

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ
ОДНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2019 г. А. Д. Брюно

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
125047 Москва Миусская пл., 4, Россия**E-mail: abruno@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 02.09.2018 г.

После доработки 02.09.2018 г.

Принята к публикации 12.09.2018 г.

Для нахождения глобальных приближенных решений алгебраического уравнения с n неизвестными при $n = 1$ предлагается ломаная Адамара, а при $n = 2$ – многогранник Адамара. Найденные решения переводятся в координатное подпространство: для $n = 1$ – сдвигом, а для $n = 2$ – заменой координат, использующей униформизацию кривой. Затем излагаются алгоритмы локального решения алгебраического уравнения вблизи особой (критической) точки для $n = 2$ и $n = 3$ для получения асимптотических разложений одномерных и двумерных ветвей. С помощью многоугольника Ньютона (при $n = 2$), многогранника Ньютона (при $n = 3$) и степенных преобразований эта задача сводится к ситуациям, аналогичным теореме о неявной функции. В частности, при локальном анализе решений одного уравнения от трех неизвестных приходим к задаче об униформизации плоской алгебраической кривой и преобразовании ее в координатную ось. После этого вблизи этой оси можно получить асимптотическое разложение куска изучаемой поверхности. Приведены примеры таких вычислений.

DOI: 10.1134/S0132347419010084

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на большой рост и усложнение тематики, некоторые основные ее задачи остаются нерешенными. К таким задачам относится решение алгебраического уравнения с одним или несколькими неизвестными.

Пусть задан многочлен $f(X)$ с вещественными или комплексными коэффициентами, где $X = (x_1, \dots, x_n)$. Требуется найти решение уравнения

$$f(X) = 0 \quad (1)$$

для $X \in \mathbb{R}^n$ или \mathbb{C}^n в виде либо функций $X = \Phi(\Xi)$ от параметров Ξ , либо набора асимптотических разложений по параметрам

$$X = \Phi_0(\Xi) + \Phi_1(\Xi) + \dots \quad (2)$$

При этом множество решений уравнения (1) образует алгебраическое многообразие \mathcal{F} и может состоять из нескольких компонент (ветвей) разных размерностей в вещественном случае. Для каждой компоненты надо найти свое разложение (2).

Здесь опишем алгоритмы решения этой задачи и их компьютерную реализацию. Изложение проведем по возрастанию размерности n этой задачи.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ СТАТЬИ

Сначала напомним алгоритм выделения значений наибольших скалярных произведений на множестве точек в \mathbb{R}^n (§ 2). Затем излагаются алгоритмы глобального решения алгебраического уравнения для $n = 1$ (корни многочлена) и $n = 2$ (униформизация кривой) (§ 3 и 4 соответственно). Для нахождения приближенных решений при $n = 1$ предлагается ломаная Адамара, а при $n = 2$ – многогранник Адамара. Найденные решения переводятся в координатное подпространство: для $n = 1$ – сдвигом, а для $n = 2$ – заменой координат, использующей униформизацию кривой. Затем излагаются алгоритмы локального решения алгебраического уравнения вблизи особой (критической) точки для $n = 2$ и $n = 3$ (§§ 5 и 7 соответственно). Цель – получение асимптотических разложений одномерных и двумерных ветвей. С помощью многоугольника Ньютона (при $n = 2$), многогранника Ньютона (при $n = 3$) и степенных преобразований эта задача сводится к ситуациям, аналогичным теореме о неявной функции (§ 6). В частности, при локальном анализе решений одного уравнения от трех неизвестных приходим к задаче об униформизации плоской алгебраической кривой и преобразовании ее в ко-

ординатную ось. После этого вблизи этой оси можно получить асимптотическое разложение куска изучаемой поверхности. Приведены примеры таких вычислений.

2. МНОГОГРАННИК И НОРМАЛЬНЫЕ КОНУСЫ

Пусть в \mathbb{R}^n задано несколько точек $\{Q_1, \dots, Q_k\} = \mathbf{S}$. Здесь $Q = (q_1, \dots, q_n)$. Их выпуклая оболочка

$$\Gamma(\mathbf{S}) = \left\{ Q = \sum_{i=1}^k \mu_i Q_i, \mu_i \geq 0, \sum \mu_i = 1 \right\}$$

является многогранником. Его граница $\partial\Gamma$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$, ребер $\Gamma_j^{(1)}$ и граней $\Gamma_j^{(d)}$ разных размерностей $d : 1 < d \leq n - 1$. Если задан вещественный n -вектор $P = (p_1, \dots, p_n)$, то максимум и минимум скалярного произведения $\langle P, Q \rangle = p_1 q_1 + \dots + p_n q_n$ на \mathbf{S} достигаются на точках Q_i , лежащих на границе $\partial\Gamma$. Выделим для каждой обобщенной грани $\Gamma_j^{(d)}$ (включая вершины $\Gamma_j^{(0)}$ и ребра $\Gamma_j^{(1)}$) то множество векторов P , для которых максимум $\langle P, Q \rangle$ достигается на точках $Q_i \in \Gamma_j^{(d)}$. Это будет ее *нормальный конус*

$$U_j^{(d)} = \{ P : \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q'' \rangle > \langle P, Q''' \rangle \text{ для } Q', Q'' \in \Gamma_j^{(d)}, Q''' \in \Gamma \setminus \Gamma_j^{(d)} \}. \quad (3)$$

При этом вектор P лежит в пространстве \mathbb{R}_*^n , двойственном пространству \mathbb{R}^n . Вообще, здесь мы находимся в ситуации аффинной геометрии.

Все векторы нормального конуса $U_j^{(d)}$ ортогональны грани $\Gamma_j^{(d)}$. В силу однородности нормальных конусов достаточно рассмотреть их пересечения с двумя гиперплоскостями (скажем, $p_n = \pm 1$) и отмечать на них пересечения $\tilde{U}_{j\pm}^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} U_j^{(d)} \cap \{p_n = \pm 1\}$, которые назовем *приведенными нормальными конусами*. Имеются стандартные программы как для вычисления выпуклых оболочек, так и для вычисления их нормальных конусов [1, 2]. В частности, они имеются в системе Maple.

3. ГЛОБАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ $n = 1$

Для многочлена

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k \quad (4)$$

с вещественными или комплексными коэффициентами a_k его корни всегда выражаются в радика-

лах, если $m \leq 4$ (формулы Кардано и Феррари – XVI век).

Согласно Абелю и Галуа (1830) общее уравнение $f_m(x) = 0$ с $m > 4$ неразрешимо в радикалах от его коэффициентов. Для уравнения пятой степени Эрмит, Кронекер и Бриоски (1858) показали, что его корни могут быть выражены через тета-функции Якоби [3]. При $m > 6$ известно, в каких сложных функциях от коэффициентов a_k оно разрешается [4], но явных формул, пригодных для вычисления, пока нет. Имеются различные способы определения числа вещественных корней на заданном интервале $x \in [a, b]$ и их приближенных значений.

Опишем новый способ вычисления приближенных значений корней многочлена (4). Для этого на вещественную плоскость q_1, q_2 наносятся точки

$$\check{Q}_k = (k, \ln |a_k|) = (q_1, q_2), \quad k = 0, \dots, m, \quad (5)$$

образующие *суперноситель* $\check{\mathbf{S}} = \{\check{Q}_0, \dots, \check{Q}_m\}$, и строится их выпуклая оболочка

$$\mathbf{H} = \left\{ \check{Q} = \mu_0 \check{Q}_0 + \dots + \mu_m \check{Q}_m, \mu_k \geq 0, \sum_{k=0}^m \mu_k = 1 \right\}. \quad (6)$$

Граница $\partial\mathbf{H}$ является ломаной линией. Каждому ребру $\Gamma_j^{(1)}$ и вершине $\Gamma_j^{(0)}$ этой границы $\partial\mathbf{H}$ соответствует граничное подмножество $\mathbf{S}_j^{(d)}$ точек \check{Q}_k , лежащих на $\Gamma_j^{(d)}$, и укороченный многочлен

$$\check{f}_j^{(d)}(x) = \sum a_k x^k \quad \text{по } \check{Q}_k \in \mathbf{S}_j^{(d)},$$

корни которого являются приближениями к корням исходного многочлена. Верхняя часть $\partial\mathbf{H}$ границы $\partial\mathbf{H}$ – это *ломанная Адамара* (J. Hadamard, 1893) [5], [6, гл. IV, п. 2.1]. Нормальные конусы её рёбер имеют $p_2 > 0$. Для таких рёбер в укороченный многочлен входят те и только те слагаемые $a_k x^k$, у которых модуль $|a_k x^k|$ наибольший при фиксированном $|x| : \ln |x| = p_1$, ибо тогда

$$|a_k x^k| = \exp \langle \check{Q}, (p_1, 1) \rangle, \quad (7)$$

а экспонента – монотонная функция.

