

УДК 517.977

**УПРАВЛЕНИЕ ПОДАВЛЕНИЕМ РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОВРЕМЕННЫМ ЕЕ РАСКРУЧИВАНИЕМ**© 2023 г. С. А. Васенин<sup>1,\*</sup>, С. А. Решмин<sup>1,\*\*</sup><sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия**\*e-mail: stepan\_vasenin@mail.ru**\*\*e-mail: reshmin@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 01.09.2023 г.

После доработки 01.10.2023 г.

Принята к публикации 10.10.2023 г.

Объектом исследования данной работы является двухмассовая управляемая механическая система, состоящая из несущего диска, вращающегося вокруг своей оси, закрепленной в пространстве, и несомого кольца, присоединенного к диску при помощи невесомых упругих элементов. Демпферов в системе нет. Процесс подавления радиальных колебаний рассматривается с позиции теории оптимального управления. На достаточно больших интервалах времени используется численный метод Ньютона для решения краевой задачи принципа максимума Понтрягина. Исследованы свойства фазовых траекторий системы в зависимости от начальных состояний диска и кольца и количества пружин в сложной модели упругого взаимодействия. Показано, как при некоторых начальных условиях и параметрах системы вследствие радиальности упругой силы и закона сохранения кинетического момента траектория центра масс кольца стремится к окружности. Указанная тенденция выхода на режим движения по окружности не является единой и зависит от количества пружин. Демонстрируется, что при малом количестве упругих элементов траектория кольца не принимает вид окружности, а происходит почти полное гашение радиальных колебаний. Установлено, что при рассматриваемых во время численного эксперимента параметрах системы управление является релейным с довольно большим количеством переключений. При этом происходит одновременное раскручивание всей системы.

*Ключевые слова:* релейное управление, принцип максимума, управляемое вращение, краевая задача, метод Ньютона, гашение колебаний

**DOI:** 10.31857/S0032823523060097, **EDN:** GYSVUO

**1. Введение.** Процессы подавления колебаний и раскрутки механических систем присутствуют во многих технических устройствах. Важность исследования данных явлений обусловлена большим количеством механических объектов, которые напрямую или косвенно связаны с разными модификациями процессов раскрутки и вращения. В работе рассматривается модель колеса, состоящая из диска и кольца, соединенных между собой невесомыми упругими пружинами. Ставится задача о подавлении радиальных упругих колебаний (имеется в виду изменение расстояния между осями вращения диска и кольца) за счет изменения угла кручения между диском и кольцом. Закон управления формируется на основе соотношений принципа максимума Понтрягина [1] в соответствующей задаче оптимального управления с некоторым интегральным функционалом. Таким образом, речь идет о минимизации в некотором

смысле амплитуды колебаний в течение всего процесса раскрутки (а не только в терминальный момент), связанной с энергией, закачиваемой в эту степень свободы. При численных экспериментах оказалось, что одновременно с этим удается обеспечить раскручивание системы до достаточно больших угловых скоростей. Для построения управления на большом интервале времени предлагается использовать метод Ньютона, часто применяющийся для решения соответствующей краевой задачи принципа максимума. В предыдущих работах [2, 3] предполагалось, что механическая система совершает движения при малых величинах отклонений центра масс кольца и модуля разности углов поворотов диска и кольца. В данном случае потенциальная энергия упругого взаимодействия была разложена в двумерный ряд Тейлора, что отражается на простоте полученных уравнений, описывающих движение двухмассовой системы. Отличием данной работы от предыдущих является рассмотрение более точной и сложной математической модели упругого взаимодействия при довольно больших колебаниях системы и разном количестве упругих элементов. Выбор численного метода Ньютона для решения краевой задачи принципа максимума Понтрягина обусловлен более простой реализацией на ЭВМ и быстрой сходимостью. Однако метод последовательных приближений [4, 5], использованный в предыдущих работах, также может быть успешно применен для решения задачи.

Установлено, что минимизация радиальных колебаний механической системы при выборе в качестве управления крутящего момента может быть проведена успешно. Однако в процессе раскрутки возрастает до довольно больших значений величина разности углов поворотов, что с физической точки зрения может привести к разрушению двухмассовой системы. Предполагается, что возможности прикладываемого к диску момента велики, так что в процессе управления угол крутильной деформации, т.е. разность углов вращения диска и кольца, может изменяться сколь угодно быстро в заданных пределах. Указанный угол кручения выбирается в качестве нового управления, которое гасит амплитуду радиальных колебаний. Выбором допустимого диапазона изменения управления (угла кручения) можно обеспечить дополнительно и требуемую раскрутку системы в целом.

Отметим, что существуют работы [6], численные методы расчета оптимального программного управления которых используют эволюционные алгоритмы, не основанные на решении краевой задачи принципа максимума. Решение краевой задачи принципа максимума Понтрягина проводилось в работах [7–16]. Приведена [17] задача граничного управления колебаниями двумерной пластины с целью полной остановки колебаний за конечное время. При этом на управляющие воздействия наложены ограничения на максимум абсолютной величины. Построение управления для механических систем как в данной задаче, у которых число степеней свободы превосходит размерность вектора обобщенных управляющих сил, было проведено в работе [18]. Рассматривается [19] возможный подход к осуществлению управления движением портального крана при перемещении груза. Предложено два различных метода отыскания управляющего ускорения, обеспечивающего гашение колебаний перемещаемого груза. Гашение колебаний нелинейного маятника проводилось в работе [20]. Получено [21] аналитическое оптимальное по энергии управление гармоническим осциллятором, причем задача рассматривалась на конечном интервале времени. Исследовалась [22] динамика механического изотропного стержневого упругого подвеса. Многомерные осцилляторы с нелинейным затуханием рассматривались в [23, 24].

