

УДК 539.3:532.5

ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАВАЮЩЕМ ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ ОТ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА ВОЗМУЩЕНИЙ

© 2023 г. Ж. В. Маленко^{1,2,*}, А. А. Ярошенко^{1,2,**}¹*Филиал государственного морского университета им. Адмирала Ф.Ф. Ушакова,
Севастополь, Россия*²*Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия***e-mail: zhvla17@mail.ru****e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru*

Поступила в редакцию 27.02.2023 г.

После доработки 10.04.2023 г.

Принята к публикации 15.09.2023 г.

Ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины. По поверхности пластины перемещается источник возмущений. Получены значения критических скоростей, при которых меняется характер волнового возмущения. Определены угловые зоны, в которых распространяются волны. Исследовано влияние скорости перемещения источника возмущений, толщины ледяной пластины, сил сжатия и растяжения на амплитуды образующихся волн.

Ключевые слова: упругая пластина, ледяной покров, изгибно-гравитационные волны, критическая скорость

DOI: 10.31857/S0032823523060115, EDN: AOECZR

1. Введение. В зимний период многие реки, озера и водоемы Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока покрываются ледяным покровом. Создаются условия для организации на них ледовых дорог и переправ для доставки по ним грузов. Одна из самых известных ледовых дорог была создана во время Великой Отечественной войны на Ладожском озере для доставки по ней грузов в осажденный Ленинград. Группа ученых под руководством Кобеко П.П., проведя серию экспериментов, разработала рекомендацию по движению транспортных средств по ледяному покрову [1]. Ими была предписана определенная скорость движения автомобилей, чтобы избежать явления резонанса, вызванного изгибно-гравитационной волной.

На северо-западе Канады находится одна из самых опасных зимних дорог мира – Tuktoyaktuk Winter Road или Mackenzie Ice Road. Она пролегает частично по замерзшему руслу реки Маккензи, частично по замерзшему морю Бофорта. Самый длинный в мире автозимник находится в Чукотском автономном округе. Он проложен по льду Восточно-Сибирского моря и соединяет город Певек с селом Айон. Протяженность его составляет 120 км.

С другой стороны необходимость продления навигации на замерзающих водных путях ставит задачу разрушения ледяного покрова. Для этих целей используются суда на воздушной подушке, которые, двигаясь с определенной скоростью, создают условия для разрушения ледяного покрова. К одним из первых работ, посвященных этой

проблеме, можно отнести работы [2, 3]. Дальнейшие исследования в этом направлении были продолжены Козиным В.М. и его учениками [4–6].

Исследования плавающего ледяного покрова при движении по нему различного рода нагрузок строятся в зависимости от того, является ли разрушение льда желательным или нежелательным. Возникает необходимость исследований поведения ледяного покрова при движении по нему источника возмущений. Важно знать поведение ледяного покрова в зависимости от скорости перемещения нагрузки, знать критические скорости, при которых возможно разрушение ледяного покрова.

Первый систематический подход, посвященный исследованию реакций бесконечной пластины, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины H , от воздействий на нее различного рода нагрузок, принадлежит Хейсину Д.Е. [7]. Он проанализировал прогибы пластины, вызванные равномерно движущейся нагрузкой, и показал, что в случае плоской деформации существует две критические скорости.

Дальнейшее исследование трехмерных изгибно-гравитационных волн, вызванных движущимися возмущениями, нашло свое отражение в работах [8–11] и многих других.

Одними из первых зарубежных работ, посвященных исследованию изгибных волн в плавающих ледяных покровах, вызванных движущимися нагрузками, были работы Wilson J.T. [12, 13]. В коллективной монографии [14] приводится анализ и библиография основных работ зарубежных авторов вплоть до 1995 года, посвященных перемещению грузов по ледяному покрову. Среди последних исследований по этой теме можно отметить работы: [15–22].