Пример 1. Рассмотрим многочлен

$$f(x) = 9x - 10x^3 + x^5 = x(1 - x^2)(9 - x^2) \quad (8)$$

с корнями $x_k^0 = 0, \pm 1, \pm 3$. Его ломаная Адамара натянута на три вершины $(1, \ln 9)$, $(3, \ln 10)$, $(5, 0)$ и показана на рис. 1. Она имеет два ребра $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(2)}$.

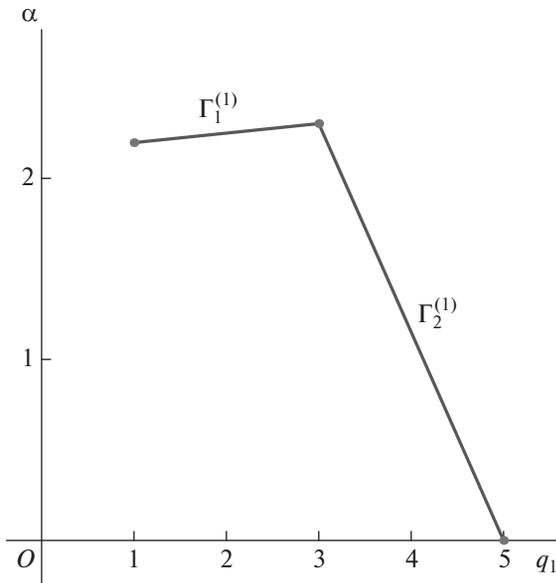


Рис. 1. Ломаная Адамара многочлена (8) примера 1.

Их приведенные нормальные конусы $\omega = \check{U}_{1+}^{(1)} = \ln\sqrt{0.9} \approx -0.05268$ и $\beta = \check{U}_{2+}^{(1)} = \ln\sqrt{10} \approx 1.15129$ показаны на рис. 2.

Ребрам $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(2)}$ соответствуют укороченные многочлены $\check{f}_1^{(1)}(x) = 9x - 10x^3$ и $\check{f}_2^{(1)}(x) = -10x^3 + 9x^5$, корни которых $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{0.9} \approx \pm 0.948683$ и $x_{4,5} = \pm\sqrt{10} \approx \pm 3.162278$ дают приближенные значения ненулевых корней полного многочлена $f(x)$. Для их уточнения можно использовать метод Ньютона, т.е. искать разложение корня $x^0 = x + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots$. Для первых добавок ε_1 из уравнения $f(x) + \varepsilon_1 f'(x) = 0$ получаем значение $\varepsilon_1 = -f(x)/f'(x)$. Значения добавок ε_1 в x_k , $k = 2, \dots, 5$, и уточненных значений $x_k + \varepsilon_1$ показаны в табл. 1.

Пример 2. Рассмотрим многочлен

$$f(x) = -x - \frac{5}{6}x^3 + x^5 = x\left(1 + \frac{3}{2}x^2\right)\left(1 - \frac{2}{3}x^2\right). \quad (9)$$

Его точные корни суть

$$x^0 = 0, \quad \pm i\sqrt{2/3} \approx \pm 0.81648i, \quad \pm\sqrt{3/2} \approx \pm 1.2247. \quad (10)$$

Его суперноситель \check{S} и многоугольник Адамара $\partial\check{H}$ показаны на рис. 3. Он натянут на 2 вершины (1, 0), (5, 0).

Он имеет одно ребро $1 \leq q_1 = k \leq 5$, $q_2 = \alpha = \ln|a_k| = 0$ с приведенным нормальным конусом –

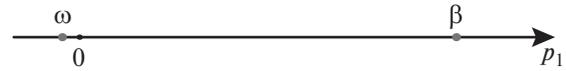


Рис. 2. Приведенные нормальные конусы ломаной Адамара рис. 1.

точкой $p_1 = p_1^0 = 0$. Ему соответствует укороченный многочлен

$$\check{f}(x) = -x + x^5. \quad (11)$$

Его ненулевые корни суть $x_{2,3} = \pm i$, $x_{4,5} = \pm 1$. Для них всех $\ln|x_k| = 0 = p_1^0 = \omega$. Они дают приближенные значения корней (10) полного многочлена (9). Поправки $\varepsilon_1 = -f(x_k)/f'(x_k)$ метода Ньютона к ним приведены в табл. 2.

Пример 3. С помощью ломанной Адамара найдем приближенные значения корней многочлена

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} -4320 - 9336x - 4972x^2 - 3754x^3 - 1426x^4 + 104x^5 + 51x^6 + 3x^7. \quad (12)$$

Значения его коэффициентов a_k приведены во второй строке таблицы 3. В третьей строке даны значения $\alpha_k = \ln|a_k|$. На рис. 4 показаны точки $\check{Q}_k = (k, \alpha_k)$ и их огибающая – ломаная Адамара $\partial\check{H}$. Для всех k , кроме $k = 2$ и $k = 5$, точки $\check{Q}_k = (k, \alpha_k)$ являются вершинами ломанной $\partial\check{H}$. Паре соседних вершин (k, α_k) и (l, α_l) , $k < l$, соответствует укороченный многочлен

$$\check{f}_k(x) = a_k x^k + a_l x^l.$$

Его ненулевые корни обозначим x_{k+1} , если $l = k + 1$, или x_{k+1}, x_{k+2} , если $l = k + 2$. Их значения приведены в четвертой строке таблицы 3. В каждой из этих точек вычислены значения $f(x_k)$ и $f'(x_k)$.

Вычисленные по методу Ньютона поправки $\varepsilon_k = -f(x_k)/f'(x_k)$ к потенциальным приближен-

Таблица 1. Поправки к корням

k	2	3	4	5
x_k	0.948683	-0.948683	3.162278	-3.162278
ε_1	0.055085	-0.055085	-0.136175	0.136175
$x_k + \varepsilon_1$	1.003768	-1.003768	3.026103	-3.026103
x_k^0	1	-1	3	-3

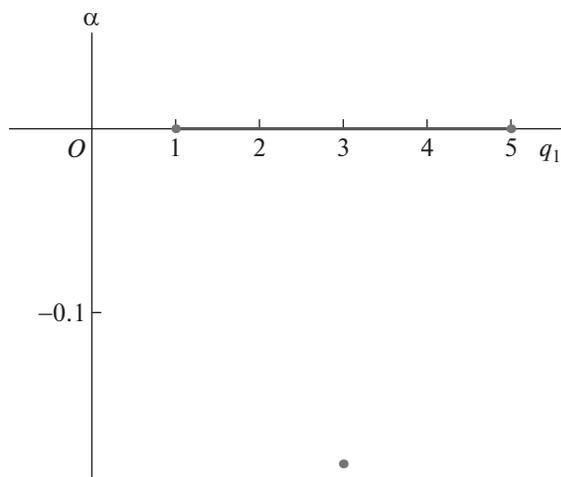


Рис. 3. Суперноситель и ломаная Адамара многочлена (9) примера 2.