**2. Описание механической системы и уравнения движения.** Рассматривается управляемая механическая система, состоящая из диска и кольца, соединенных между собой при помощи невесомых предварительно растянутых пружин, концы которых не заземлены шарнирно-неподвижными опорами (рис. 1). Радиус диска равен  $r_a$ . Радиус внутренней полости кольца равен  $r_b$ . Углы поворотов диска и кольца обозначены со-

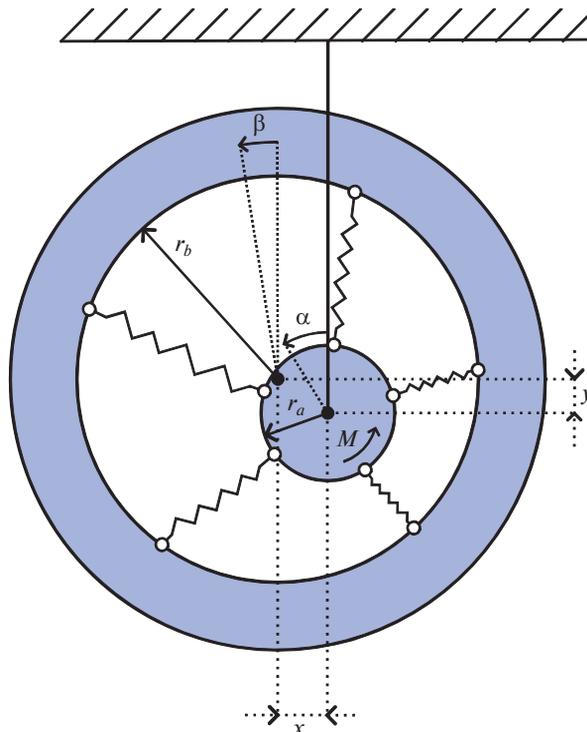


Рис. 1. Двухмассовая система.

ответственно через  $\alpha$  и  $\beta$ . Оси вращения параллельны, причем ось вращения диска и его центр масс зафиксированы в пространстве. Положение центра масс кольца характеризуется относительными координатами  $x$ ,  $y$  в прямоугольной системе координат в плоскости, которая перпендикулярна осям вращения. Таким образом, при  $x = 0$  и  $y = 0$  оси вращения совпадают.

Упругое взаимодействие будем моделировать системой, состоящей из  $N$  пружин жесткостью  $k$ , причем длина в свободном состоянии каждой из них равна  $l_0 < r_b - r_a$ . Соответствующая внутренняя энергия каждой натянутой пружины в недеформированной системе подсчитывается по формуле:

$$E_0 = \frac{k}{2}(r_b - r_a - l_0)^2 \quad (2.1)$$

Пусть теперь система деформировалась за счет смещения кольца  $b$  на  $x$  по горизонтали, на  $y$  по вертикали, а диск  $a$  совершил относительный поворот на угол  $\varphi = \alpha - \beta$ . Для  $i$ -й пружины запишем координаты конца, соединенного с диском:

$$x_{ai} = r_a \cos \gamma_i, \quad y_{ai} = r_a \sin \gamma_i; \quad \gamma_i = \frac{2\pi i}{N}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

и координаты конца, соединенного с кольцом:

$$x_{bi} = x + r_b \cos(\gamma_i - \varphi), \quad y_{bi} = y + r_b \sin(\gamma_i - \varphi); \quad i = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

Соответствующая энергия  $i$ -й пружины в деформированной системе подсчитывается по формуле:

$$E_i = \frac{k}{2} \left( \sqrt{(x_{bi} - x_{ai})^2 + (y_{bi} - y_{ai})^2} - l_0 \right)^2 \quad (2.4)$$

В результате запишем потенциальную энергию упругой деформации системы в виде:

$$\Pi_{\text{tire}} = \sum_{i=1}^N E_i - NE_0 \quad (2.5)$$

Учитывая выражение для кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2} [I_a \dot{\alpha}^2 + I_b \dot{\beta}^2 + m_b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)], \quad (2.6)$$

составим Лагранжиан:

$$L = \frac{1}{2} [I_a \dot{\alpha}^2 + I_b \dot{\beta}^2 + m_b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)] - \frac{k}{2} \sum_{i=1}^N (l_i - l_0)^2 + NE_0 \quad (2.7)$$

$$l_i = \sqrt{[r_b \cos(\gamma_i - \alpha + \beta) + x - r_a \cos \gamma_i]^2 + [r_b \sin(\gamma_i - \alpha + \beta) + y - r_a \sin \gamma_i]^2} \quad (2.8)$$

Докажем, что суммы, указанные ниже, имеют следующую особенность:

$$\sum_{i=1}^N \cos \gamma_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \sin \gamma_i = 0 \quad (2.9)$$

Рассмотрим сумму  $\sum_{i=1}^N e^{j\gamma_i}$ , где  $j$  – мнимая единица, которая представляет собой геометрическую прогрессию, сумма которой равна:

$$S_N = \frac{b_1(1 - q^N)}{1 - q} = \frac{e^{j\gamma_1}(e^{j2\pi} - 1)}{e^{j\gamma_1} - 1}, \quad (2.10)$$

где  $b_1 = \exp(j\gamma_1)$  – первый член,  $q = \exp(j\gamma_1)$  – знаменатель. Из полученной формулы (2.10) следует, что  $S_N = 0$ . Заменяя  $j$  на  $-j$ , аналогично доказываем равенство нулю суммы. Утверждение доказано.

