УДК 517.977.58

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВОРОНКАХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ, ИЗМЕНЯЕМЫХ НА НЕСКОЛЬКИХ МАЛЫХ ПРОМЕЖУТКАХ ВРЕМЕНИ

© 2023 г. В. Н. Ушаков[1,*], А. А. Ершов[1,], А. В. Ушаков[1,***]**

[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

**e-mail: ushak@imm.uran.ru*

***e-mail: ale10919@yandex.ru*

****e-mail: aushakov.pk@gmail.com*

Поступила в редакцию 14.11.2022 г.
После доработки 19.06.2023 г.
Принята к публикации 15.07.2023 г.

Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени, динамика которой претерпевает существенные изменения на нескольких малых участках из заданного промежутка времени. Изучается степень изменения множеств достижимости и интегральных воронок рассматриваемой системы при ее варьировании на этих участках. Соответствующие изменения оцениваются в хаусдорфовой метрике.

Ключевые слова: управляемая система, дифференциальное включение, множество достижимости, интегральная воронка, переменная структура, вариация системы, хаусдорфово расстояние

DOI: 10.31857/S0032823523050156, **EDN:** UZKZIZ

1. Введение. Статья посвящена одной из задач теории управления [1, 2] – задаче управления интегральными воронками управляемых систем, зависящих от параметра. Рассматриваемую задачу можно рассматривать как частный случай задачи управления множеством достижимости динамической системы с изменяющейся матрицей (посредством управления аппроксимирующим эллипсоидом), которая была рассмотрена в статье [3]. Управляемые системы рассматриваются на конечном промежутке времени и конечномерном евклидовом пространстве. Ряд задач управления (в общей постановке) и, в частности, задачи о сближении управляемых систем с целевыми множествами (с фиксированным моментом окончания) естественным образом связаны с задачами выделения интегральных воронок и множеств разрешимости управляемых систем в пространстве позиций систем. Эти задачи дуальны в том смысле, что множество разрешимости (множество управляемости) исходной управляемой системы есть интегральная воронка этой системы, записанной в так называемом обратном времени. Так же, как и в теории управления (в задачах управления без помех), в теории дифференциальных игр [2, 4] многие задачи могут быть сформулированы как задачи о сближении конфликтно управляемой системы с целевым множеством. В некоторых из них при их решении возникает необходимость выделения множеств разрешимости (т.е. необходимость аналитического описания множеств). Однако это описание возможно лишь в достаточно простых задачах. В связи с этим актуальны вопросы, относящиеся к разработке алгоритмов приближенного конструирования этих множеств. Опыт решения задач подсказывает, что один из эффективных алгоритмов приближенного конструирования множеств разрешимости в задачах о сближении должен включать в себя переход от исходной управляемой системы к ее представлению в терминах обратного времени. Это дает возможность записать аппроксимирующие конструкции (т.е. аппроксимации множеств разрешимости) исключительно на языке множеств достижимости управляемой системы, записанной в обратном времени (см., напр., [5–7]). В результате множество достижимости (как понятие) становится ключевым компонентом при приближенном конструировании множеств разрешимости задач о сближении. Однако привлечение множеств достижимости в разрешающие конструкции еще недостаточно для окончательного решения задачи о сближении, поскольку они не могут быть (точно) вычислены. В связи с этим возникают принципиальные вопросы, относящиеся к разработке методов и алгоритмов приближенного вычисления множеств достижимости. Они многочисленны и некоторые их них соприкасаются с такими областями математики, как выпуклый анализ, негладкий анализ и вычислительная геометрия. Очевидно, что нет универсальных методов и алгоритмов конструирования приближенных решений задач управления: они должны отражать специфику отдельных классов управляемых систем и даже отдельных конкретных систем. Укажем некоторые исследования, которые посвящены изучению упомянутых вопросов. Так, созданы содержательная теория и алгоритмы приближенного вычисления и оценок множеств достижимости и интегральных воронок [8–12], основанные на технологии эллипсоидальных оценок [13, 14]. Использование этой технологии оказалось весьма эффективным при оценке множеств достижимости и интегральных воронок линейных управляемых систем. Эта технология получила распространение на некоторые билинейные и нелинейные управляемые системы [15, 16]. При рассмотрении нелинейных многомерных управляемых систем и дифференциальных включений перспективны, на наш взгляд, пиксельные методы приближенного вычисления множеств достижимости, а также методы, основанные на аппроксимации множеств достижимости управляемых систем полиэдрами [17–19]. Применение пиксельных методов (см., напр., [20]) в обсуждаемых здесь задачах очевидным образом удобно, поскольку просты пиксельные представления множеств и реализации теоретико-множественных операций (объединения, пересечения и т.д.). Заметим, что пиксельная дискретизация фазового пространства управляемой системы должна быть дополнена той или иной дискретизацией вектограмм скоростей системы или дискретизацией вектограмм скоростей соответствующего дифференциального включения. К этой тематике дискретизации множеств достижимости относятся весьма важные работы [21, 22].