Исследованию колебаний сплошного ледяного покрова при воздействии на него изгибно-гравитационных волн от движущихся погруженных тел посвящены работы [23–30]. В монографии [23] проанализирована возможность использования подводных судов для разрушения ледяного покрова. Приводятся результаты экспериментальных исследований. Изучено [24] влияние скорости движения погруженного тела, толщины плавающего льда, сжимающих и растягивающих усилий на распределение прогибов в ледяном покрове. Исследован [25] докритический режим движения диполя (сферы), при котором ледяной покров не совершает колебательные движения. Рассмотрена [26] плоская задача о движении диполя в жидкости с плавающим ледяным покровом при движении его со сверхкритическими скоростями. Монография [27] посвящена экспериментальным исследованиям разрушения ледяного покрова изгибно-гравитационными волнами от движения подводных судов. Эксперименты проводились в опытовом ледовом бассейне Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. Экспериментально и теоретически исследовалось [28] влияние глубины опытового бассейна на прогибы ледяного покрова при движении модели под ним. При проведении экспериментов ледяной покров получался путем замораживания поверхностного слоя воды, либо использовался резиновый лист, плавающий на поверхности жидкости. В монографии [29] кроме экспериментальных исследований изложены результаты численного и теоретического моделирования движения погруженного тела в приповерхностной водной среде, как для свободной поверхности, так и при наличии ледяного покрова. Изучено [30] движение сферы в жидкости бесконечной глубины под плавающим ледяным покровом при неравномерном его сжатии. Анализируется величина прогиба льда в зависимости от его толщины, скорости движения и глубины его погружения, а также направления движения.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния скорости перемещения источника возмущений, сил сжатия и растяжений, а также толщины ледяного покрова на амплитуды трехмерных изгибно-гравитационных волн. Проведено [31] исследование в случае отсутствия сил сжатия и растяжения.

2. Постановка задачи. На поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины плавает ледяной покров, который моделируется тонкой упругой изотропной пластиной, по поверхности которой перемещается источник возмущений вида:

$$p = p_0 f(x_1, y); \quad x_1 = x + vt \quad (2.1)$$

В горизонтальных направлениях пластина и жидкость не ограничены. Считая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц и прогиб пластины малыми, в системе координат x_1, y , связанной с движущейся областью давлений (2.1), задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости ϕ

$$\Delta\phi = 0; \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, \quad y < \infty \quad (2.2)$$

с граничными условиями:

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_1 \zeta + \chi_1 v^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \zeta + \frac{v}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -p_1 f(x, y) \quad \text{при} \quad z = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -H, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = v \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (2.3)$$

где $D_1 = \frac{D}{\rho g}$, $Q_1 = \frac{Q}{\rho g}$, $\chi_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, $p_1 = \frac{p_0}{\rho g}$, $\nabla^4 = \Delta_1^2$, $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, ρ – плотность жидкости, E, h, ρ_1, μ – модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки, Q – сжимающее усилие, ζ – возвышение поверхности пластина–жидкость. Здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.

3. Аналитическое решение задачи. Применяя для решения задачи (2.2)–(2.3) интегральное преобразование Фурье по горизонтальным координатам, получим следующее интегральное представление для прогиба пластинки – возвышения поверхности пластина-жидкость:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty r \tau^{-1} f^*(r) M(r) I(r, R, \gamma) dr \right), \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} k_0^{-1} \exp(irR \cos(\theta - \gamma)) d\theta, \quad (3.1)$$

где $\tau = ((1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4) M(r))^{1/2}$, $M(r) = rg(1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH$, $r = (m^2 + n^2)^{1/2}$, $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $m = r \cos \theta$, $n = r \sin \theta$, $x = R \cos \gamma$, $y = R \sin \gamma$, $k_0 = rv \cos \theta - \tau$, $f^*(r)$ – трансформанта Фурье функции $f(R)$.

Рассмотрим случай, когда сжимающие усилие удовлетворяют условию $Q_1 < Q_0$, где $Q_0 = q_1(r_4)$, r_4 – положительный корень уравнения $q_1'(r) = 0$, а q_1 имеет вид:

$$q_1 = r^{-2}((1 + D_1 r^4)q_2 + 4D_1 q_3 r^4)(q_2 + 2q_3)^{-1}$$

$$q_2 = \operatorname{th} rH + rH(\operatorname{ch} rH)^{-2}, \quad q_3 = (1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH) \operatorname{th} rH$$

Для $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ существенно меняется структура волнового движения. За источником возмущений происходит наложение волн [32].

Заменим путь интегрирования во втором интеграле (3.1) на контур L , идущий по действительной оси от $\theta = -\pi/2$ до $\theta = 3\pi/2$ с обходом полюсов $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ в комплексной плоскости θ по малым полуокружностям снизу и сверху соответственно, что обеспечивает выполнение условия излучения для прогиба ледяного покрова ζ и потенциала скорости течения жидкости ϕ . Здесь $\theta_{1,2} = \mp \arccos \tau_0, \tau_0 = (rv)^{-1} \tau$. Так как подынтегральное выражение в (3.1) на отрезках $[0, r_1]$ и $[r_2, \infty)$ не имеет особенностей, то, применяя последовательно метод стационарной фазы и интегрирование по частям, получим:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \left(\int_{r_1}^{r_2} r \tau^{-1} f^*(r) M(r) I(r, R, \gamma) dr \right) + O(R^{-1}) \quad (3.2)$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_L k^{-1} \exp(irR \cos(\theta - \gamma)) d\theta, \quad (3.3)$$

здесь r_1 и r_2 – вещественные корни уравнения $\tau'_0(r) = 1$.