Из выражений (2.9) можно получить аналогичными рассуждениями для  $\forall \varphi$  следующий результат:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \cos(\gamma_i - \varphi) = 0, \quad \sum_{i=1}^N \sin(\gamma_i - \varphi) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \sin(2\gamma_i - \varphi) = 0, \quad \sum_{i=1}^N \sin 2(\gamma_i - \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Производные для получения уравнения для  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = I_a \dot{\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = I_a \ddot{\alpha} \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} = - \sum_{i=1}^N k \left( 1 - \frac{l_0}{l_i} \right) \delta_i = -k \sum_{i=1}^N \delta_i + kl_0 \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{l_i} \\ \delta_i = (y_{bi} - y)(x_{bi} - x_{ai}) - (x_{bi} - x)(y_{bi} - y_{ai}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отметим, что в состоянии равновесия, когда  $x = y = \varphi = 0$ , выражение для  $\delta_i$  представляет собой векторное произведение двух коллинеарных векторов  $(y_{ai}, y_{bi})$  и  $(x_{ai}, x_{bi})$ . Поэтому в этом случае  $\delta_i = 0$ . Рассмотрим первую сумму в полученном выражении. Упростим данное выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \delta_i &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{r_b^2}{2} \sin 2(\gamma_i - \varphi) + r_b \sin(\gamma_i - \varphi) x - \frac{r_a r_b}{2} (-\sin \varphi + \sin(2\gamma_i - \varphi)) \right] - \\ &- \sum_{i=1}^N \left[ \frac{r_b^2}{2} \sin 2(\gamma_i - \varphi) + r_b \cos(\gamma_i - \varphi) y - \frac{r_a r_b}{2} (\sin \varphi + \sin(2\gamma_i - \varphi)) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N r_a r_b \sin \varphi = N r_a r_b \sin \varphi \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -k N r_a r_b \sin \varphi + k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{l_i} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Аналогично полученным выражениям для  $\alpha$  соотношения для  $\beta$  имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) = I_b \ddot{\beta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^N k \left( 1 - \frac{l_0}{l_i} \right) \delta_i = k N r_a r_b \sin \varphi - k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{l_i} \quad (2.14)$$

Производные для получения уравнения для  $x$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m_b \ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\sum_{i=1}^N k \left( 1 - \frac{l_0}{l_i} \right) (x_{bi} - x_{ai}) = -k N x + k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{x_{bi} - x_{ai}}{l_i} \quad (2.15)$$

Аналогично полученным выражениям для  $x$  соотношения для  $y$  имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m_b \ddot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -\sum_{i=1}^N k \left( 1 - \frac{l_0}{l_i} \right) (y_{bi} - y_{ai}) = -k N y + k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{y_{bi} - y_{ai}}{l_i} \quad (2.16)$$

Уравнения Лагранжа второго рода для описания движения механической системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I_a \ddot{\alpha} + k N r_a r_b \sin(\alpha - \beta) - k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{l_i} &= M \\ I_b \ddot{\beta} - k N r_a r_b \sin(\alpha - \beta) + k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{l_i} &= 0 \\ m_b \ddot{x} + k N x - k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{x_{bi} - x_{ai}}{l_i} = 0, \quad m_b \ddot{y} + k N y - k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{y_{bi} - y_{ai}}{l_i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

**3. Постановка задачи управления.** Предполагаем, что крутящий момент  $M(t)$  может быть достаточно большим. Поэтому в качестве нового управления выбираем угол кручения и считаем, что он ограничен:

$$u(t) = \varphi(t) = \alpha(t) - \beta(t); \quad 0 \leq u(t) \leq u_0, \quad (3.1)$$

где  $u_0$  — заданная постоянная, которая должна быть достаточно мала. Функция  $u(t)$  предполагается кусочно-непрерывной. Выберем интегральный функционал качества типа Лагранжа, соответствующий минимизации амплитуды радиальных колебаний системы в течение всего процесса:

$$J = \int_0^T (x^2 + y^2) dt \quad (3.2)$$

Так как функционал зависит только от  $x$ ,  $y$ , а управлением является разность углов поворотов диска и кольца, то последние два уравнения системы (2.17) можно рассматривать отдельно от первых двух. Введем новые переменные:  $v_x$  — скорость изменения координаты  $x$ ,  $v_y$  — скорость изменения координаты  $y$ . Перейдем к системе четырех уравнений первого порядка, описывающих двумерный осциллятор:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x, & \dot{v}_x &= -\frac{kNx}{m_b} + \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{x_{bi} - x_{ai}}{l_i} \\ \dot{y} &= v_y, & \dot{v}_y &= -\frac{kNy}{m_b} + \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{y_{bi} - y_{ai}}{l_i}\end{aligned}\quad (3.3)$$

Здесь в соответствии с (2.3), (2.8) зависимость правых частей от нового управления  $u$  достаточно сложная и нелинейная:

$$\begin{aligned}x_{bi} &= x + r_b \cos(\gamma_i - u), & y_{bi} &= y + r_b \sin(\gamma_i - u) \\ l_i &= \sqrt{(x_{bi} - x_{ai})^2 + (y_{bi} - y_{ai})^2}; & i &= 1, \dots, N,\end{aligned}$$

где величины  $x_{ai}$ ,  $y_{ai}$  не зависят от управления и заданы в (2.2). Системе (3.3) отвечают начальные условия:

$$x(0) = x_0, \quad v_x(0) = v_{x0}, \quad y(0) = y_0, \quad v_y(0) = v_{y0} \quad (3.4)$$

Сформулируем задачу оптимального управления на конечном заданном интервале времени  $t \in [0, T]$ .

*Задача.* За счет выбора допустимого управления  $u(t)$  требуется за время  $T$  перевести систему (3.3) из заданного начального состояния (3.4) в произвольное терминальное состояние и минимизировать при этом функционал (3.2), т.е. уменьшить, насколько это возможно, радиальные колебания в процессе управления.

Далее будут составлены соотношения принципа максимума для поставленной задачи, на основе которых будут найдены численно соответствующие законы управления. Их оптимальность математически строго не обосновывается, так как принцип максимума является только необходимым условием оптимальности. Однако, их эффективность проверена.

Кроме того, результаты численного моделирования, приведенные далее, подтверждают, что неотрицательность управления (см. (3.1)) способствует постепенному раскручиванию исходной системы (2.17) до достаточно больших значений угловых скоростей  $\dot{\beta}(T)$ . Если в процессе решения задачи у построенного управления появятся точки разрыва, то в них соответствующий момент  $M(t)$  окажется бесконечно большим. Данная проблема может быть успешно решена с помощью процедуры сглаживания [3].