Пример в разд. 5 подтверждает, что тематика настоящей статьи близка к работам [23–27], в которых рассматриваются управляемые системы с параметром, а также колебательные управляемые системы.

2. Множества достижимости и интегральные воронки управляемых систем с переменной структурой. На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$ заданы управляемые системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u); \quad u \in P^f \tag{2.1}$$

$$\frac{dx}{dt} = g(t,x,u); \quad u \in P^g, \tag{2.2}$$

здесь $x \in \mathbb{R}^m$ – фазовый вектор системы, $P^f \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^r)$, $P^g \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^r)$ – ограничения на управления u; $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^k)$, $k \in \mathbb{N}$ – пространство компактов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ с хаусдорфовой метрикой $d(X_*, X^*) = \max(h(X_*, X^*),\ h(X^*, X_*))$, где $h(X_*, X^*) = \max\limits_{x_* \in X_*} \rho(x_*, X^*)$, $\rho(x_*, X^*) = \min\limits_{x^* \in X^*} \|x_* - x^*\|$, $\|h\|$ – норма вектора h в $\mathbb{R}^k$.

Предполагается, что системы (2.1) и (2.2) стеснены следующими условиями.

А. Вектор-функции $f(t,x,u)$ и $g(t,x,u)$ определены и непрерывны на $[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m\times P^f$ и $[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m\times P^g$ соответственно и для любой ограниченной и замкнутой области $D\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$ найдутся числа L^f и L^g из $(0,\infty)$, функции $\omega^f(\delta)$ и $\omega^g(\delta)$, $\delta\in(0,\infty)$ ($\omega^f(\delta)\downarrow 0$ и $\omega^g(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$), удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{gathered}\|f(t,x_*,u)-f(t,x^*,u)\|\le L^f\|x_*-x^*\|\\ \|g(t,x_*,u)-g(t,x^*,u)\|\le L^g\|x_*-x^*\|,\end{gathered}\tag{2.3}$$

(t,x_*,u) и (t,x^*,u) из $D\times P^f$ или $D\times P^g$ соответственно,

$$\begin{gathered}\|f(t_*,x_*,u)-f(t^*,x^*,u)\|\le\omega^f(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|)\\ \|g(t_*,x_*,u)-g(t^*,x^*,u)\|\le\omega^g(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|),\end{gathered}\tag{2.4}$$

(t_*,x_*) и (t^*,x^*) из D, $u\in P^f$ или $u\in P^g$ соответственно.

Б. Найдутся такие γ^f и γ^g из $(0,\infty)$, что

$$\|f(t,x,u)\|\le\gamma^f(1+\|x\|),\quad \|g(t,x,u)\|\le\gamma^g(1+\|x\|),$$

$(t,x)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$, $u\in P^f$ или $u\in P^g$ соответственно.

Введем многозначные отображения

$$(t,x)\mapsto F(t,x)=\operatorname{co}F_*(t,x)\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^m),\quad (t,x)\mapsto G(t,x)=\operatorname{co}G_*(t,x)\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^m),$$

здесь $F_*(t,x)=\{f(t,x,u):u\in P^f\}$, $G_*(t,x)=\{g(t,x,u):u\in P^g\}$, $(t,x)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$.