ным корням x_k приведены в пятой строке таблицы 3. Для $k < 6$ модули поправок $|\epsilon_k| < 0.5$, а для $k = 6$ и 7 эти модули больше 1.5. Следовательно, значения x_6 и x_7 требуют уточнения. Они получены из укороченных многочленов, содержащих a_4x^4 , a_6x^6 и a_7x^7 . Поэтому в качестве приближенного к $f(x)$ рассмотрим многочлен

$$g = \sum_{k=4}^7 a_k x^k,$$

т.е. многочлен третьей степени

$$h = x^{-4}g = -1426 + 104x + 51x^2 + 3x^3.$$

Для него значение $x_5 \approx 5.2$ является приближенным корнем. Более точным является значение $x = 4$. Деля многочлен h на $x - 4$, получаем многочлен второй степени

$$3x^2 + 63x + 256 \tag{13}$$

и -2 в остатке. Корни \tilde{x}_6 и \tilde{x}_7 многочлена (13) суть $-10.5 \pm 2.9i$. Они приведены в шестой строке табли-

Таблица 2. Поправки к корням

k	2	3	4	5
x_k	$+i$	$-i$	$+1$	-1
ϵ_1	$-0.12821i$	$0.12821i$	0.555556	-0.555556
$x_k + \epsilon_1$	$0.871795i$	$-0.871795i$	1.555556	-1.555556
x_k^0	$0.816497i$	$-0.816497i$	1.224745	-1.224745

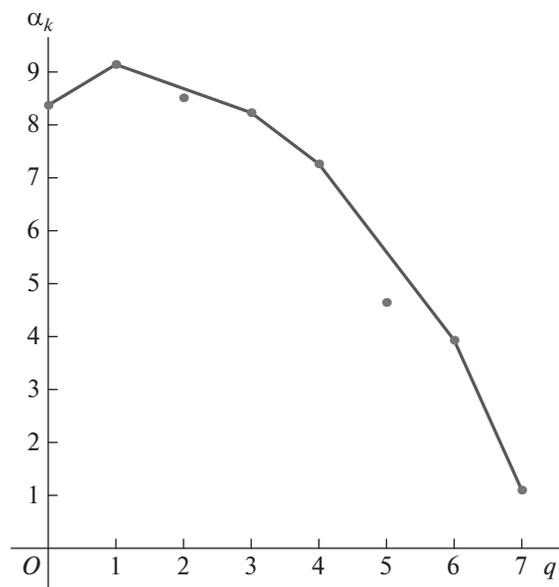


Рис. 4. Ломаная Адамара многочлена (12) примера 3.

цы 3. Соответствующие поправки $\tilde{\epsilon}_k = -f(\tilde{x}_k)/f'(\tilde{x}_k)$ приведены в седьмой строке, при этом оба $|\tilde{\epsilon}_k| < 1$. В восьмой строке приведены уточненные значения $x_k + \epsilon_k$ для $k < 6$ и $\tilde{x}_k + \tilde{\epsilon}_k$ для $k = 6, 7$. Наконец, в девятой строке приведены точные значения x_k^0 корней. Полученные приближенные значения корней многочлена $f(x)$ пригодны для уточнения по методу Ньютона.

В целом метод ломанной Адамара состоит в том, что исходный многочлен заменяется набором более простых многочленов, корни которых вычисляются просто и дают такие приближения корней исходного многочлена, которые достаточно хороши для численного уточнения по методу Ньютона.

4. ГЛОБАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ $n = 2$

Предположим сначала, что многочлен $f(X) = f(x_1, x_2)$ не распадается на множители. Тогда его корневое множество \mathcal{F} — это плоская алгебраическая кривая. Для комплексных значений x_1, x_2 кривая \mathcal{F} — это двумерная поверхность в четырехмерном пространстве $\text{Re}x_1, \text{Im}x_1, \text{Re}x_2, \text{Im}x_2$. Если к этому пространству добавить бесконечно удаленные точки, то кривая \mathcal{F} станет топологически эквивалентна сфере с g ручками, $g \geq 0$ (Риман, 1840).

- Если $g = 0$, то это обычная сфера (поверхность колобка).
- Если $g = 1$, то это поверхность тора (бублика).
- Если $g = 2$, то это поверхность кренделя и т.д.

Таблица 3.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_k	-4320	-9336	-4972	-3754	-1426	104	51	3
α_k	8.371	9.142	8.511	8.230	7.262	4.644	3.932	1.098
x_k		-.4627	1.577i	-1.577i	-2.633	5.288	-5.288	-17
$2\varepsilon_k$		-.1157	.0439-	.0439+	.36	-.032	1.82	1.78
			-.0633i	+.0633i				
$2\tilde{x}_k$							-10.5+	-10.5-
							+2.9i	-2.9i
$2\tilde{\varepsilon}_k$							0.578-	0.578+
							-0.762i	+0.762i
$x_k + \varepsilon_k$		-.5784	.0439+	.0439-	-2.2725	5.2558	-9.922+	-9.922-
			+1.514i	-1.514i			+2.138i	-2.138i
$2^*x_k^0$		-.5819	.0519+	.0519-	-2.0984	5.2551	-9.8393+	-9.8393-
			+1.5148i	-1.5148i			+.931i	-.931i

Итак, алгебраическая кривая \mathcal{F} имеет целочисленный топологический инвариант $-\text{rod } g \geq 0$, $g \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим ситуации для различных значений g .

4.1. Случай $g = 0$

Тогда кривая \mathcal{F} бирационально эквивалентна прямой, т.е. существует параметризация

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad t = \eta(x_1, x_2), \quad (14)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \eta$ – рациональные функции от своих аргументов.

Пример 4. Для листа Декарта

$$f(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 = 0 \quad (15)$$

имеем

$$x_1 = \frac{3t}{1+t^3}, \quad x_2 = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad t = x_2/x_1. \quad (16)$$

На вещественной плоскости x_1, x_2 лист Декарта показан на рис. 5.

4.2. Случай $g = 1$ [7]

Тогда кривая $f(X) = 0$ называется *эллиптической*. Посредством бирациональной замены $x_1, x_2 \leftrightarrow y_1, y_2$ она приводится к нормальной форме Вейерштрасса

$$y_2^2 = 4y_1^3 - g_2y_1 - g_3, \quad (17)$$

где g_2 и g_3 – постоянные (модули).

Униформизацию нормальной формы кривой дает функция Вейерштрасса $\wp(t)$, которая является решением дифференциального уравнения

$$[\wp'(t)]^2 = 4\wp^3(t) - g_2\wp(t) - g_3, \quad (18)$$

где $\wp' = d\wp(t)/dt$, $g_2, g_3 = \text{const}$, и вблизи $t = 0$

$$\wp(t) = \frac{1}{t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{2k}, \quad b_k = \text{const}. \quad (19)$$

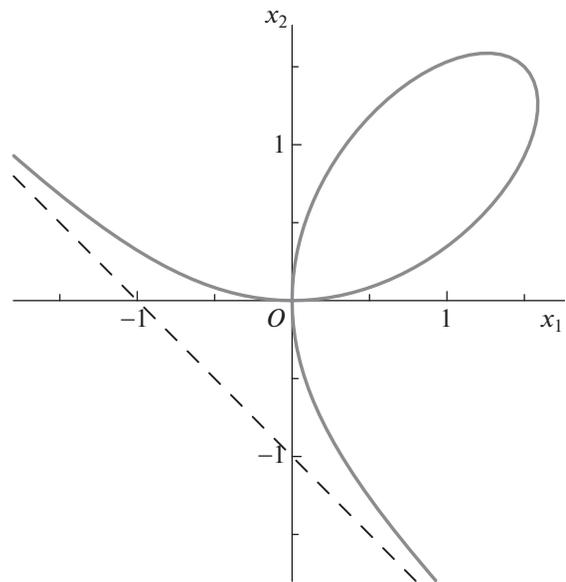


Рис. 5. Лист Декарта. Пунктиром показана асимптота.

Таблица 4. Род кривой Ферма (23)

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g	0	1	3	6	10	15	21	28	36

Итак, получаем униформизацию

$$y_1 = \wp(t), \quad y_2 = \wp'(t). \quad (20)$$

4.3. Гиперэллиптический случай с $g > 1$ [7, гл. 13]

В этом случае с помощью бирационального преобразования $x_1, x_2 \leftrightarrow y_1, y_2$ уравнение кривой приводится к нормальной форме

$$y_2^2 = R(y_1), \quad (21)$$

где $R(y_1)$ – многочлен степени $2g + 1$ или $2g + 2$ без кратных корней. Решения этого уравнения можно записать в виде $y_1 = \varphi(t)$, $y_2 = \psi(t)$, где автоморфные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определенным образом выражаются через тэта-функции. Если $g = 2$, то кривая всегда является гиперэллиптической (см. примеры в [8–14]), но при $g > 2$ существуют не гиперэллиптические кривые [15].

4.4. Суперэллиптический случай с $g > 2$

В этом случае бирациональной заменой координат уравнение приводится к нормальной форме

$$y_2^m = R(y_1), \quad (22)$$

где натуральное $m \geq 3$, а $R(y_1)$ – многочлен. Здесь также существует униформизация через тэта-функции. Но как ее находить, пока неясно [16, 17].

По-видимому, существуют кривые, которые не являются суперэллиптическими. Но для них пока нет нормальной формы.

Пример 5. Рассмотрим кривую Ферма

$$x^n + y^n = 1. \quad (23)$$

Ее род $g = n(n - 3)/2 + 1$. Эти значения приведены в таблице 4.

Только при $n = 2$ эта кривая рациональна. Помимо случая $n = 3$, ее униформизации также известны при $n = 4$ и 8 [10].