Вычислим контурный интеграл (3.3) с учетом знаков выражения $\operatorname{Re}(i \cos(\theta - \gamma))$ на малых полуокружностях, обходящих точки $\theta = \theta_{1,2}$, и подставим в (3.2). Затем, применяя для вычисления интеграла (3.2) метод стационарной фазы, получим, что в зависимости от скорости перемещения нагрузки на границе раздела пластина-жидкость образуется от одной до трех систем изгибно-гравитационных волн с амплитудой затухания как $R^{-1/2}$:

$$\zeta = \begin{cases} O(R^{-1}) & \text{при } 0 < v < v_0 \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v_0 < v < v_1 \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v_1 < v < \sqrt{gH} \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v > \sqrt{gH}, \end{cases}$$

где $\zeta_k = R^{-1/2} \Psi_j(\alpha_k) \cos(R\Phi_j(\alpha_k, \gamma) - (-1)^k \pi/4)$, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$,

$$\Psi_j = -f_1(r)M(r)(v\tau\sqrt{1-\tau_0^2})^{-1}(2\pi|\Phi_j''|)^{-1/2}, \quad f_1(r) = f^*(r)\rho_1$$

$$\Phi_{1,2} = r(\tau_0 \cos \gamma \mp \sqrt{1-\tau_0^2} \sin \gamma),$$

$f^*(r) = (b/r)J_1(rb)$, J_1 – функция Бесселя, b – радиус круга, по площади которого равномерно распределена нагрузка, α_k – действительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \tau_2(r)$,

$$\tau_2 = (r\tau_0)' \sqrt{1-\tau_0^2} (1-\tau_0(r\tau_0)')^{-1}.$$

Здесь $v_0 = \tau(r_0)/r_0$, r_0 – единственный положительный корень уравнения $\tau'_0(r) = 0$, $v_1 = \tau_3(r_3)$, $\tau_3 = ((\tau/r)^2 - (\tau'(r\tau' - \tau)^2/r^3\tau''))^{1/2}$, r_3 – действительный корень уравнения $\tau'_3(r) = 0$, $r_3 < r_0$, где v_0 – минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны, v_1 – скорость, при которой совпадают фазовые скорости изгибно-гравитационной, упругой и гравитационной волн, \sqrt{gH} – максимальное значение фазовой скорости гравитационной волны.

В табл. 1 приведены значения критических скоростей v_0 и v_1 , при которых меняется характер волнового возмущения. Здесь и далее для количественной оценки численные расчеты проводились для следующих параметров ледяного покрова и жидкости: $E = 3 \times 10^9$ Н/м², $\mu = 0.34$, $\rho = 870$ кг/м³, $\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $h = 0.2$ м, $H = 100$ м, $b = 2$ м.

Таким образом:

$$\text{если } 0 < v < v_0, \quad \text{то } \zeta = O(R^{-1}), \quad (3.4)$$

$$\text{если } v_0 < v < v_1, \quad \text{то } \zeta = \zeta_3 + O(R^{-1}), \quad 0 \leq |\gamma| \leq \pi, \quad (3.5)$$

если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то при

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_1 + O(R^{-1}) & \text{при } 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_2 \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_1 \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_1 \leq |\gamma| \leq \pi \end{cases} \quad (3.6)$$

Таблица 1. Значения критических скоростей v_0 и v_1 для сил сжатия и растяжения

$Q = k\sqrt{D\rho g}$	v_0 (м/с)		v_1 (м/с)	
	$h = 0.2$ м	$h = 0.5$ м	$h = 0.2$ м	$h = 0.5$ м
$-1.5\sqrt{D\rho g}$	10.2	14.4	18.7	23.4
$-1.0\sqrt{D\rho g}$	9.6	13.6	17.4	22.6
$-0.5\sqrt{D\rho g}$	8.9	12.5	15.8	21.3
0	8.1	11.3	14.0	19.4
$0.5\sqrt{D\rho g}$	7.2	9.9	12.3	16.6
$1.0\sqrt{D\rho g}$	6.0	8.2	10.0	13.6
$1.5\sqrt{D\rho g}$	4.2	6.4	6.3	8.6

$$\text{если } v > \sqrt{gH}, \text{ то } \zeta = \begin{cases} O(R^{-1}) & \text{при } 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_2 \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3 \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_3 \leq |\gamma| \leq \pi \end{cases} \quad (3.7)$$

Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — значения угловых зон, в которых распространяются волны, находят-ся по следующим формулам:

$$\gamma_1 = \arctg \tau_2(\alpha_4), \quad \gamma_2 = \arctg \tau_2(\alpha_5), \quad \gamma_3 = \arctg((v^2/gH) - 1)^{-1/2},$$

α_4, α_5 — действительные корни уравнения $\tau_2'(r) = 0$, $\alpha_1 < \alpha_4 < \alpha_2 < \alpha_5 < \alpha_3$, $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_2$, при $\gamma = \gamma_1$, $\alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_3$, при $\gamma = \gamma_2$.