Отображения $(t,x)\mapsto F(t,x)$ и $(t,x)\mapsto G(t,x)$ удовлетворяют следующим условиям, индуцируемым условиями А и Б.

А*. Для любой ограниченной и замкнутой области $D\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$ числа L^f и L^g из $(0,\infty)$, $\omega^f(\delta)$ и $\omega^g(\delta)$, $\delta\in(0,\infty)$ из условий А и Б таковы, что

$$d(F(t,x_*),F(t,x^*))\le L^f\|x_*-x^*\|,\quad d(G(t,x_*),G(t,x^*))\le L^g\|x_*-x^*\|,\tag{2.5}$$

(t_*,x_*) и (t^*,x^*) из D;

$$d(F(t_*,x_*),F(t^*,x^*))\le\omega^f(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|),$$

$$d(G(t_*,x_*),G(t^*,x^*))\le\omega^g(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|),$$

(t_*,x_*) и (t^*,x^*) из D.

Б*. Числа γ^f и γ^g из условия Б удовлетворяют неравенствам

$$h(F(t,x),\{\mathbf{0}\})\le\gamma^f(1+\|x\|),\quad h(G(t,x),\{\mathbf{0}\})\le\gamma^g(1+\|x\|),$$

$(t,x)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$; здесь $\mathbf{0}$ — нуль в $\mathbb{R}^m$.

Предваряя формулировки задач управления системами (2.1) и (2.2), введем дифференциальные включения (д.в.)

$$\frac{dx}{dt}\in F(t,x);\quad t\in[t_0,\vartheta]\tag{2.6}$$

$$\frac{dx}{dt}\in G(t,x);\quad t\in[t_0,\vartheta]\tag{2.7}$$

и некоторые обозначения.

Пусть t_* и t^* из $[t_0, \vartheta]$ и $t_* \le t^*$, $x_* \in \mathbb{R}^m$, $X_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Полагаем $X(t^*, t_*, x_*)$ $(Y(t^*, t_*, x_*))$ – множество достижимости д.в. (2.6) ((2.7)) в момент t^* с начальной точкой $x(t_*) = x_*$;

$X(t^*, t_*, X_*) = \bigcup\limits_{x_* \in X_*} X(t^*, t_*, x_*)$ $\left(Y(t^*, t_*, X_*) = \bigcup\limits_{x_* \in X_*} Y(t^*, t_*, x_*) \right)$ – множество достижимости д.в. (2.6) ((2.7)) с начальным множеством (t_*, X_*);

$X(t_*, x_*) = \bigcup\limits_{t \in [t_*, \vartheta]} (t, X(t, t_*, x_*))$ $\left(Y(t_*, x_*) = \bigcup\limits_{t \in [t_*, \vartheta]} Y(t, t_*, x_*) \right)$ – интегральная воронка д.в. (2.6) ((2.7)) с начальной точкой $x(t_*) = x_*$;

$X(t_*, X_*) = \bigcup\limits_{x_* \in X_*} X(t_*, x_*)$ $\left(Y(t_*, X_*) = \bigcup\limits_{x_* \in X_*} Y(t_*, x_*) \right)$ – интегральная воронка д.в. (2.6) ((2.7)) с начальным множеством (t_*, X_*); здесь принято обозначение $(t, X) = \{(t, x) : x \in X\}$, $X \subset \mathbb{R}^m$.

Как известно (см., напр., [2, 15]), справедливо включение $X(t^*, t_*, X_*) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ $(Y(t^*, t_*, X_*) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m))$ и отображение $(t^*, t_*, X_*) \mapsto X(t^*, t_*, X_*)$ $((t^*, t_*, X_*) \mapsto$ $\mapsto Y(t^*, t_*, X_*))$ непрерывно по t^* на промежутке $[t_*, \vartheta]$ при фиксированных $t_* \in [t_0, \vartheta]$, X_* в хаусдорфовой метрике и непрерывно зависит от X_* при фиксированных t_* и t^*.