**4. Краевая задача принципа максимума.** Введем вспомогательную переменную  $x_0$  и перейдем к функционалу типа Майера:

$$J = x_0(T), \quad \dot{x}_0 = f_0 = x^2 + y^2; \quad x_0(0) = 0 \quad (4.1)$$

Для составления соответствующей краевой задачи принципа максимума следует выполнить набор последовательных стандартных действий, а именно ввести сопряженные переменные, составить гамильтониан, выписать сопряженную систему, найти общий вид управления, максимизирующего гамильтониан в каждый момент времени, добавить начальные условия для основных переменных и граничные условия для сопряженных переменных на правом конце траектории (условия трансверсальности).

Введем соответствующие сопряженные переменные:  $p_0(t)$ ,  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$ ,  $p_4(t)$ , причем  $p_0(t) = \text{const} = -1$ . Запишем гамильтониан:

$$\begin{aligned}H = (p, f) &= -x^2 - y^2 + p_1 v_x + p_2 \left( \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{x_{bi} - x_{ai}}{l_i} - \frac{kNx}{m_b} \right) + \\ &+ p_3 v_y + p_4 \left( \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{y_{bi} - y_{ai}}{l_i} - \frac{kNy}{m_b} \right)\end{aligned}\quad (4.2)$$

Здесь в скалярном произведении  $p$  – вектор сопряженных переменных,  $f$  – вектор-функция, у которой компоненты с ненулевым индексом задают правую часть системы. Сопряженная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 2x + p_2 \frac{kN}{m_b} - p_2 \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{(y_{bi} - y_{ai})^2}{l_i^3} + p_4 \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{(x_{bi} - x_{ai})(y_{bi} - y_{ai})}{l_i^3} \\ \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 2y + p_4 \frac{kN}{m_b} + p_2 \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{(x_{bi} - x_{ai})(y_{bi} - y_{ai})}{l_i^3} - p_4 \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{(x_{bi} - x_{ai})^2}{l_i^3} \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial v_x} = -p_1, \quad \dot{p}_4 = -\frac{\partial H}{\partial v_y} = -p_3 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Граничные условия (условия трансверсальности) для системы (4.3) заданы на правом конце траектории:

$$p_1(T) = 0, \quad p_2(T) = 0, \quad p_3(T) = 0, \quad p_4(T) = 0 \quad (4.4)$$

Исследуемая система нелинейна по управлению  $u$ . Однако, при численных расчетах, представленных далее, максимальное значение гамильтониана в зависимости от управления достигалось только в граничных значениях управления. Это означает, что выражение для определения управления, доставляющего максимум гамильтониану при выбранных параметрах системы, можно записать следующим образом:

$$u = \arg \max_u H(t, x(t), p(t), u) = \begin{cases} 0, & H(t, x(t), p(t), 0) > H(t, x(t), p(t), u_0) \\ u_0, & H(t, x(t), p(t), 0) \leq H(t, x(t), p(t), u_0) \end{cases} \quad (4.5)$$

Дополнительная численная проверка отсутствия максимума гамильтониана при промежуточных значениях управления также выполнялась.

**5. Методика применения метода Ньютона.** Для построения оптимального управления или экстремалей на основе составленных соотношений принципа максимума (3.3), (3.4), (4.3)–(4.5) будем численно решать их с использованием метода Ньютона в комбинации с методом “пристрелки”.

Начальные значения сопряженных переменных считаются варьируемыми параметрами. Исходная система интегрируется совместно с сопряженной системой в прямом времени при управлении, максимизирующем гамильтониан в каждый момент времени. Цель – обеспечить выполнение условий трансверсальности на правом конце траектории. Задача рассматривается формально как задача решения системы нескольких уравнений, заданных неявно. Число уравнений равно числу варьируемых параметров. Для выбора варьируемых параметров на следующей итерации и обеспечения сходимости к искомому решению используется метод Ньютона:

$$\begin{aligned} z &= (p_1(0), \dots, p_n(0)), \quad F(z) = 0, \quad F = (F_1, \dots, F_n) \\ z^{k+1} &= z^k - W^{-1}F, \quad W = \frac{\partial F_i}{\partial z_j}; \quad i, j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $z$  – вектор начальных значений сопряженных переменных,  $F(z)$  – вектор-функция из условий трансверсальности на правом конце,  $W$  – матрица Якоби. Так как условия трансверсальности на правом конце явно не зависят от начальных значений сопряженных переменных, то для определения матрицы Якоби будем использовать выражение:

$$W = \frac{\partial F_i}{\partial z_j} \approx \frac{F_i(z_1, z_2, \dots, z_j + \Delta_j, \dots, z_n) - F_i(z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_n)}{\Delta_j} \quad (5.2)$$

Процесс итераций заканчивается, когда будут выполнены условия трансверсальности на правом конце.

**6. Численное построение экстремалей.** В данном разделе представлены результаты расчетов системы при раскручивании системы управлением, полученным из соотношений принципа максимума. Была проведена серия расчетов при разных количествах упругих элементов, соединяющих диск и кольцо. Рассмотрена динамика системы как при малых, так и при больших отклонениях.