4.5. Общий случай

Для произвольной кривой $f(x_1, x_2) = 0$ известна только теорема о существовании ее глобальной униформизации $x_1 = \varphi(t)$, $x_2 = \psi(t)$, но нет аналитического алгоритма ее вычисления. К настоящему времени при $g > 1$ явные униформизации из-

вестны только для кривых, имеющих достаточно большую группу симметрий, т.е. бирациональных автоморфизмов [8–10]. Более того, даже для гиперэллиптических кривых такая униформизация находится преимущественно в случаях наличия дополнительных симметрий [8–12].

В [18, 19] предложен алгоритм униформизации алгебраической кривой с помощью радикалов. В частности, он позволяет найти униформизации кривых рода $g \leq 6$, а также некоторых специальных кривых с $g > 6$. Например, для эллиптической кривой $y_2^2 = 4y_1^3 - g_2y_1 - g_3$ униформизация в радикалах – это

$$y_1 = t, \quad y_2 = \sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}.$$

Для общей кривой рода $g > 6$ униформизация в радикалах невозможна. Так же как невозможно решение в радикалах общего уравнения от одной неизвестной степени больше 4.

4.6. Имплементация

Все локальные вычисления пунктов 4.1, 4.2, 4.3 имеются в системе компьютерной алгебры Maple. С помощью пакета `algcurves` можно вычислить род кривой g . Если $g = 0$ или 1 , то можно найти соответствующую бирациональную замену координат. Если $g > 2$, то можно выяснить, является ли кривая гиперэллиптической или нет. Для гиперэллиптической кривой можно найти бирациональное преобразование к нормальной форме, алгоритма поиска униформизации там нет. Вопросы, связанные с суперэллиптическими кривыми, в Maple не рассматриваются.

Пример 6. В статье [13] дана униформизация кривой

$$w^3 - 3A(z)w - 2B(z) = 0,$$

где

$$A(z) = \frac{1}{z^2 - 1}, \quad B(z) = \frac{z}{(z^2 - a^2)(z^2 - 1)}, \quad 0 < a < 1.$$

Вычисления в системе Maple показали, что род этой кривой равен 2, а ее нормальная форма есть $y^2 = x^6 - 3a^2x^4 + 3a^4x^2 - 2a^4 + a^2$.

4.7. Метод многогранника Адамара

Если для кривой $\mathcal{F} : f(x_1, x_2) = 0$ не удалось найти параметризацию, то можно найти несколько более простых приближенных кривых $\check{\mathcal{F}}_l : \check{f}_l(x_1, x_2) = 0$, $l = 1, \dots, m$, которые приближают исходную кривую в своем множестве \mathcal{W}_l пространства \mathbb{R}^2 или \mathbb{C}^2 .

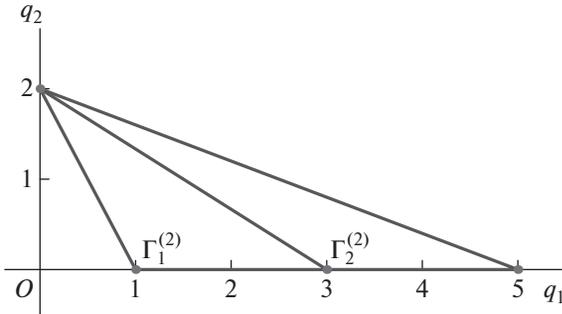


Рис. 6. Проекция многогранника Адамара многочлена (26) на плоскость q_1, q_2 .

Может случиться, что кривая $\check{\mathcal{F}}_l$ параметризуема: $x_1 = \check{\varphi}_l(t), x_2 = \check{\psi}_l(t)$. Для исходной кривой \mathcal{F} эту параметризацию можно уточнить.

Пусть $g(t, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} f(\check{\varphi}_l(t) + \beta_1 \varepsilon, \check{\psi}_l(t) + \beta_2 \varepsilon)$, где $\beta_i = \text{const}, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. Находим ε по методу Ньютона:

из уравнения $f(\check{\varphi}_l(t), \check{\psi}_l(t)) + \varepsilon_1 \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(\varphi, \psi) = 0$ получаем ε_1 . При этом все последовательные добавки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ являются рациональными функциями от $\check{\varphi}_l(t)$ и $\check{\psi}_l(t)$.

Находить эти кривые $\check{\mathcal{F}}_l$ можно так. Пусть

$$f(X) = \sum a_Q X^Q, \quad (24)$$

где $X = (x_1, x_2), Q = (q_1, q_2), X^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2}$. Каждому слагаемому $a_Q X^Q$ ставится в соответствие точка $\check{Q} = (Q, \ln|a_Q|)$ в \mathbb{R}^3 . Их совокупность образует суперноситель $\check{\mathcal{S}} \subset \mathbb{R}^3$. Его выпуклая оболочка – $\check{\mathbf{H}}$. Верхняя часть $\partial \check{\mathbf{H}}$ его границы $\partial \mathbf{H}$ – это многогранник Адамара. Каждой его грани $\check{\Gamma}_l^{(2)}$ соответствует укороченный многочлен

$$\check{f}_l^{(2)}(X) = \sum a_Q X^Q \quad \text{по} \quad \check{Q} \in \check{\Gamma}_l^{(2)} \cap \check{\mathcal{S}} \quad (25)$$

и $p_3 > 0$ у её нормального конуса

Для нормальной формы суперэллиптической кривой $x_2^m = R(x_1)$ в множествах \mathcal{W}_l ограничены только значения x_1 , а значения x_2 там произвольны. Точность приближения $\check{\mathcal{F}}_l$ к \mathcal{F} можно оценить по точности приближения корней уравнения $\check{R}_l(x_1) = 0$ к корням уравнения $R(x_1) = 0$.

Пример 7 (продолжение примера 1). Рассмотрим кривую \mathcal{F} :

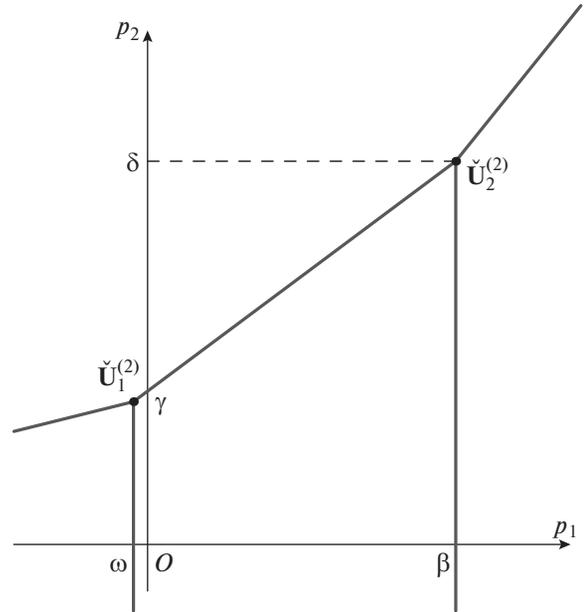


Рис. 7. Приведенные нормальные конусы многогранника Адамара многочлена (26).

$$f \stackrel{\text{def}}{=} -y^2 + 9x - 10x^3 + x^5 = 0. \quad (26)$$

Ее род равен 2. Согласно [10] кривая (26) имеет униформизацию в тэта-функциях

$$x = 3 \frac{\theta_3^2(3t)}{\theta_3^2(t)}, \quad y = 48\sqrt{3i} \frac{\theta_3^3(3t)}{\theta_3^3(t)} \frac{\theta_2^2(t)\theta_4^2(t)}{9\theta_3^4(3t) - \theta_3^4(t)}.$$

Ее многогранник Адамара $\partial \check{\mathbf{H}}$ натянут на 4 вершины $(0, 2, 0), (1, 0, \ln 9), (3, 0, \ln 10), (5, 0, 0)$ и при $q_2 = 0$ изображен на рис. 1. Проекция многогранника $\partial \check{\mathbf{H}}$ на плоскость q_1, q_2 показана на рис. 6.

Из него видно, что многогранник \mathbf{H} имеет точно две верхние двумерные грани $\Gamma_1^{(2)}$ и $\Gamma_2^{(2)}$. Им соответствуют два укороченных многочлена

$$\check{f}_1^{(2)} = -y^2 + 9x - 10x^3,$$

$$\check{f}_2^{(2)} = -y^2 - 10x^3 + x^5.$$

Их приведенные нормальные конусы являются точками $\check{\mathbf{U}}_{1+}^{(2)} = (\omega, \gamma)$ и $\check{\mathbf{U}}_{2+}^{(2)} = (\beta, \delta)$, где $\omega = \ln\sqrt{0.9} \approx -0.0568, \gamma = (3\ln 9 - \ln 10)/4 \approx 1.07227, \beta = \ln\sqrt{10} \approx 1.15129, \delta = (5\ln 10)/4 \approx 2.87231$, показаны на рис. 7.