4. Анализ полученных результатов. На рис. 1–7 приведено распределение амплитуд изгибно-гравитационных волн. Шкала делений по осям координат x и y дана в метрах. Отклонение изолиний амплитуд волнового движения дано в миллиметрах.

При $v < v_0$ волны с амплитудой затухания как $R^{-1/2}$ не образуются — (3.4). Отклоне-ние не волнообразно и напоминает статический прогиб как при стационарной нагрузке.

При $v_0 < v < v_1$ образуется изгибно-гравитационная волна ζ_3 — (3.5). На рис. 1–2 представлено распределение амплитуды этой волны для сил растяжения и сжатия со-ответственно. Волны, распространяющиеся впереди источника, более короткие и их амплитуда меньше амплитуды более длинных волн, распространяющихся за источни-ком. При движении источника со скоростью близкой к v_0 максимум амплитуды нахо-дится по трассе движения (рис. 1). При увеличении скорости максимум смещается от трассы (рис. 2), и при $v = v_1$ максимальное значение амплитуды будет на лучах $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ и $\gamma = -\gamma_1 = -\gamma_2$. Увеличение сил растяжения увеличивает амплитуду волны ζ_3 , а увеличение сил сжатия и толщины ледяного покрова уменьшает ее.

При $v_1 < v < \sqrt{gH}$ образуются три системы изгибно-гравитационных волн — $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ (3.6). Волны ζ_3 распространяются впереди источника, а ζ_1 и ζ_2 за источником воз-мущений внутри угловых зон $-\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_1$ и $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_1$ соответственно. Упругая волна ζ_3 распространяется в угловой зоне $\gamma_2 \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_2$.

На рис. 3–5 приведены амплитуды поперечной волны ζ_1 (рис. 3), продольной ζ_2 (рис. 4) и упругой волны ζ_3 (рис. 5).

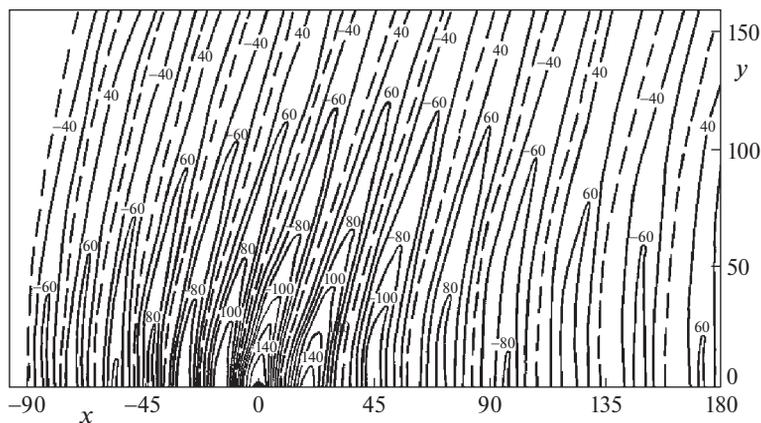


Рис. 1. Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3 для $v = 10$ м/с, ($v_0 < v < v_1$), $Q_1 = -\sqrt{D_1}$

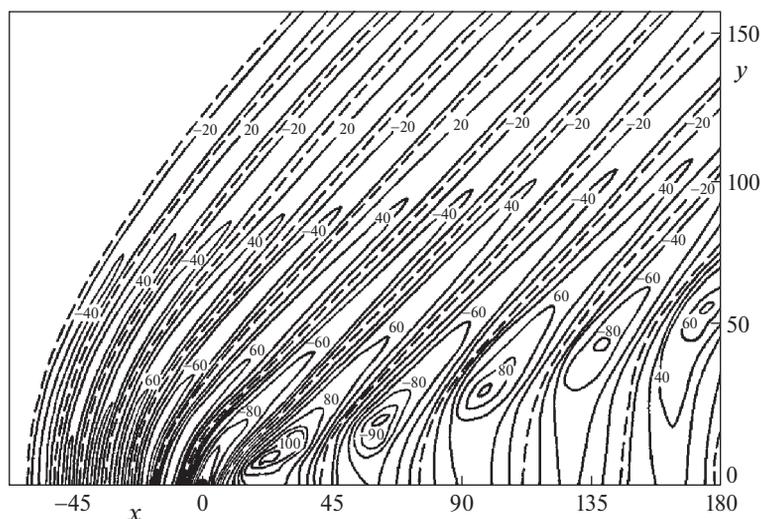


Рис. 2. Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3 для $v = 10$ м/с, ($v_0 < v < v_1$), $Q_1 = 0.5\sqrt{D_1}$