*Расчет 1.* При расчете были использованы следующие параметры системы с ненулевой начальной угловой скоростью и ненулевым начальным отклонением:

$$\begin{aligned} m_a &= 1 \text{ кг}, & m_b &= 1 \text{ кг}, & r_a &= 0.621 \text{ м}, & r_b &= 0.644 \text{ м} \\ I_a &= 0.193 \text{ кг м}^2, & I_b &= 0.208 \text{ кг м}^2, & k &= 10 \frac{\text{Н}}{\text{м}}, & l_0 &= 0.012 \text{ м} \\ N &= 10, & T &= 80 \text{ с}, & u_0 &= 0.01 \text{ рад} \\ x(0) &= 0.002 \text{ м}, & v_x(0) &= -0.001 \frac{\text{м}}{\text{с}}, & y(0) &= 0.002 \text{ м}, & v_y(0) &= 0.001 \frac{\text{м}}{\text{с}} \end{aligned}$$

Численным методом Ньютона было получено управление, успешно уменьшающее амплитуду радиальных колебаний механической системы. На рис. 2 представлены результаты численного моделирования. Обнаружено, что воздействие оптимального управления на механическую систему имеет приблизительно периодический характер с примерным периодом  $\tau = 0.36$  с. Сопряженные переменные  $p_1, p_2, p_3, p_4$  сначала колеблются с убывающей амплитудой, а потом, когда колебания полностью пропадают, принимают нулевое терминальное значение. В конце процесса раскручивания угол и угловая скорость кольца приняли приблизительно следующие значения:

$\beta = 1596$  рад,  $\dot{\beta} = 40 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Относительное изменение значения гамильтониана в течение процесса движения составляет 0.00008%, что свидетельствует о правильности и точности проделанных вычислений.

*Расчет 2.* При расчете были использованы следующие параметры системы с ненулевой начальной угловой скоростью и ненулевым начальным отклонением:

$$\begin{aligned} m_a &= 1 \text{ кг}, & m_b &= 1 \text{ кг}, & r_a &= 0.055 \text{ м}, & r_b &= 0.21 \text{ м} \\ I_a &= 0.0015 \text{ кг м}^2, & I_b &= 0.0220 \text{ кг м}^2, & k &= 10 \frac{\text{Н}}{\text{м}}, & l_0 &= 0.1 \text{ м} \\ N &= 3, & T &= 135 \text{ с}, & u_0 &= 0.1 \text{ рад} \\ x(0) &= 0.1 \text{ м}, & v_x(0) &= -0.1 \frac{\text{м}}{\text{с}}, & y(0) &= 0.1 \text{ м}, & v_y(0) &= 0.1 \frac{\text{м}}{\text{с}} \end{aligned}$$

Численным методом Ньютона было получено управление, успешно уменьшающее амплитуду радиальных колебаний механической системы. На рис. 3 представлены результаты численного моделирования. На графике для оптимального управления демонстрируется нетривиальный алгоритм переключения. Сложный характер поведения в течение всего процесса движения, следующий из расхождения скоростей убывания амплитуд колебаний  $x, v_x, y, v_y$ , наблюдается и для сопряженных переменных  $p_1, p_2, p_3, p_4$ . В конце процесса раскручивания угол и угловая скорость кольца приняли приблизительно следующие значения:  $\beta = 2673$  рад,  $\dot{\beta} = 38 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Относительное изменение значения гамильтониана в течение процесса движения составляет 0.0001%, что свидетельствует о правильности и точности проделанных вычислений.

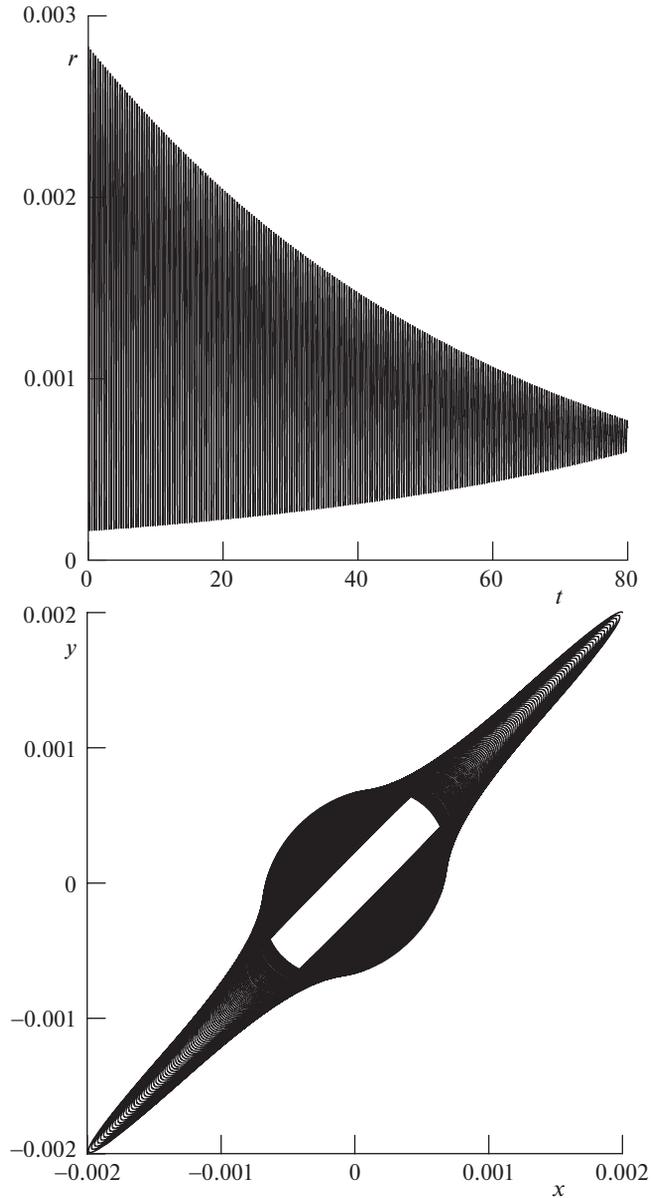


Рис. 2. Результаты численного моделирования расчета 1 (малые колебания, большое количество пружин).