Принимая во внимание условия А* и Б*, можем также утверждать, что множество $X(t^*, t_*, X_*)$ представимо в виде

$$X(t^*, t_*, X_*) = \lim_{\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0} X_\Gamma(t^*), \tag{2.8}$$

здесь множество $X_\Gamma(t^*) \subset \mathbb{R}^m$, отвечающее разбиению $\Gamma = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots, \tau_{N-1}, \tau_N = t^*\}$ $(\tau_{k+1} - \tau_k = \Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(t^* - t_*),\ k = \overline{0, N-1})$ промежутка $[t_*, t^*]$, определяются рекуррентными соотношениями

$$X_\Gamma(\tau_0) = X_*, \quad X_\Gamma(\tau_{k+1}) = \tilde{X}(\tau_{k+1}, \tau_k, X_\Gamma(\tau_k)); \quad k = \overline{0, N-1},$$

где обозначено

$$\tilde{X}(\tau^*, \tau_*, Y_*) = \bigcup_{y_* \in Y_*} \tilde{X}(\tau^*, \tau_*, y_*), \tag{2.9}$$

$\tilde{X}(\tau^*, \tau_*, y_*) = y_* + (\tau^* - \tau_*) F(\tau_*, y_*) = \{x = y_* + (\tau^* - \tau_*) f : f \in F(\tau_*, y_*)\}$, $t_* \le \tau_* < \tau^* \le$ $\le t^*$, $Y_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Аналогично, множество $Y(t^*, t_*, X_*)$ представимо в виде

$$Y(t^*, t_*, X_*) = \lim_{\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0} Y_\Gamma(t^*),$$

здесь множество $Y_\Gamma(t^*) \subset \mathbb{R}^m$, отвечающее разбиению Γ промежутка $[t_*, t^*]$, определяется рекуррентными соотношениями

$$Y_\Gamma(\tau_0) = X_*, \quad Y_\Gamma(\tau_{k+1}) = \tilde{Y}(\tau_{k+1}, \tau_k, Y_\Gamma(\tau_k)); \quad k = \overline{0, N-1},$$

где обозначено

$$\tilde{Y}(\tau^*, \tau_*, Y_*) = \bigcup_{y_* \in Y_*} \tilde{Y}(\tau^*, \tau_*, y_*),$$

$\tilde{Y}(\tau^*, \tau_*, y_*) = y_* + (\tau^* - \tau_*)G(\tau_*, y_*) = \{x = y_* + (\tau^* - \tau_*)g : g \in G(\tau_*, y_*)\}$, $t_* \le \tau_* < \tau^* \le$ $\le t^*$, $Y_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Зная размеры компакта X_* и принимая во внимание условие Б*, можем указать ограниченную и замкнутую область $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, которая будет содержать в себе все возникающие в ходе рассуждений множества из $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$.

Считаем, что присутствующие ниже в оценках числа $K^f = \max\{\|f(t, x, u)\| :$ $: (t, x, u) \in D \times P^f\}$, $K^g = \max\{\|g(t, x, u)\| : (t, x, u) \in D \times P^g\}$ и функции $\omega^f(\delta)$, $\omega^g(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$ соответствуют именно этой области D.

После того, как сформулированы условия на управляемые системы (2.1) и (2.2) и введены некоторые базовые понятия, приступим к формулировке задач динамики системы (2.1). Эти задачи охарактеризуем предварительно как некоторые задачи оптимизации интегральных воронок управляемой системы (2.1) с переменной динамикой, обусловленной подменой системы (2.1) на систему (2.2) на некотором коротком промежутке времени.

Уточним, что понимаем под управляемой системой на промежутке $[t_0, \vartheta]$ с переменной динамикой.

Обозначим для простоты изложения символом $\Sigma^{(f)}$ управляемую систему (2.1) на промежутке $[t_0, \vartheta]$, обладающую неизменной динамикой. С этой системой связываем д.в. (2.6).