Будем считать, что область $\mathcal{W}_1 = \{x, y : \ln|x| < (\omega + \beta)/2 \approx 0.5493, \text{ т.е. } |x| < 1.73204, y - \text{любое}\}$, а $\mathcal{W}_2 = \{x, y : \ln|x| > (\omega + \beta)/2 \approx 0.5493, \text{ т.е. } |x| > 1.73204, y - \text{любое}\}$. Кривые $\check{\mathcal{F}}_1$ и $\check{\mathcal{F}}_2$ имеют род 1.

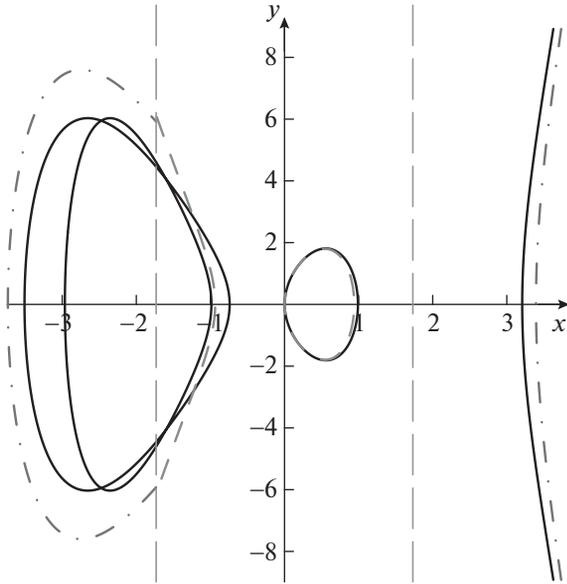


Рис. 8. Кривые примера 7: \mathcal{F} (сплошная), $\check{\mathcal{F}}_1$ (пунктир), \mathcal{F}_2 (штрих-пунктир). Кривые $\check{\mathcal{F}}_1, \check{\mathcal{F}}_2$ изображены только в своих областях $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$.

Преобразование $x_1 = -10x, y_1 = -20y$ приводит уравнение $\check{f}_1 = 0$ к нормальной форме Вейерштрасса

$$y_1^2 = 4x_1^3 - 360x_1,$$

для которой $g_2 = 360, g_3 = 0$. Поэтому кривая $\check{\mathcal{F}}_1$ униформизируется так:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{10} \wp(t|360, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \check{\varphi}_1(t), \\ y &= -\frac{1}{20} \wp'(t|360, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \check{\psi}_1(t). \end{aligned} \tag{27}$$

Преобразование $x = x_2, y = x_2 y_2 / 2$ приводит уравнение $\check{f}_2 = 0$ к нормальной форме Вейерштрасса

$$y_2^2 = 4x_2^3 - 40x_2,$$

для которой $g_2 = 40, g_3 = 0$. Поэтому кривая $\check{\mathcal{F}}_2$ униформизируется так:

$$\begin{aligned} x &= \wp(t|40, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \check{\varphi}_2(t), \\ y &= \frac{1}{2} \wp'(t|40, 0) \wp'(t|40, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \check{\psi}_2(t). \end{aligned} \tag{28}$$

Кривые $\check{\mathcal{F}}, \check{\mathcal{F}}_1, \check{\mathcal{F}}_2$ показаны на рис. 8.

Уточним кривую (27) как приближение к кривой (26). Для этого положим $x = \check{\varphi}_1(t) + \varepsilon, y = \check{\psi}_1(t)$. Тогда по методу Ньютона для ε получаем уравнение

$$-\check{\psi}_1^2 + \varepsilon(9 - 30\check{\varphi}_1^2 + 5\check{\varphi}_1^4) + 9\check{\varphi}_1 - 10\check{\varphi}_1^3 + \check{\varphi}_1^5 = 0.$$

Из уравнения кривой $\check{\mathcal{F}}_1$ получаем, что

$$\varepsilon(9 - 30\check{\varphi}_1^2 + 5\check{\varphi}_1^4) + \check{\varphi}_1^5 = 0,$$

т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = -\frac{\check{\varphi}_1^5}{9 - 30\check{\varphi}_1^2 + 5\check{\varphi}_1^4}.$$

Можно вычислить и дальнейшие поправки.

Аналогично уточним кривую (28) как приближение кривой (26). Для этого положим $x = \check{\varphi}_2(t) + \varepsilon, y = \check{\psi}_2(t)$. Тогда в первом приближении по ε получаем

$$-\check{\psi}_2^2 + \varepsilon(9 - 30\check{\varphi}_2^2 + 5\check{\varphi}_2^4) + 9\check{\varphi}_2 - 10\check{\varphi}_2^3 + \check{\varphi}_2^5 = 0.$$

Но теперь $-\check{\psi}_2^2 = -10\check{\varphi}_2^3 + \check{\varphi}_2^5$, поэтому

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = -\frac{9\check{\varphi}_2}{9 - 30\check{\varphi}_2^2 + 5\check{\varphi}_2^4}.$$

Пример 8 (продолжение примера 2). Рассмотрим кривую \mathcal{F} :

$$f \stackrel{\text{def}}{=} -y^2 - x - \frac{5}{6}x^3 + x^5 = 0. \tag{29}$$

Ее род равен двум и параметризация неизвестна. Ее суперноситель \check{S} состоит из четырех точек $(0, 2, 0), (1, 0, 0), (3, 0, \ln(5/6)), (5, 0, 0)$. Многогранник \mathbf{H} имеет сверху только одну грань $\Gamma_1^{(2)}$, содержащую точки $(0, 2, 0), (1, 0, 0), (5, 0, 0)$, с приведенным нормальным конусом $\check{U}_{1+}^{(2)} = (0, 0)$. Ей соответствует одно укороченное уравнение

$$f_1^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} -y^2 - x + x^5 = 0.$$

Это кривая Бернсайда, ее явная параметризация $x = \check{\varphi}(t), y = \check{\psi}(t)$ в функциях \wp и \wp' приведена в сложной формуле (3) статьи [9]. Найдем поправку ε к кривой $\check{\mathcal{F}}_1$. Положим $g(t, \varepsilon) = f(\check{\varphi}_1(t) + \varepsilon, \check{\psi}_1(t))$. Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(\check{\varphi}_1, \check{\psi}_1)},$$

и в первом приближении получаем уравнение для ε : $f(\check{\varphi}, \check{\psi}) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(\check{\varphi}, \check{\psi}) = 0$, т. е.

$$\varepsilon = -\frac{\frac{5}{6}\check{\varphi}_1^3(t)}{-1 - \frac{5}{2}\check{\varphi}_1^2 + 5\check{\varphi}_1^4}.$$

Эту процедуру можно продолжить и получить дальнейшие добавки $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ как рациональные функции от $\check{\varphi}_1(t)$ и $\check{\psi}_1(t)$. Здесь область \mathcal{W}_1 совпадает со всем пространством.

При этом подходе приходим к задаче параметризации кривых вида

$$y^m = a_k x^k + a_l x^l, \quad k < l, \quad a_k, a_l = \text{const} \neq 0.$$

Они могут быть любого рода (см. пример 5), но у них много симметрий, т.е. бирациональных автоморфизмов.

4.8. Преобразование кривой в координатную ось

Пусть кривая \mathcal{F} , заданная алгебраическим уравнением $f(x_1, x_2) = 0$, имеет параметризацию $x_1 = \varphi(t), x_2 = \psi(t)$. Для того чтобы перевести кривую \mathcal{F} в координатную ось, сделаем замену координат

$$x_1 = \varphi(t) + \beta_1 z, \quad x_2 = \psi(t) + \beta_2 z, \quad (30)$$

где β_1 и β_2 – такие постоянные, что $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. Тогда многочлен $f(x_1, x_2)$ переходит в функцию $h(t, z)$, которая при $z = 0$ тождественно равна нулю, а ее производная $\partial \tilde{f} / \partial z \neq 0$ при $z = 0$.