Расчет 3. При расчете были использованы следующие параметры системы с ненулевой начальной угловой скоростью и ненулевым начальным отклонением:

$$m_a = 1 \text{ кг}, \quad m_b = 1 \text{ кг}, \quad r_a = 0.055 \text{ м}, \quad r_b = 0.21 \text{ м}$$

$$I_a = 0.0015 \text{ кг м}^2, \quad I_b = 0.0220 \text{ кг м}^2, \quad k = 10 \frac{\text{Н}}{\text{м}}, \quad l_0 = 0.1 \text{ м}$$

$$N = 2, \quad T = 45 \text{ с}, \quad u_0 = 0.1 \text{ рад}$$

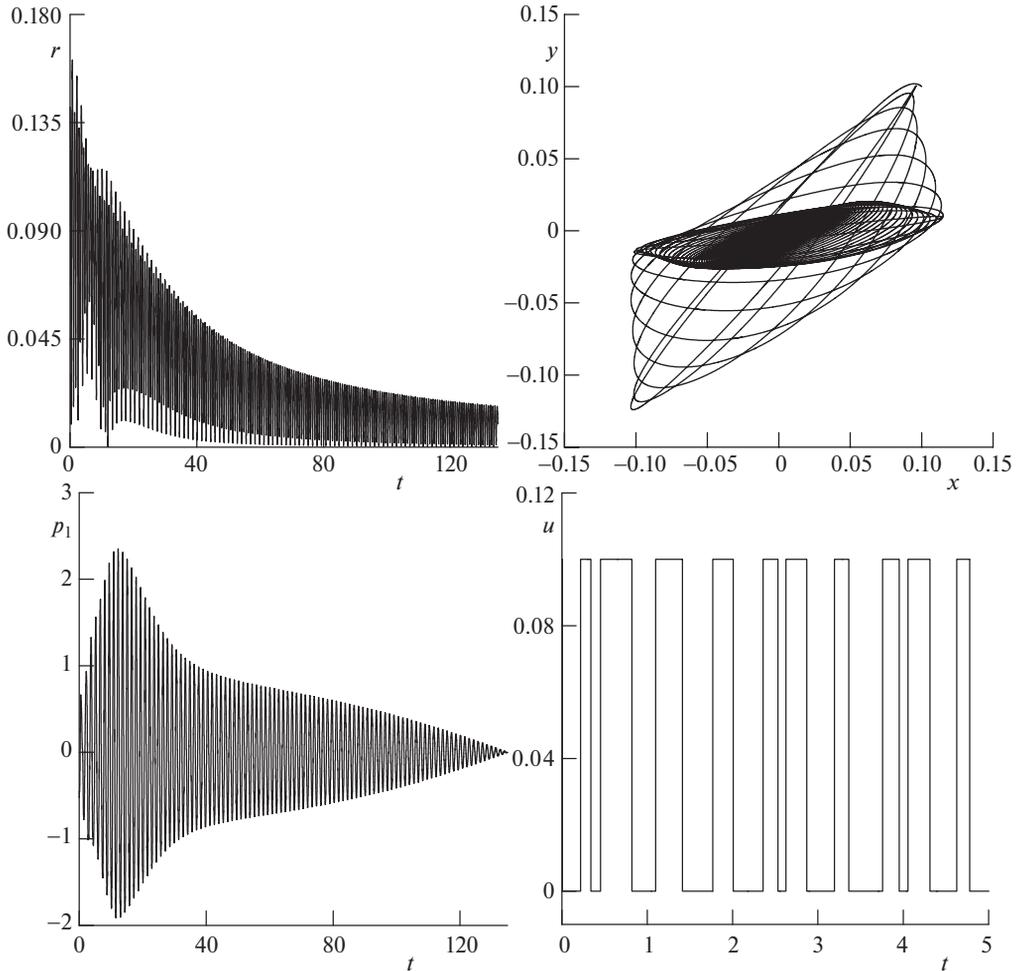


Рис. 3. Результаты численного моделирования расчета 2 (конечные колебания, малое количество пружин).

$$x(0) = 0.1 \text{ м}, \quad v_x(0) = -0.1 \frac{\text{М}}{\text{с}}, \quad y(0) = 0.1 \text{ м}, \quad v_y(0) = 0.1 \frac{\text{М}}{\text{с}}$$

Численным методом Ньютона было получено управление, успешно уменьшающее амплитуду радиальных колебаний механической системы. На рис. 4 представлены результаты численного моделирования. Установлено, что, в отличие от второго расчета, оптимальное управление стремится к периодической форме. Сопряженные переменные  $p_1, p_2, p_3, p_4$  сначала колеблются с убывающей амплитудой, а потом, когда колебания полностью пропадают, принимают нулевое терминальное значение. В конце процесса раскручивания угол и угловая скорость кольца приняли приблизительно следующие значения:  $\beta = 259$  рад,  $\dot{\beta} = 10$  рад/с. Относительное изменение значения гамильтониана в течение процесса движения составляет 0.00005%, что свидетельствует о правильности и точности проделанных вычислений.

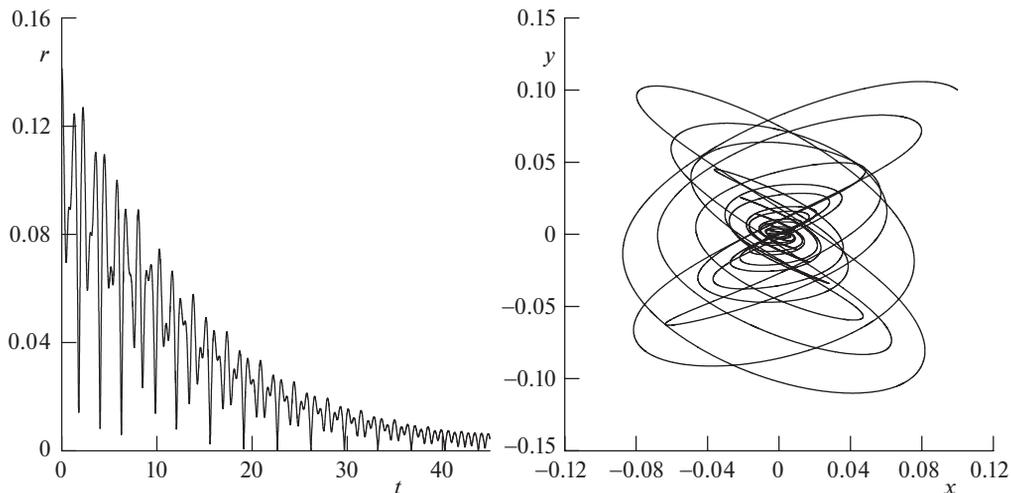


Рис. 4. Результаты численного моделирования расчета 3 (конечные колебания, малое количество пружин).