Обозначим символом $\Sigma^{(\alpha)}$, где $\alpha \in [t_*, t^*]$, управляемую систему с переменной динамикой на промежутке $[t_0, \vartheta]$, возникшую на базе системы $\Sigma^{(f)}$, которую определяем следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x, u); \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{2.10}$$

здесь

$$\varphi(t, x, u) = \begin{cases} f(t, x, u), & u \in P^f \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_*) \\ g(t, x, u), & u \in P^g \quad \text{при} \quad t \in [t_*, t^*) \\ f(t, x, u), & u \in P^f \quad \text{при} \quad t \in [t^*, \vartheta] \end{cases} \tag{2.11}$$

Управляемая система $\Sigma^{(\alpha)}$ является вариацией системы $\Sigma^{(f)}$. С системой $\Sigma^{(\alpha)}$ связываем дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in \Phi(t, x); \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{2.12}$$

где множество $\Phi(t, x) \subset \mathbb{R}^m$ определено соотношением

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} F(t, x) & \text{при} \quad t \in [t_0, t_*) \\ G(t, x) & \text{при} \quad t \in [t_*, t^*) \\ F(t, x) & \text{при} \quad t \in [t^*, \vartheta] \end{cases} \tag{2.13}$$

Множества достижимости и интегральные воронки системы $\Sigma^{(f)}$ и д.в. (2.6) связаны между собой: множества достижимости и интегральные воронки д.в. (2.6) являются соответственно замыканиями множеств достижимости и интегральных воронок системы $\Sigma^{(f)}$. Также множества достижимости и интегральные воронки д.в. (2.12) являются соответственно замыканиями множеств достижимости и интегральных воронок системы $\Sigma^{(\alpha)}$.

Ниже выводятся оценки сверху рассогласований между множествами достижимости дифференциальных включений (2.6) и (2.12) и между интегральными воронками этих включений.

Для множеств достижимости и интегральных воронок д.в. (2.12) введем обозначения, аналогичные принятым для множеств достижимости и интегральных воронок д.в. (2.6):

$$X^{(\alpha)}(t^*, t_*, x_*) \text{ и } X^{(\alpha)}(t^*, t_*, X_*) \text{ в } \mathbb{R}^m, \quad X^{(\alpha)}(t_*, x_*) \text{ и } X^{(\alpha)}(t_*, X_*) \text{ в } D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$$

Интегральные воронки $X^{(\alpha)}(t_*, x_*)$ и $X^{(\alpha)}(t_*, X_*)$ будем трактовать как *вариации* интегральных воронок $X(t_*, x_*)$ и $X(t_*, X_*)$ управляемой системы $\Sigma^{(f)}$, имеющей неизменную динамику на $[t_0, \vartheta]$.

Пусть задано $X^{(0)} \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$, $(t_0, X^{(0)}) \in D$, отвечающее начальному моменту t_0.

Сформулируем следующий вопрос, относящийся к интегральным воронкам $X(t_0, X^{(0)})$ и $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$: "Насколько велико хаусдорфово расстояние $d(X(t_0, X^{(0)}), X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}))$?"

Этот вопрос можно свести к вопросу об оценке сверху хаусдорфова расстояния на промежутке $[t_0, \vartheta]$ между множествами достижимости $X(t, t_0, X^{(0)})$ и $X^{(\alpha)}(t, t_0, X^{(0)})$ и зависимостями этой оценки от промежутка α.

Упростим обозначения: $X(t) = X(t, t_0, X^{(0)})$, $Y(t) = Y(t, t_0, X^{(0)})$, $X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t_0, X^{(0)})$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Множества $X(t)$ и $X^{(\alpha)}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ связаны следующим соотношением:

$$X^{(\alpha)}(t) = \begin{cases} X(t) \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_*) \\ Z^{(\alpha)}(t) \quad \text{при} \quad t \in [t_*, t^*) \\ X(t, t^*, Z^{(\alpha)}(t^*)) \quad \text{при} \quad t \in [t^*, \vartheta], \end{cases}$$

здесь $Z^{(\alpha)}(t) = Y(t, t^*, X_*)$, где $X_* = X(t_*)$.

Приступим к оценке сверху величины

$$d(X(t), X^{(\alpha)}(t)); \quad t \in [t_0, \vartheta] \tag{2.14}$$

Так как $X(t) = X^{(\alpha)}(t)$ на $[t_0, t_*]$, то справедливо $d(X(t), X^{(\alpha)}(t)) = 0$ на $[t_0, t_*]$ и, значит, вопрос об оценке величины (2.14) сводится к оценке этой величины на $[t^*, \vartheta]$.