Амплитуда поперечной волны ζ_1 меньше амплитуды продольной ζ_2 и упругой ζ_3 волн. Силы сжатия и растяжения существенного влияния на амплитуды волн ζ_1 и ζ_2 не оказывают. При увеличении сжимающих усилий амплитуда упругой волны ζ_3 увеличивается и уменьшается при увеличении сил растяжения. Увеличение толщины ледяного покрова уменьшает амплитуды волн ζ_2 , ζ_3 и не оказывает существенного влияния на амплитуду волны ζ_1 . Наибольшее влияние на амплитуды волн оказывает скорость перемещения нагрузки. Увеличение скорости уменьшает амплитуды всех трех волн.

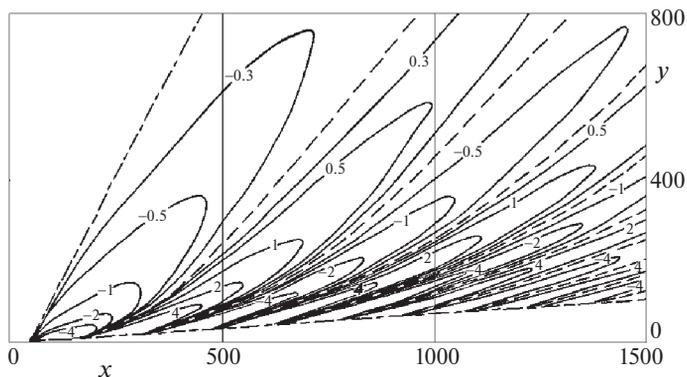


Рис. 6. Амплитуда продольной волны ζ_2 для $v = 35$ м/с, ($v > \sqrt{gH}$), $Q_1 = \sqrt{D_1}$

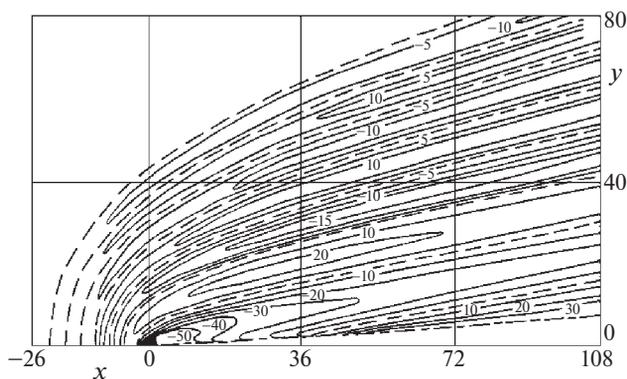


Рис. 7. Амплитуда упругой волны ζ_3 для $v = 35$ м/с, ($v > \sqrt{gH}$), $Q_1 = \sqrt{D_1}$

При $v > \sqrt{gH}$ образуются две системы волн – продольные ζ_2 и упругие ζ_3 – (3.7). На рис. 6 и 7 приведены амплитуды продольной ζ_2 и упругой ζ_3 волн соответственно.

Продольные волны ζ_2 распространяются за источником возмущений в угловой зоне $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3$, а упругие волны ζ_3 впереди источника возмущений в области $\gamma_3 \leq |\gamma| \leq \pi$. Увеличение сил сжатия, растяжения и толщины ледяного покрова на амплитуду волны ζ_2 существенного влияния не оказывает. Амплитуда упругой волны уменьшается при увеличении сил растяжения и толщины ледяного покрова. При увеличении сил сжатия амплитуда волны ζ_3 увеличивается. С увеличением скорости движения источника возмущений, амплитуды волн ζ_2 и ζ_3 , как и при $v_1 < v < \sqrt{gH}$, уменьшаются.

Заключение. Наибольший интерес для практических целей имеют критические скорости v_0 и v_1 . Транспортное средство при перемещении по ледяному покрову должно двигаться со скоростью либо меньше v_0 , либо больше v_1 , чтобы избежать разрушения льда. С другой стороны для разрушения ледяного покрова судно на воздушной подушке должно двигаться с критической скоростью v_0 или v_1 . Амплитуды образующихся

волн уменьшаются при движении со скоростью $v > v_1$. При движении с критической скоростью равной \sqrt{gH} происходит изменение характера волнового возмущения, но на амплитуды образующихся волн существенного влияния это не оказывает. Амплитуды образующихся волн уменьшаются при движении со скоростью $v > v_1$.