**Заключение.** В работе рассмотрена задача об оптимальном гашении радиальных колебаний в упругой двухмассовой системе, состоящей из диска и кольца, соединенных пружинами, при ограничениях на управляющее воздействие (угол кручения). Такая задача сводится к управлению колебаниями соответствующего двумерного осциллятора. Оказалось, что закон изменения угла кручения, полученный из соотношений принципа максимума, при выбранных параметрах системы имеет релейный вид с большим количеством переключений. При этом также продемонстрировано, что одновременно может возникать режим раскрутки механической системы, причем как при малом, так и при достаточно большом количестве пружин. Показано, что с увеличением количества пружин в механической системе при неизменности остальных параметров возрастает время гашения колебаний, а в некоторых случаях траектория центра масс кольца стремится к окружности. Стремление траектории центра масс кольца к окружности при достаточно большом количестве упругих элементов следует из радиальности упругой силы. Отметим, что поведение механической системы при малых колебаниях совпало с поведением системы в упрощенной математической модели упругого взаимодействия в работах [2, 3], что показывает правильность проделанного исследования. Планируется использовать данную математическую модель для анализа раскручивания системы при контакте кольца с поверхностью, наличием трения и внутреннего демпфирования. Результаты будут применяться для исследования нежелательного эффекта потери силы тяги транспортного средства во время интенсивного старта [25].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-11-00128), <https://rscf.ru/project/23-11-00128/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
2. Решмин С.А., Васенин С.А. Применение метода последовательных приближений при решении краевых задач принципа максимума на примере задачи управления раскручиванием двухмассовой системы // Modern Europ. Res. 2022. № 3 (Т. 1). С. 186–196.

3. *Васенин С.А., Решмин С.А.* Оптимальное подавление колебаний в задаче раскручивания двухмассовой системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 6. С. 67–80.
4. *Крылов И.А., Черноусько Ф.Л.* О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВММФ. 1962. Т. 2. № 6. С. 1132–1139.
5. *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.
6. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю., Рындин Д.А.* Решение задачи оптимального управления группой роботов эволюционными алгоритмами // Информ. и матем. технол. в науке и управл. 2017. № 3 (7). С. 109–121.
7. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление движением двухмассовой системы // Докл. РАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
8. *Левский М.В.* Оптимальное управление кинетическим моментом во время пространственного разворота твердого тела (космического аппарата) // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 1. С. 115–140.
9. *Шматков А.М.* Периодические решения задачи оптимального управления поворотом твердого тела с помощью внутренней массы // Вестн. МГУ. Сер. I: Математика. Механика. 2020. № 3. С. 63–67.
10. *Акуленко Л.Д., Костин Г.В.* Оптимальное по быстродействию управление в системе третьего порядка с несимметричными ограничениями // Докл. РАН. 2000. Т. 372. № 2. С. 169–173.
11. *Стрелкова Н.А.* Об управлении одной системой второго порядка в сопротивляющейся среде // Вестн. Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2015. № 3 (30). С. 46–51.
12. *Григоренко Н.Л., Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В., Клименкова А.Д.* Модель конкуренции Лотки–Вольтерры с немонотонной функцией терапии для нахождения оптимальных стратегий лечения раковых заболеваний крови // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 79–98.
13. *Глазков Т.В., Решмин С.А.* Оптимальное раскручивание колесного диска в составе двухмассовой модели // Инж. ж.: Наука и инновации. 2022. № 5. С. 45–51.
14. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальный по быстродействию синтез управления нелинейным маятником // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 1. С. 13–22.
15. *Шматков А.М.* Влияние габаритов управляемого устройства на оптимальный по быстродействию поворот с помощью подвижной внутренней массы // Докл. РАН. 2019. Т. 486. № 3. С. 292–296.
16. *Розенблат Г.М.* Об оптимальном повороте твердого тела при помощи внутренних сил // Докл. РАН. 2022. Т. 505. № 1. С. 92–99.
17. *Романов И.В., Шамаев А.С.* Гашение колебаний тонкой пластины ограниченным воздействием, приложенным к границе // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 64–74.
18. *Ананьевский И.М., Анохин Н.В.* Управление пространственным движением многозвенного перевернутого маятника с помощью момента, приложенного к первому звену // ПММ. 2014. Т. 78. № 6. С. 755–765.
19. *Шугайло Т.С.* Управление движением козлового крана с грузом заданием ускорения // Вестн. С.-Петербургского ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7. № 1. С. 154–164.
20. *Решмин С.А.* Поиск главного бифуркационного значения максимального управляющего момента в задаче синтеза оптимального управления маятником // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 2. С. 5–20.
21. *Галеев А.А., Лысенко П.В.* Оптимальное по энергии управление гармоническим осциллятором // АиТ. 2019. № 1. С. 21–37.
22. *Привалов Е.А., Жбанов Ю.К.* Стержневая конструкция упругого подвеса инертной массы // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 5. С. 19–28.
23. *Журавлев В.Ф.* Двумерный осциллятор Ван дер Поля с внешним управлением // Нелин. динам. 2016. Т. 12. № 2. С. 211–222.
24. *Журавлев В.Ф.* Пространственный осциллятор Ван дер Поля. Технические приложения // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 1. С. 158–164.
25. *Решмин С.А.* Качественный анализ нежелательного эффекта потери силы тяги транспортного средства во время интенсивного старта // Докл. РАН. 2019. Т. 484. № 3. С. 289–293.