Пример 9 (продолжение примера 4). В многочлене $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2$ сделаем подстановку

$$x_1 = \frac{3t}{1+t^3} + 3z, \quad x_2 = \frac{3t^2}{1+t^3}. \quad (31)$$

После умножения на общий знаменатель $(1+t^3)^3$ получим многочлен

$$\tilde{f}(t, z) = (1+t^3)^2 z^3 + 3z^2 t(1+t^3) + zt^2(2-t^3), \quad (32)$$

у которого прямая $z = 0$ является корнем. На этой прямой

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = t^2(2-t^3) \neq 0. \quad (33)$$

Эта производная обращается в ноль при $t = t_0 = 0$ (что соответствует двойной точке $x_1 = x_2 = 0$, ей же соответствует $t = \infty$) и при $t = t_1 = \sqrt[3]{2}$. В этой последней точке $\partial f / \partial x_1 = 0$ на $f = 0$. Точку t_1 можно убрать, если вместо (31) сделать замену (30) с другим набором чисел β_1, β_2 . Но тогда получится другая точка $t_2 \neq 0, \infty$, где $\partial \tilde{f} / \partial z = 0$ при $z = 0$.

Замечание 1. Аналогичная техника применима и при $n = 3$ для глобальной параметризации двумерного алгебраического многообразия, заданного одним многочленом от трех переменных. Если такая глобальная параметризация не нахо-

дится, то ее можно заменить несколькими приближенными параметризациями, которые найдутся с помощью верхней границы четырехмерного многогранника.

Замечание 2. Униформизация двумерных алгебраических поверхностей с помощью радикалов рассматривается в [19].

5. ЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ $n = 2$

Точка $X = X^0, f(X^0) = 0$ называется *простой* точкой кривой \mathcal{F} , если в ней вектор $(\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2)$ не нулевой. В противном случае точка X^0 называется *особой* или *критической*. Сдвигом перенесем точку X^0 в начало координат.

5.1. Локальный анализ простой точки

Теорема 1 (Коши [22]). *Если при $X^0 = 0$ производная $\partial f / \partial x_2 \neq 0$, то все решения уравнения (1) вблизи точки $X^0 = 0$ содержатся в разложении*

$$x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k, \quad (34)$$

где b_k – постоянные.

5.2. Локальный анализ особой точки $X^0 = 0$

[6, гл. I, пар. 2], [23], гл. II

Запишем многочлен $f(X)$ в виде

$$f(X) = \sum a_Q X^Q \quad \text{по } Q \geq 0, \quad Q \in \mathbb{Z}^n, \quad (35)$$

где $X = (x_1, x_2), Q = (q_1, q_2), X^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2}, a_Q$ – постоянные. Пусть $\mathbf{S}(f) = \{Q : a_Q \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Множество \mathbf{S} называется *носителем* (support) многочлена $f(X)$. Пусть оно состоит из точек Q_1, \dots, Q_k . Выпуклая оболочка носителя $\mathbf{S}(f)$ – это множество

$$\mathbf{N}(f) = \left\{ Q = \sum_{j=1}^k \mu_j Q_j, \mu_j \geq 0, \sum_{j=1}^k \mu_j = 1 \right\}, \quad (36)$$

которое называется *многоугольником Ньютона*. Граница $\partial \mathbf{N}(f)$ состоит из вершин $\Gamma_i^{(0)}$ и ребер $\Gamma_i^{(1)}$, где i – это номер.

Каждому ребру $\Gamma_i^{(1)}$ соответствуют его *граничное подмножество* $\mathbf{S}_i^{(1)} = \mathbf{S} \cap \Gamma_i^{(1)}$, *укороченный многочлен*

$$\hat{f}_i^{(1)}(X) = \sum a_i X^Q \quad \text{по } Q \in \mathbf{S}_i^{(1)} \quad (37)$$

и свой *нормальный конус*

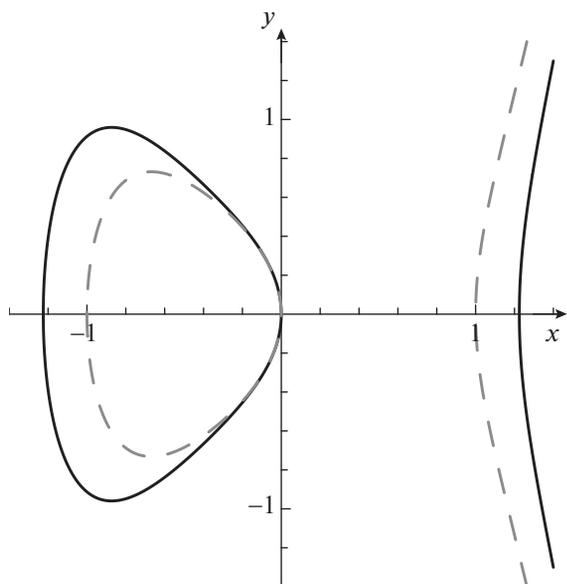


Рис. 9. Кривые примера 8: \mathcal{F} и \mathcal{F}_1 .

$$U_i^{(1)} = \{P : \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q'' \rangle > \langle P, Q''' \rangle, \quad (38)$$

$$Q', Q'' \in \Gamma_i^{(1)}, Q''' \in \Gamma \setminus \Gamma_i^{(1)}\},$$

где $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$, а плоскость \mathbb{R}_*^2 сопряжена плоскости \mathbb{R}^2 .

Лемма 1. Вблизи особой точки $X^0 = 0$ все решения уравнения $f(X) = 0$ образуют ветви вида

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \tau^{r_{ik}}, \quad i = 1, 2, \quad \tau \rightarrow 0, \quad r_{ik} < r_{i,k+1} \quad (39)$$

и каждый вектор $R_i = (r_{i1}, r_{i2})$ принадлежит одному из нормальных конусов $U_i^{(1)}$, лежащих в третьем квадранте плоскости \mathbb{R}_*^2 , т. е. $p_1, p_2 < 0$.

Из этой леммы следует, что в разложениях (39) отношения r_{ik}/r_{i1} , $i = 1, 2$, суть рациональные числа. Более того, при правильной параметризации все числа r_{ik} — целые.

Аналогично устроены ветви кривой (1) вблизи точки $X^0 = (\infty, \infty)$, только там надо ограничиться ребрами $\Gamma_i^{(1)}$ с нормальными конусами $U_i^{(1)}$, лежащими в первом квадранте $p_1, p_2 > 0$ плоскости \mathbb{R}_*^2 . Наконец, так же устроены ветви кривой (1) вблизи точки $X^0 = (0, \infty)$, только там нормальные конусы $U_i^{(1)}$ лежат во втором квадранте $p_1 < 0, p_2 > 0$ (в конусе задачи).

5.3. Степенное преобразование

Теперь заметим, что степенное преобразование

$$\begin{pmatrix} \ln x_1 \\ \ln x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

где $\alpha = (\alpha_{ij})$ — неособая квадратная (2×2) матрица с вещественными элементами α_{ij} , индуцирует аффинное преобразование в плоскостях \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}_*^2 :

$$\tilde{Q}^* = \alpha^* Q^* \quad \text{и} \quad \tilde{P}^* = \alpha^{-1} P^*, \quad (41)$$

где звездочка означает транспонирование. При этом

$$\langle \tilde{P}, \tilde{Q} \rangle = \langle P, Q \rangle \quad (42)$$

и моном X^Q переходит в моном $Y^{\tilde{Q}}$.

В дальнейшем можно ограничиться только унимодулярными матрицами $\alpha = (\alpha_{ij})$, т. е. α_{ij} — целые и $\det \alpha = \pm 1$.

Лемма 2 [6, гл. I, пар. 2]. Для каждого ребра $\Gamma_j^{(1)}$ существует степенное преобразование (40) с унимодулярной матрицей α , которое переводит многочлен $f(X)$ в многочлен $g(Y)$. При этом ребру $\Gamma_i^{(1)} \subset \partial N(f)$ соответствует вертикальное ребро $\tilde{\Gamma}_i^{(1)} \subset \partial N(g)$.

Теперь для вычисления разложений, соответствующих ребру $\Gamma_i^{(1)}$, надо найти ненулевые корни $y_2 = y_2^0$ уравнения $y_1^q \tilde{g}_i(y_2) = 0$, где $y_1^q \tilde{g}_i(y_2)$ — укорочение многочлена $g(y_1, y_2)$, соответствующее вертикальному ребру $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$. Пусть $y_2^0 \neq 0$ — такой корень. Если он прост, то теорема 1 о неявной функции дает разложение ветви, проходящей через точку $y_1 = 0, y_2 = y_2^0$. Если y_2^0 — кратный корень многочлена $\tilde{g}_i(y_2)$, то делаем сдвиг $y_2 = y_2^0 + z_2$ и исследуем окрестность точки $y_1 = z_2 = 0$ тем же способом. Так получаются все ветви исходной кривой.