При уменьшении толщины ледяного покрова и глубины жидкости уменьшаются значения критических скоростей v_0 и v_1 . С уменьшением глубины жидкости уменьшается разница между значениями критических скоростей. Таким образом, для разрушения ледяного покрова судно на воздушной подушке может двигаться с меньшей критической скоростью.

Силы растяжения увеличивают значения критических скоростей v_0 и v_1 , а силы сжатия уменьшают. Однако, при $Q_1 > Q_0$ значение критической скорости v_1 увеличивается, а значение v_0 продолжает уменьшаться, стремясь к нулю при $Q_1 \rightarrow 2\sqrt{D_1}$.

Силы сжатия и растяжения оказывают существенное влияние на амплитуду упругой волны ζ_3 и не оказывают существенного влияния на амплитуды волн ζ_1 и ζ_2 , имеющих характер поперечной и продольной корабельных волн соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов И.К., Кобеко П.П., Шульман А.Р. Деформация ледяного покрова при движении грузов // ЖТФ. 1946. Т. 16. Вып. 3. С. 257–262.
2. Зуев В.А. Средства продления навигации на внутренних водных путях. Ленинград: Судостроение, 1986. 208 с.
3. Зуев В.А., Козин В.М. Использование судов на воздушной подушке для разрушения ледяного покрова. Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 1988. 128 с.
4. Жесткая В.Д., Козин В.М. Исследования возможностей разрушения ледяного покрова амфибийными судами на воздушной подушке резонансным методом. Владивосток: Дальнаука, 2003. 161 с.
5. Козин В.М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперимент. М.: Академия естествознания, 2007. 355 с.
6. Козин В.М., Земляк В.Л., Рогожникова Е.Г., Погорелова А.В. Влияние ледовых условий на деформированное состояние ледяного покрова от движения нагрузки. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020. 120 с.
7. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Ленинград: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
8. Доценко С.Ф. О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неустановившихся корабельных волнах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 5. С. 26–32.
9. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Влияние равномерно сжатой плавающей упругой пластинки на развитие трехмерных волн в однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 78–83.
10. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: МГИ, 2017. 360 с.
11. Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чужимов С.Д. и др. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. М.: Академия естествознания, 2008. 329 с.
12. Wilson J.T. Coupling between moving loads and flexural waves in floating ice sheets // US Army SIPRE. Rep. 34. 1955. P. 1–33.
13. Wilson J.T. Moving loads on floating ice sheets. // Project 2432. Univ. Michigan Res. Inst. 1958. 22 p.
14. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving Loads on Ice Plates. Springer Sci.&Business Media, 2012. 236 p.
15. Das S., Sahoo T., Meylan M.H. Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity // Proc. Roy. Soc. A. 2018. V. 474. Iss. 2209. 19 p.
DOI: 10.1098/rspa.2017.0223.

16. *Dinvay E., Kalisch H., Päräu E.I.* Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // *J. Fluid Mech.* 2019. V. 876. P. 122–149. DOI: 10.1017/jfm.2019.530
17. *Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A.* Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // *Appl. Ocean Res.* 2019. V. 86. P. 154–165.
18. *Ткачева Л.А.* Волновое движение в ледяном покрове с трещиной при равномерном движении нагрузки // *Изв. РАН. МЖГ.* 2019. № 1. С. 17–35. DOI: 10.1134/S0568528119010158
19. *Ткачева Л.А.* Движение нагрузки по ледяному покрову при наличии течения со сдвигом скорости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2023. № 2. С. 113–122. DOI: 10.31857/S0568528123700044
20. *Стурова И.В.* Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 4. С. 63–72. DOI: 10.31857/S0568528121040125
21. *Ильичев А.Т.* Эффективные длины волн огибающей на поверхности воды под ледяным покровом: малые амплитуды и умеренные глубины // *ТМФ.* 2021. Т. 208. № 3. С. 387–408. DOI: 10.4213/tmf10092
22. *Булатов В.В., Владимиров И.Ю.* Дальние поля на поверхности раздела бесконечно глубокого океана и ледяного покрова, возбуждаемые локализованным источником // *Изв. РАН. ФАО.* 2023. Т. 59. № 3. С. 346–351. DOI: 10.31857/S0002351523030033
23. *Козин В.М., Онищук А.В., Марьин Б.Н., Иванов Ю.Л. и др.* Ледоразрушающая способность изгибно-гравитационных волн от движения объектов. Владивосток: Дальнаука, 2005. 191 с.
24. *Стурова И.В.* Движение погруженной сферы в жидкости под ледяным покровом // *ПММ.* 2012. № 3. С. 406–417.
25. *Савин А.С., Савин А.А.* Пространственная задача о возмущениях ледяного покрова движущимся в жидкости диполем // *Изв. РАН. МЖГ.* 2015. №5. С.16–23.
26. *Ильичев А.Т., Савин А.С.* Процесс установления системы плоских волн на ледовом покрове над диполем, равномерно движущимся в толще идеальной жидкости // *ТМФ.* 2017. Т. 193. № 3. С. 455–465. DOI: 10.4213/tmf9356
27. *Козин В.М., Земляк В.Л., Баурин Н.О., Ипатов К.И.* Экспериментальные исследования влияния ледовых условий на эффективность разрушения ледяного покрова изгибно-гравитационными волнами от движения подводных судов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. 142 с.
28. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // *J. Hydrodyn.* 2019. V. 31(3). P. 562–569. DOI: 10.1007/s42241-018-0143-1
29. *Земляк В.Л., Козин В.М., Погорелова А.В., Васильев А.С.* Движение погруженного тела в приповерхностной водной среде, покрытой ледяным покровом. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020. 126 с.
30. *Ткачева Л.А.* Движение сферы под ледяным покровом при неравномерном сжатии // *ПМТФ.* 2022. Т. 63. № 2 (372). С. 12–24. DOI: 10.15372/PMTF20220202
31. *Маленко Ж.В., Ярошенко А.А.* Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений // *Морские интел. технол.* 2021. Т. 4(52). № 2. С. 157–161. DOI: 10.37220/MIT.2021.52.2.086
32. *Ярошенко А.А., Маленко Ж.В., Маркина Е.В. и др.* Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений в условиях равномерного сжатия // *Морские интел. технол.* 2022. № 4(58). С. 251–257. DOI: 10.37220/MIT.2022.58.4.050