Сначала оценим величину (2.14) на промежутке $[t_*, t^*]$. Для этого задействуем конечное разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots, \tau_{N-1}, \tau_N = t^*\}$ промежутка $[t_*, t^*]$, $\tau_{k+1} - \tau_k = \Delta_k = \Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(t^* - t_*)$ и отвечающие разбиению Γ системы $\{X_\Gamma(\tau_k) : \tau_k \in \Gamma\}$ и $\{Y_\Gamma(\tau_k) : \tau_k \in \Gamma\}$ множеств $X_\Gamma(\tau_k)$ и $Y_\Gamma(\tau_k)$, где $X_\Gamma(\tau_k) = Y_\Gamma(\tau_k) = X_*$.

Для таких систем в $\mathbb{R}^m$ проведем пошаговое рекуррентное оценивание сверху величины

$$d(X_\Gamma(\tau_k), Y_\Gamma(\tau_k)); \quad k = \overline{1, N} \tag{2.15}$$

последовательно по моментам τ_k, $k = 1, 2, \dots, N$.

Имеет место $d(X_\Gamma(\tau_0), Y_\Gamma(\tau_0)) = 0$. Оценим сверху величину $d(X_\Gamma(\tau_1), Y_\Gamma(\tau_1))$. Для этого выберем произвольную точку $x^{(0)} \in X_\Gamma(\tau_0) = Y_\Gamma(\tau_0) = X_*$ и рассмотрим множества $\tilde{X}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)}) = x^{(0)} + \Delta F(\tau_0, x^{(0)})$ и $\tilde{Y}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)}) = x^{(0)} + \Delta G(\tau_0, x^{(0)})$.

Справедливо равенство

$$d(\tilde{X}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)}), \tilde{Y}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)})) = \Delta_0 d(F(\tau_0, x^{(0)}), G(\tau_0, x^{(0)}))$$

Для получения последующих оценок введем неотрицательную функцию

$$\gamma(t) = \max_{x \in D(t)} d(F(t, x), G(t, x)); \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{2.16}$$

здесь $D(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in D\}$.

Эта неотрицательная непрерывная на $[t_0, \vartheta]$ функция будет задействоваться при оценке хаусдорфовых расстояний между некоторыми множествами в $\mathbb{R}^m$.

Принимая во внимание (2.16), получаем

$$d(\tilde{X}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)}), \tilde{Y}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)})) \le \gamma(\tau_0)\Delta_0$$

Так как $X_\Gamma(\tau_1) = \bigcup\limits_{x^{(0)} \in X_*} \tilde{X}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)})$ и $Y_\Gamma(\tau_1) = \bigcup\limits_{x^{(0)} \in X_*} \tilde{Y}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)})$, то из последнего неравенства получаем

$$d(X(\tau_1), Y(\tau_1)) \le \Delta_0 \gamma(\tau_0) \tag{2.17}$$

Оценкой (2.17) воспользуемся при выводе оценки сверху величины $d(X(\tau_2), Y(\tau_2))$.

Для оценки этой величины выберем произвольную точку $x^{(1)} \in X(\tau_1)$ и ближайшую к ней в $Y(\tau_1)$ точку $y^{(1)}$. Справедлива оценка

$$\|x^{(1)} - y^{(1)}\| \le h(X_\Gamma(\tau_1), Y_\Gamma(\tau_1)) \le d(X_\Gamma(\tau_1), Y_\Gamma(\tau_1)) \le \Delta_0 \gamma(\tau_0) \tag{2.18}$$

Рассмотрим множества $\tilde{X}(\tau_2, \tau_1, x^{(1)}) = x^{(1)} + \Delta F(\tau_1, x^{(1)})$ и $\tilde{Y}(\tau_2, \tau_1, y^{(1)}) = y^{(1)} + \Delta G(\tau_1, y^{(1)})$.

Справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} d(\tilde{X}(\tau_2, \tau_1, x^{(1)}), \tilde{Y}(\tau_2, \tau_1, y^{(1)})) &= \|x^{(1)} - y^{(1)}\| + \Delta_1 d(F(\tau_1, x^{(1)}), G(\tau_1, x^{(1)})) \le \\ &\le \|x^{(1)} - y^{(1)}\| + \Delta_1 \left(d(F(\tau_1, x^{(1)}), F(\tau_1, y^{(1)})) + d(F(\tau_1, y^{(1)}), G(\tau_1, y^{(1)})) \right) \le \\ &\le \|x^{(1)} - y^{(1)}\| + \Delta_1 L^{(f)} \|x^{(1)} - y^{(1)}\| + \Delta_1 \gamma(\tau_1) \le e^{L^{(f)}\Delta_1} \|x^{(1)} - y^{(1)}\| + \Delta_1 \gamma(\tau_1) \end{aligned}$$

Принимая во внимание (2.18), получаем

$$d(\tilde{X}(\tau_2, \tau_1, x^{(1)}), \tilde{Y}(\tau_2, \tau_1, y^{(1)})) \le e^{L^{(f)}\Delta_1} \Delta_0 \gamma(\tau_0) + \Delta_1 \gamma(\tau_1) \tag{2.19}$$

Очевидно при этом, что имеет место

$$h(\tilde{X}(\tau_2, \tau_1, x^{(1)}), \tilde{Y}(\tau_2, \tau_1, y^{(1)})) \le e^{L^{(f)}\Delta_1} \Delta_0 \gamma(\tau_0) + \Delta_1 \gamma(\tau_1) \tag{2.20}$$

Из включения $y^{(1)} \in Y_\Gamma(\tau_1)$ и (2.20) следует

$$\min_{y\in Y_\Gamma(\tau_1)} h(\tilde{X}(\tau_2,\tau_1,x^{(1)}),\tilde{Y}(\tau_2,\tau_1,y)) \le h(\tilde{X}(\tau_2,\tau_1,x^{(1)}),\tilde{Y}(\tau_2,\tau_1,y^{(1)})) \tag{2.21}$$

Из (2.20), (2.21) и равенства $Y_\Gamma(\tau_2) = \tilde{Y}(\tau_2,\tau_1,Y_\Gamma(\tau_1)) = \bigcup\limits_{y\in Y_\Gamma(\tau_1)} \tilde{Y}(\tau_2,\tau_1,y)$ следует оценка

$$h(\tilde{X}(\tau_2,\tau_1,x^{(1)}),Y_\Gamma(\tau_2)) \le e^{L^{(f)}\Delta_1}\Delta_0\gamma(\tau_0) + \Delta_1\gamma(\tau_1) \tag{2.22}$$

Так как точка $x^{(1)}$ выбрана в $X_\Gamma(\tau_1)$ произвольно и так как $X_\Gamma(\tau_2) = \bigcup\limits_{x\in X_\Gamma(\tau_1)} \tilde{X}(\tau_2,\tau_1,x)$, то из (2.22) следует оценка

$$h(X_\Gamma(\tau_2),Y_\Gamma(\tau_2)) \le e^{L^{(f)}\Delta_1}\Delta_0\gamma(\tau_0) + \Delta_1\gamma(\tau_1) \tag{2.23}$$

Аналогично выводится оценка

$$h(Y_\Gamma(\tau_2),X_\Gamma(\tau_2)) \le e^{L^{(f)}\Delta_1}\Delta_0\gamma(\tau_0) + \Delta_1\gamma(\tau_1) \tag{2.24}$$

Из (2.23), (2.24) получаем

$$d(X_\Gamma(\tau_2),Y_\Gamma(\tau_2)) \le e^{L^{(f)}\Delta_1}\Delta_0\gamma(\tau_0) + \Delta_1\gamma(\tau_1), \tag{2.25}$$

здесь $L = \max(L^{(f)}, L^{(g)})$.

Рассмотрим следующий промежуток $[\tau_2,\tau_3]$ и приступим к выводу оценки сверху величины $d(X_\Gamma(\tau_3),Y_\Gamma(\tau_3))$. При этом проводим рассуждения, аналогичные предыдущим, и используем оценку (2.25).

