР. Киев. 1952. Т. 1. С. 197–391.
3. Парусников В.И. Четырехмерное обобщение алгоритма цепных дробей. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2011. № 78. 16 с. <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=11-78>.
4. Хинчин А.Я. Цепные дроби. Физматгиз, М. 1961.
5. Брюно А.Д. Разложения алгебраических чисел в цепные дроби, Журнал вычислительной матем. и матем. физики. 1964. Т. 4. № 2. С. 211–221.
6. Bruno A.D. New generalizations of continued fraction. I, Functiones et Approximatio. 2010. V. 43. № 1. P. 55–104.
7. Брюно А.Д. Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби. Чебышевский сборник (Тула). 2015. Т. 16. № 2. С. 35–65.
8. Брюно А.Д. Структура многомерных диофантовых приближений. ДАН. 2010. Т. 433. № 5. С. 587–589.
9. Bruno A.D. Structure of the best Diophantine approximations and multidimensional generalizations of the continued fraction, Чебышевский сборник (Тула). 2010. V. 11. № 1. P. 68–73.
10. Fukuda K. Exact algorithms and software in optimization and polyhedral computation, Proceed. ISSAC'08 of XXI International Symposium on Symbolic and Algebraic Computations, ACM NY, USA. 2008. P. 333–334.
11. Barber C.B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H.T. The Quickhull algorithm for convex hulls, ACM Trans. on Mathematical Software. 1996. V. 22. № 4. P. 469–483. <http://www.qhull.org>.
12. Брюно А.Д. Обобщения цепной дроби. Чебышевский сборник (Тула). 2006. Т. 7. № 3. С. 4–71.
13. Брюно А.Д., Парусников В.И. Многогранники модулей троек линейных форм. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, № 93 (2003). 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=03-93>.
14. Basu S., Pollack R., Roy M.-F. Algorithms in Real Algebraic Geometry, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 2006.
15. Батхин А.Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена. Программирование. 2016. Т. 42. № 2. С. 8–21.
16. Брюно А.Д. От диофантовых приближений к диофантовым уравнениям. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, № 1 (2016) 20 с. <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=16-1>.
17. Брюно А.Д. Вычисление наилучших диофантовых приближений и основных единиц алгебраических полей, ДАН. 2016. Т. 468. № 1. С. 6–10.
18. Markov A.A. Sur les nombres entieres dependents d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire, Mémoires de l'Academie de St.-Petersburg, VII serie, 1892. V. 38. № 9. P. 4–32.
19. Bruno A.D., Parusnikov V.I. New generalizations of the continued fraction, Keldysh Institute Preprints. № 52, Moscow. 2005. 17 p.
20. Брюно А.Д., Парусников В.И. Дальнейшее обобщение цепной дроби, ДАН. 2006. Т. 410, № 1. С. 12–16.
21. Брюно А.Д., Парусников В.И. Двустороннее обобщение цепной дроби, ДАН. 2009. Т. 429, № 6. С. 727–730.