Пример 10. Лист Декарта

$$f(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 = 0 \quad (43)$$

имеет особую точку $x_1 = x_2 = 0$. Носитель многочлена (15) состоит из точек $(3, 0)$, $(0, 3)$ и $(1, 1)$. Их выпуклая оболочка — треугольник с этими вершинами (рис. 10) и тремя ребрами. Приведенные нормальные конусы $\tilde{U}_{j\pm}^{(1)}$ ребер $\Gamma_j^{(2)}$ суть точки $(-1/2, -1)$, $(-2, -1)$, $(1, 1)$.

1. Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствуют укороченный многочлен

$$\hat{f}_1^{(1)}(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2$$

и ветвь $x_2 = \frac{1}{3}x_1^2 + \varphi(x_1)$.

2. Ребру $\Gamma_2^{(1)}$ соответствуют укорочение

$$\hat{f}_2^{(1)}(x_1, x_2) = x_2^3 - 3x_1x_2$$

и ветвь $x_1 = \frac{1}{3}x_2^2 + \varphi(x_2)$. Обе эти ветви пересекаются в особой точке $X^0 = 0$.

3. Ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствуют укорочение

$$\hat{f}_3^{(1)}(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$

и ветвь $x_2 = -x_1 - 1 + \dots$ в бесконечности (рис. 5).

6. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ $n = 3$

Теорема 2 (Коши [22]). Пусть при $X^0 = 0$ имеем $f(X) = 0$ и $\partial f / \partial x_3 \neq 0$, тогда вблизи точки $X = X^0$ все решения уравнения $f(X) = 0$ имеют вид

$$x_3 = \sum b_Q X^Q, \quad (44)$$

где $X' = (x_1, x_2)$, $Q' = (q_1, q_2)$, $b_Q = \text{const}$.

Теорема 3 ([20, 24]). Пусть

$$f(X) = \sum a_Q X^Q, \quad (45)$$

где $a_Q = \text{const}$,

$$\begin{aligned} q_1 - \lambda_1 q_2 < 0, \quad q_1 - \lambda_2 q_2 < 0, \\ 0 \leq Q \in \mathbb{Z}^3, \quad \lambda_1, \lambda_2 = \text{const} \end{aligned} \quad (46)$$

и $a_{(0,0,1)} = \partial f / \partial x_3|_{X=0} \neq 0$. Тогда решение уравнения $f(X) = 0$ имеет вид (44), где $b_Q = \text{const}$ и выполнены неравенства (46); такое решение единственно.

Теорема 4 ([23, гл. 2, пар. 1, теорема 1.1]). Пусть

$$f(X) = \sum a_{q_2 q_3}(x_1) x_2^{q_2} x_3^{q_3}, \quad (47)$$

где сумма конечна, $0 \leq q_2, q_3 \in \mathbb{Z}$, а $a_{q_2 q_3}(x_1)$ — некоторые функции от x_1 , кроме того

$$a_{00}(x_1) \equiv 0, \quad a_{10}(x_1) \neq 0. \quad (48)$$

Тогда решение уравнения $f(X) = 0$ имеет вид

$$x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x_1) x_3^k, \quad (49)$$

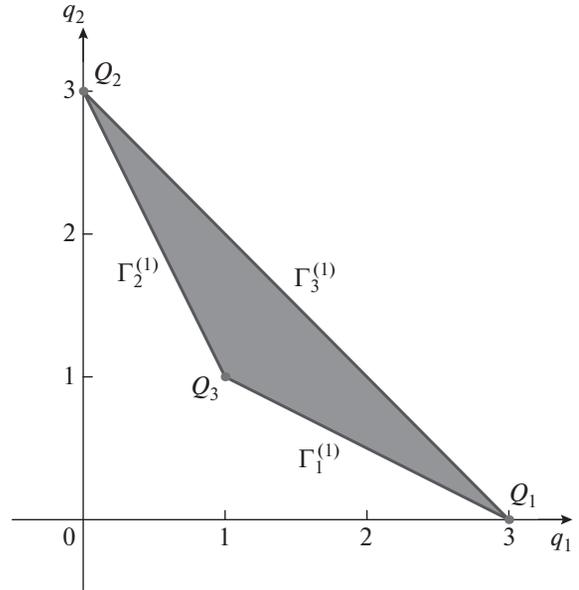


Рис. 10. Носитель и многоугольник Ньютона листа Декарта (43).

где коэффициенты b_k суть функции от x_1 , являющиеся многочленами от $a_{q_2 q_3}(x_1)$ с $q_2 + q_3 \leq k$, деленными на a_{10}^{2k-1} . Такое разложение единственно.

В русском издании книги [23] имеется опечатка в формулировке этой теоремы. Она исправлена в ее английском издании. Кроме того, в [23] она сформулирована вблизи точки $X = 0$, но она справедлива вблизи оси x_1 , т. е. прямой $x_2 = x_3 = 0$.

Имплементация имеется только для теорем 2 и 3 в Maple и в [20].

7. ЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ $n = 3$

Точка $X = X^0$, $f(X^0) = 0$ называется *простой*, если в ней вектор $(\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \partial f / \partial x_3)$ ненулевой. В противном случае точка $X = X^0$ называется *особой* или *критической*. Сдвигом $X = X^0 + \tilde{X}$ перенесем точку X^0 в начало координат. Если в этой точке производная $\partial f / \partial x_3 \neq 0$, то согласно теореме 2 о неявной функции вблизи X^0 все решения уравнения $f(X) = 0$ имеют вид (44).

7.1. Многогранник Ньютона

Пусть точка $X^0 = 0$ — особая. Записываем многочлен в виде $f(X) = \sum a_Q X^Q$ (35) с $n = 3$ и строим его многогранник Ньютона. То есть: но-

ситель $\mathbf{S} = \{Q : a_Q \neq 0\}$, многогранник Ньютона \mathbf{N} как выпуклую оболочку носителя, находим его границу $\partial\mathbf{N}$ и ее обобщенные грани $\Gamma_j^{(d)}$, т.е. вершины с $d=0$, ребра с $d=1$ и обычные грани с $d=2$. Для каждой из них вычисляем граничное множество $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{S} \cap \Gamma_j^{(d)}$, укороченный многочлен

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_Q X^Q \quad \text{по } Q \in \mathbf{S}_j^{(d)} \quad (50)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ в сопряженном пространстве \mathbb{R}_*^3 . При $X \rightarrow 0$ решения полного уравнения стремятся к нетривиальным решениям тех укороченных уравнений

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0, \quad (51)$$

у которых нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ пересекается с отрицательным октантом $P \leq 0$ в \mathbb{R}_*^3 . Для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ укороченная сумма $\hat{f}_j^{(0)}$ состоит из одного слагаемого. Такие укорочения нам не интересны, ибо их корни — это нулевые значения координат, и в дальнейшем не рассматриваются. Будем рассматривать лишь укорочения, т.е. укороченные суммы, соответствующие ребрам $\Gamma_j^{(1)}$ и граням $\Gamma_j^{(2)}$.

7.2. Степенные преобразования [23]

Введем степенные преобразования

$$\ln X = \alpha \ln Y, \quad (52)$$

где $\ln X = (\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3)^*$, $\ln Y = (\ln y_1, \ln y_2, \ln y_3)^*$, α — невырожденная квадратная 3×3 матрица (α_{ij}) с рациональными элементами α_{ij} (зачастую они будут целыми). При степенном преобразовании (52) моном X^Q переходит в моном $Y^{\tilde{Q}}$, где

$$\tilde{Q}^* = \alpha^* Q^*. \quad (53)$$

Степенное преобразование (52) в двойственном пространстве \mathbb{R}_*^3 индуцирует линейное преобразование

$$\tilde{P}^* = \alpha^{-1} P^*. \quad (54)$$

Матрица B называется *унимодулярной*, если все ее элементы целые и $\det B = \pm 1$. Очевидно, для унимодулярной матрицы B обратная матрица B^{-1} также унимодулярна.

Теорема 5 [20, теорема 2]. Для грани $\Gamma_j^{(d)}$ существует степенное преобразование (52) с унимодулярной матрицей α , которое переводит укороченную сумму $\hat{f}_j^{(d)}(X)$ в сумму от d координат, т.е.

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = Y^R h(Y), \quad (55)$$

где $h(Y) = h(y_1)$, если $d=1$, и $h(Y) = h(y_1, y_2)$, если $d=2$. Здесь $R = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$. При этом дополнительные координаты y_2, y_3 при $d=1$ и y_3 при $d=2$ являются локальными, и для многочлена $\hat{f}_j^{(d)}(X)$ сумма $h(Y)$ также будет многочленом.