Three-Dimensional Bending-Gravitational Waves in a Floating Ice Sheet from a Moving Source of Disturbances

Zh. V. Malenko^{a,b,#} and A. A. Yaroshenko^{a,b,##}

^aBranch of the Admiral F.F. Ushakov State Maritime University in Sevastopol, Sevastopol, Russia

^bSevastopol State University, Sevastopol, Russia

[#]e-mail: zhvla17@mail.ru

^{##}e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

The ice cover is modeled by a thin elastic isotropic plate floating on the surface of a liquid of finite depth. The source of disturbances moves along the surface of the plate. The values of critical velocities at which the character of the wave disturbance changes are obtained. The

angular zones in which the waves propagate are determined. The influence of the velocity of movement of the source of disturbances, the thickness of the ice plate, compression and stretching forces on the amplitudes of the waves formed is investigated.

Keywords: elastic plate, ice cover, bending-gravitational waves, critical speed

REFERENCES

1. *Ivanov I.K., Kobeko P.P., Shulman A.R.* Deformation of the ice cover during the movement of goods // J. Tech. Phys., 1946, vol. 16, no. 5, pp. 257–262. (in Russian)
2. *Zuev V.A.* Means of Prolonging Navigation on Inland Waterways. Leningrad: Sudostroenie, 1986. 208 p. (in Russian)
3. *Zuev V.A., Kozin V.M.* The Use of Hovercrafts for the Destruction of the Ice Sheet. Vladivostok: Far Eastern Univ. Pub., 1988. 128 p. (in Russian)
4. *Zhestkaya V.D., Kozin V.M.* Studies of the Possibilities of Destruction of the Ice Cover by Amphibious Hovercraft by the Resonant Method. Vladivostok: Dalnauka, 2003. 161 p. (in Russian)
5. *Kozin V.M.* Resonant Method of Ice Cover Destruction. Inventions and Experiment. Moscow: Acad. Natural Sci., 2007. 355 p. (in Russian)
6. *Kozin V.M., Zemlyak V.L., Rogozhnikova E.G., Pogorelova A.V.* The Influence of Ice Conditions on the Deformed State of the Ice Cover from the Movement of the Load. Novosibirsk: SB RAS Pub., 2020. 120 p. (in Russian)
7. *Heisin D.E.* Dynamics of the Ice Cover. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1967. 215 p. (in Russian)
8. *Dotsenko S.F.* Unsteady gravity-elastic and gravity-capillary ship waves // Fluid Dyn., 1978, vol. 13, no. 5, pp. 658–663. DOI: 10.1007/BF01050226
9. *Bukatov A.E., Yaroshenko A.A.* The influence of a uniformly compressed floating elastic plate on the development of three-dimensional waves in a homogeneous fluid // Fluid Dyn., 1984, vol. 19, no. 6, pp. 925–930. DOI: 10.1007/BF01411581
10. *Bukatov A.E.* Waves in the Sea with Floating Ice Cover. Sevastopol: Marine Hydrophys. Inst., 2017. 360 p. (in Russian)
11. *Kozin V.M., Zhestkaya V.D., Pogorelova A.V. et al.* Applied Problems of Ice Cover Dynamics. Moscow: Acad. Natural Sci., 2008. 329 p. (in Russian)
12. *Wilson J.T.* Coupling between moving loads and flexural waves in floating ice sheets // US Army SIPRE. Rep. 34, 1955, pp. 1–33.
13. *Wilson J.T.* Moving loads on floating ice sheets. // Project 2432, Univ. Michigan Res. Inst., 1958, 22 p.
14. *Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J.* Moving Loads on Ice Plates. Springer Sci.&Business Media, 2012. 236 p.
15. *Das S., Sahoo T., Meylan M.H.* Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity // Proc. Roy. Soc. A, 2018, vol. 474, iss. 2209, 19 p. DOI: 10.1098/rspa.2017.0223
16. *Dinvay E., Kalisch H., Părău E.I.* Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // J. Fluid Mech., 2019, vol. 876, pp. 122–149. DOI: 10.1017/jfm.2019.530
17. *Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A.* Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Appl. Ocean Res., 2019, vol. 86, pp. 154–165.
18. *Tkacheva L.A.* Wave motion in an ice sheet with crack under uniformly moving load // Fluid Dyn., 2019, vol. 54, no. 1, pp. 14–32. DOI: 10.1134/S0015462819010154
19. *Tkacheva L.A.* Motion of a load on an ice cover in the presence of a current with velocity shear // Fluid Dyn., 2023, vol. 58, no. 2, pp. 263–273. DOI: 10.1134/S0015462823700064
20. *Sturova I.V.* Motion of a load over an ice sheet with non-uniform compression // Fluid Dyn., 2021, vol. 56, no. 4, pp. 503–512. DOI: 10.1134/S0015462821040121
21. *Il'ichev A.T.* Effective wavelength of envelope waves on the water surface beneath an ice sheet: small amplitudes and moderate depths // Theor.&Math. Phys., 2021, vol. 208, no. 4, pp. 1182–1200. DOI: 10.1134/S0040577921090026