## Control of Suppression of Radial Vibrations of a Two-mass System with its Simultaneous Spinning-up

S. A. Vasenin<sup>a,#</sup> and S. A. Reshmin<sup>a,##</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: stepan\_vasenin@mail.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: reshmin@ipmnet.ru*

The object of research in this work is a two-mass controlled mechanical system consisting of a carrier disk rotating about its axis, fixed in space, and a carried ring connected to the disk by means of weightless elastic elements. There are no dampers in the system. The process of suppression of radial oscillations is considered from the perspective of the theory of optimal control. On sufficiently large time intervals, Newton's numerical method is used to solve the boundary value problem of the Pontryagin's maximum principle. The properties of phase trajectories of the system are studied depending on the initial states of the disk and ring and the number of springs in a complex model of elastic interaction. It is shown how, under certain initial conditions and parameters of the system, due to the radiality of the elastic force and the law of conservation of angular momentum, the trajectory of the center of mass of the ring tends to a circle. The specified tendency to enter the circular motion mode is not uniform and depends on the number of springs. It is shown that with a small number of elastic elements, the trajectory of the ring does not take the form of a circle, but almost complete damping of radial vibrations occurs. It has been established that with the parameters of the system considered during the numerical experiment, the control is relay with a fairly large number of switchings. In this case, the entire system is simultaneously spinning-up.

*Keywords:* relay control, maximum principle, controlled rotation, boundary value problem, Newton's method, vibration damping

### REFERENCES

1. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.: Gordon&Breach, 1986. xxiv+360 p.
2. *Reshmin S.A., Vasenin S.A.* Application of the method of successive approximations in solving the boundary problems of the maximum principle on the example of the problem of controlling spin-up of the two-mass system // *Modern Europ. Res.*, 2022, no. 3 (vol. 1), pp. 186–196. (in Russian)
3. *Vasenin S.A., Reshmin S.A.* Optimal suppression of oscillations in the problem of unwinding a two-mass system // *J. Comput. Sci. Int.*, 2023, vol. 62, no. 6.
4. *Krylov I.A., Chernous'ko F.L.* On a method of successive approximations for the solution of problems of optimal control // *USSR Comput. Math.&Math. Phys.*, 1963, vol. 2, no. 6, pp. 1371–1382.
5. *Chernous'ko F.L., Banichuk N.V.* Variational Problems in Mechanics and Control. Moscow: Nauka, 1973. 238 p. (in Russian)
6. *Diveev A.I., Shmalko E.Yu., Ryndin D.A.* Solution of optimal control problem for group of robots by evolutionary algorithms // *Inform.&Math. Technol. in Sci.&Manag.*, 2017, no. 3, pp. 109–121. (in Russian)
7. *Chernous'ko F.L.* Optimal control of the motion of a two-mass system // *Dokl. Math.*, 2018, vol. 97, no. 5, pp. 295–299.
8. *Levskii M.V.* Optimal control of kinetic moment during the spatial rotation of a rigid body (spacecraft) // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, pp. 92–111.
9. *Shmatkov A.M.* Periodic solutions to the optimal control problem of rotation of a rigid body using internal mass // *MSU Mech. Bull.*, 2020, vol. 75, no. 3, pp. 75–79.
10. *Akulenko L.D., Kostin G.V.* Time-optimal control in a third-order system with asymmetric constraints // *Dokl. Math.*, 2000, vol. 61, no. 3, pp. 454–458.
11. *Strelkova N.A.* On the control of one second-order system in a resisting environment // *Bull. Perm Univ. Math. Mech.*, 2015, no. 3, pp. 46–51. (in Russian)

12. *Grigorenko N.L., Khailov E.N., Grigorieva E.V., Klimenkova A.D.* Lotka-Volterra competition model with a nonmonotone therapy function for finding optimal strategies in the treatment of blood cancers // Proc. Steklov Inst. of Mathematics, 2022, vol. 317, pp. 71–89.
13. *Glazkov T.V., Reshmin S.A.* Optimal unwinding of the wheel as part of a two-mass model // Engng. J.: Sci.&Innov., 2022, no. 5, pp. 45–51. (in Russian)
14. *Reshmin S.A., Chernous'ko F.L.* A time-optimal control synthesis for a nonlinear pendulum // J. Comput. Sci. Int., 2007, vol. 46, pp. 9–18.
15. *Shmatkov A.M.* Influence of the size of a controllable device on time-optimal rotation generated by a moving internal mass // Dokl. Math., 2019, vol. 99, pp. 325–328.
16. *Rozenblat G.M.* On optimal rotation of a rigid body by applying internal forces // Dokl. Math., 2022, vol. 106, pp. 291–297.
17. *Romanov I.V., Shamaev A.S.* Suppression of oscillations of thin plate by bounded control acting to the boundary // J. Comput. Sci. Int., 2020, vol. 59, pp. 371–380.
18. *Anan'evskii I.M., Anokhin N.V.* Control of the spatial motion of a multilink inverted pendulum using a torque applied to the first link // JAMM, 2014, vol. 78, no. 6, pp. 543–550.
19. *Shugailo T.S.* Motion control of a loaded gantry crane by prescribing its acceleration // Vestn. St. Petersburg Univ. Math., 2020, vol. 53, pp. 100–107.
20. *Reshmin S.A.* Finding the principal bifurcation value of the maximum control torque in the problem of optimal control synthesis for a pendulum // J. Comput. Sci. Int., 2008, vol. 47, pp. 163–178.
21. *Galyaev A.A., Lysenko P.V.* Energy-optimal control of harmonic oscillator // Autom.&Remote Control, 2019, vol. 80, pp. 16–29.
22. *Privalov E.A., Zhanov Yu.K.* Rod construction of an isotropic elastic suspension of inertial mass // Mech. Solids, 2018, vol. 53, pp. 492–500.
23. *Zhuravlev V.F.* Van der Pol's controlled 2D oscillator // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2016, vol. 12, no. 2, pp. 211–222. (in Russian)
24. *Zhuravlev V.F.* Van der Pol oscillator. Technical applications // Mech. Solids, 2020, vol. 55, pp. 132–137.
25. *Reshmin S.A.* Qualitative analysis of the undesirable effect of loss of traction force of a vehicle during an intense start // Dokl. Phys., 2019, vol. 64, no. 1, pp. 30–33.