Умножению многочлена $f(X)$ на X^P соответствует параллельный перенос носителя $\mathbf{S}(f)$ и многогранника $\Gamma(f)$ на вектор P . Поэтому если после степенного преобразования (52), примененного к многочлену $f(X)$, получаем конечную сумму $g(Y)$, содержащую отрицательные степени координат y_1, y_2 или y_3 , то существует такой вектор P , что произведение $Y^P g(Y)$ является многочленом, т.е. все показатели степени его мономов неотрицательны.

Структура решений полного уравнения, стремящихся к решениям укороченного уравнения, определяется размерностью d соответствующей обобщенной грани. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

7.3. Случай ребра, т.е. $d=1$ [23]

В этом случае по теореме 5 существует степенное преобразование и сокращение, приводящее многочлен $f(X)$ к виду (45), (46). При этом образ ребра $\Gamma_j^{(1)}$ находится на оси q_3 , т.е. $q_1 = q_2 = 0$. Соответствующее укорочение является многочленом $h(y_3)$.

Пусть $y_3 = y_3^0$ — его корень. Если это простой корень, то применима теорема 3, которая дает решение полного уравнения $f(X) = 0$ в виде

$$y_3 = \sum b_{Q'} Y^{Q'}, \quad (56)$$

$Q' = (q_1, q_2)$ с неравенствами

$$q_1 - \lambda_1 q_2 < 0, \quad q_1 - \lambda_2 q_2 < 0.$$

Если y_3^0 — кратный корень, то сдвигом $y_3 = y_3^0 + \tilde{y}_3$ переводим его в начало координат; получаем новый многочлен $g(y_1, y_2, \tilde{y}_3)$ и ищем его корни с помощью построения многогранника Ньютона, как описано выше.

7.4. Случай грани, т.е. $d=2$

В этом случае согласно теореме 5 с помощью степенного преобразования и сокращения приводим многочлен $f(X)$ к виду $g(Y)$, где $g(Y) = h(y_1, y_2)$ при $y_3 = 0$. Уравнение $h(y_1, y_2) = 0$ определяет плос-

кую алгебраическую кривую. Пусть $\tilde{h}(y_1, y_2)$ – неприводимый сомножитель многочлена $h(y_1, y_2)$ и \mathcal{G} – род соответствующей кривой \mathcal{G} .

Так или иначе находим униформизацию кривой \mathcal{G} . Затем алгоритмом п. 4. переводим эту кривую в координатную ось, т.е. делаем рациональную замену координат

$$y_1 = \varphi(t) + \beta_1 z, \quad y_2 = \psi(t) + \beta_2 z, \quad (57)$$

где β_1 и β_2 – такие постоянные, что $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. Тогда многочлен $\tilde{h}(y_1, y_2)$ переходит в многочлен $H(t, z)$, который при $z = 0$ тождественно равен нулю, а его производная $\partial H / \partial z \neq 0$ при $z = 0$. При замене (57) во всем многочлене $g(Y)$ он переходит в функцию $G(Z)$, где $z_1 = t$, $z_2 = z$, $z_3 = y_3$. Если $\tilde{h}(y_1, y_2)$ – простой множитель многочлена $h(y_1, y_2)$, то применяем теорему 4 и получаем решение – ветвь вида (49)

$$z_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z_1)z_3^k, \quad (58)$$

где $b_k(z_1)$ суть рациональные функции от коэффициентов многочлена $G(Z)$.

Если $\tilde{h}(y_1, y_2)$ – кратный множитель в $h(y_1, y_2)$, то после замены (57) надо для полученного многочлена снова строить многогранник Ньютона и т.д. Аналогично, для каждой из особых точек многочлена $h(y_1, y_2)$: надо сдвигать ее в начало координат по y_1, y_2 и строить многогранник Ньютона. Примеры таких вычислений см. в [24].

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит А.Б. Батхина за большую помощь в подготовке этой работы.

Работа поддержана РФФИ, грант 18-01-00422а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fukuda K. Exact algorithms and software in optimization and polyhedral computation // Proceed. IS-SAC'08 of XXI International Symposium on Symbolic and Algebraic Computations, ACM NY, USA, 2008. P. 333–334.
2. Barber C.B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H.T. The Quickhull algorithm for convex hulls // ACM Transactions on Mathematical Software. Dec. 1996. V. 22. № 4. P. 469–483. <http://www.qhull.org>.
3. King R.B. Beyond the quartic equation. Birkhäuser, Boston, 1996.
4. Уммура Х. Решение алгебраических уравнений с помощью тэта-констант. В кн. Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988. С. 360–370.
5. Hadamard J. Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d'une fonction considerée par Riemann // Journal de mathematiques pures et appliques, 1893. V. 9. № 2. P. 171–215.
6. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1979. // Bruno A.D. Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1989.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. Т. 3. // Bateman H. and Erdélyi A. Higher Transcendental Functions. V. 3. McGraw-Hill, 1955.
8. Brezhnev Yu.V. On the uniformization of algebraic curves // Moscow Mathematical Journal, 2008. V. 8. № 2. P. 233–271.
9. Brezhnev Yu.V. On uniformization of Burnside's curve $y^2 = x^5 - x$ // Journal of Mathematical Physics. 2009. V. 50. № 10.
10. Brezhnev Yu.V. The sixth Painlevé transcendent and uniformization of algebraic curves // Journal Differential Equations. 2016. V. 260. № 3. P. 2507–2556.
11. Belokolos E.D., Enolskii V.Z. Reduction of Abelian functions and completely integrable equations // Journal of Mathematical Sciences. 2001. V. 106. № 6. P. 3395–3486 (Part I) and 2002. V. 108. № 3. P. 295–374 (Part II).
12. Ōnishi Y. Complex multiplication formulae for hyperelliptic curves of genus three // Tokyo Journal Mathematics. 1998. V. 21. P. 381–431.
13. Антекеров А.И., Туляков Д.Н., Ятцелев М.Л. (О параметризации одной комплексной алгебраической кривой рода 2 // Матем. заметки. 2015. Т. 95. № 5. С. 782–785. // Aptekarev A.I., Toulyakov D.N. and Yattselev M.L. On the parametrization of a certain algebraic curve of genus 2 // Math. Notes. 2015. V. 95. № 5. P. 843–846.
14. Aptekarev A.I., Toulyakov D.N., Van Assche W. Hyperelliptic uniformization of algebraic curves of third order // Journal Computational and Applied Mathematics. 2015. V. 284. P. 38–49.
15. Уокер Р. Алгебраические кривые. Пер. с англ. М.: Книжный дом “Либроком”. 2009. = Walker R.J. Algebraic Curves. Princeton, New Jersey, 1950.
16. Eilbeck J.C., Enolski V.Z., Matsutani S., Ōnishi Y., Previato E. Abelian functions for trigonal curves of genus three // International Mathematics Research Notices. 2007. V. 2007. Article ID rnm140.
17. Eilbeck J.C. Weierstrass functions for higher genus curves // <http://www.ma.hw.ac.uk/Weierstrass>
18. Sendra J.R., Sevilla D. Radical parametrizations of algebraic curves by adjoint curves // Journal of Symbolic Computation. 2011. V. 46. P. 1030–1038.
19. Harrison M. Explicit solution by radicals, gonial maps and plane models of algebraic curves of genus 5 or 6 // Journal of Symbolic Computation. 2013. V. 51. P. 3–21.

20. Брюно А.Д., Батхин А.Б. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // Программирование. – 2012. – Т. 38, № 2. С. 12–30. = Bruno A.D., Batkhin A.B. (курсивом) Resolution of algebraic singularity by algorithms of Power Geometry // Programming and Computer Software. 2012. V. 38. № 2. P. 57–72.
21. Sendra J.R., Sevilla D. First step towards radical parametrization of algebraic surfaces // Computer Aided Geometric Design. 2013. V. 30. P. 374–388.
22. Гурса Э. Курс математического анализа. – М.-Л.: ГТТИ, 1933. Т. 1, Ч. 2. = Goursat E. Course of Mathematical Analysis. Dover Publ. Inc., New York. 1959.
23. Power Geometry in Algebraic and Differential Equations. Elsevier Science (North-Holland), Amsterdam, 2000.
24. Bruno A.D. Asymptotic solving essentially nonlinear problems // Mathematics and Statistics. 2016. V. 4. № 1. P. 27–39.