22. *Bulatov V.V., Vladimirov I.Yu.* Far fields at the interface between an infinitely deep ocean and ice generated by a localized source // *Izv. Atmos.&Oceanic Phys.*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 296–300. DOI: 10.1134/S0001433823030039
23. *Kozin V.M., Onishchuk A.V., Maryin B.N., Ivanov Yu.L. et al.* Ice-Breaking Ability of Bending-Gravitational Waves from the Motion of Objects. Vladivostok: Dalnauka, 2005. 191 p. (in Russian)
24. *Sturova I.V.* The motion of a submerged sphere in a liquid under an ice sheet // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 3, pp. 293–301. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.07.005
25. *Savin A.S., Savin A.A.* Three-dimensional problem of disturbing an ice cover by a dipole moving in fluid // *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, no. 5, pp. 613–620. DOI: 10.1134/S0015462815050026
26. *Ilyichev A.T., Savin A.S.* Process of establishing a plane-wave system on ice cover over a dipole moving uniformly in an ideal fluid column // *Theor.&Math. Phys.*, 2017, vol. 193, no. 3, pp. 1801–1810. DOI: 10.1134/S0040577917120066
27. *Kozin V.M., Zemlyak V.L., Baburin N.O., Ipatov K.I.* Experimental Studies of the Influence of Ice Conditions on the Effectiveness of the Destruction of the Ice Cover by Bending Gravity Waves from the Movement of Underwater Vessels. Novosibirsk: SB RAS Pub., 2017. 142 p. (in Russian)
28. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // *J. Hydrodyn.*, 2019, vol. 31(3), pp. 562–569. DOI: 10.1007/s42241-018-0143-1
29. *Zemlyak V.L., Kozin V.M., Pogorelova A.V., Vasiliev A.S.* Motion of a Submerged Body in a Near-Surface Water Environment Covered with Ice. Novosibirsk: SB RAS Pub., 2020. 126 p. (in Russian)
30. *Tkacheva L.A.* Motion of a sphere submerged in water under an ice cover with nonuniform compression // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2022, vol. 63, no. 2, pp. 187–198. DOI: 10.1134/S002189442202002X
31. *Malenko Zh.V., Yaroshenko A.A.* Bending-gravitational waves in the sea with ice cover from moving disturbances // *Marine Intel. Technol.*, 2021, vol. 4(52), no 2, pp. 157–161. (in Russian) DOI: 10.37220/MIT.2021.52.2.086
32. *Yaroshenko A.A., Malenko Zh.V., Markina E.V. et al.* Bending-gravitational waves in the sea with ice cover from moving disturbances under conditions of uniform compression // *Marine Intel. Technol.*, 2022, vol. 1, no. 4(58), pp. 251–257. (in Russian) DOI: 10.37220/MIT.2022.58.4.050