В итоге получаем

$$\begin{aligned} d(X_\Gamma(\tau_3),Y_\Gamma(\tau_3)) &\le e^{L\Delta_2} d(X_\Gamma(\tau_2),Y_\Gamma(\tau_2)) + \Delta_2\gamma(\tau_2) \le \\ &\le e^{L\Delta_2}\left(e^{L\Delta_1}\Delta_0\gamma(\tau_0) + \Delta_1\gamma(\tau_1)\right) + \Delta_2\gamma(\tau_2) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Оценку (2.26) запишем в виде

$$d(X_\Gamma(\tau_3),Y_\Gamma(\tau_3)) \le e^{L(\Delta_1+\Delta_2)}\Delta_0\gamma(\tau_0) + e^{L\Delta_2}\Delta_1\gamma(\tau_1) + \Delta_2\gamma(\tau_2) \tag{2.27}$$

Теперь, очевидно, можем обсудить вывод оценки сверху величины $d(X_\Gamma(\tau_{k+1}), Y_\Gamma(\tau_{k+1}))$, $k = \overline{0, N-1}$.

Справедлива оценка, аналогичная оценке (2.25), (2.27)

$$\begin{aligned} d(X_\Gamma(\tau_{k+1}),Y_\Gamma(\tau_{k+1})) &\le e^{L\Delta_k}\Delta_0\gamma(\tau_0) + e^{L\Delta_2} d(X_\Gamma(\tau_k),Y_\Gamma(\tau_k)) + \Delta_k\gamma(\tau_k) \le \\ \le e^{L(\Delta_k+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)}\Delta_0\gamma(\tau_0) &+ e^{L(\Delta_k+\ldots+\Delta_3+\Delta_2)}\Delta_1\gamma(\tau_1) + \ldots + e^{L\Delta_k}\Delta_{k-1}\gamma(\tau_{k-1}) + \Delta_k\gamma(\tau_k) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Оценку (2.28) заменим более грубой оценкой

$$d(X_\Gamma(\tau_{k+1}),Y_\Gamma(\tau_{k+1})) \le e^{L(\tau_{k+1}-\tau_0)}\sum_{j=0}^{k}\gamma(\tau_j)\Delta_j; \quad k \in \overline{0, N-1} \tag{2.29}$$

Полагая, в частности, $k = N-1$, получаем

$$d(X_\Gamma(t^*),Y_\Gamma(t^*)) \le e^{L(t^*-t_*)}\sum_{k=0}^{N-1}\gamma(\tau_k)\Delta_k \tag{2.30}$$

Воспользуемся далее соотношениями (2.8) и (2.9):

$$X(t^*) = X(t^*, t_*, X_*) = \lim_{\Delta=\Delta(\Gamma)\downarrow 0} X_\Gamma(t^*), \quad Y(t^*) = Y(t^*, t_*, X_*) = \lim_{\Delta=\Delta(\Gamma)\downarrow 0} Y_\Gamma(t^*),$$

здесь имеется в виду сходимость в хаусдорфовой метрике.

Уточним эту сходимость, выписав известные оценки

$$\begin{gathered} d(X(t^*), X_\Gamma(t^*)) \le e^{L^f(t^*-t_*)}(t^* - t_*)\omega^f((1 + K^f)\Delta) \\ d(X^{(\alpha)}(t^*), Y_\Gamma(t^*)) \le e^{L^g(t^*-t_*)}(t^* - t_*)\omega^g((1 + K^g)\Delta) \end{gathered} \tag{2.31}$$

Правые части оценок (2.31) стремятся к нулю при $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$, и скорость сходимости правых частей определяется скоростями сходимости функций $\omega^f(\delta)$ и $\omega^g(\delta)$ при $\delta \downarrow 0$.

Справедлива следующая оценка при любых, указанных выше разбиениях Γ промежутка $[t_*, t^*]$

$$\begin{gathered} d(X(t^*), X^{(\alpha)}(t^*)) \le d(X(t^*), X_\Gamma(t^*)) + d(X_\Gamma(t^*), Y_\Gamma(t^*)) + \\ + d(Y_\Gamma(t^*), X^{(\alpha)}(t^*)) \le e^{L(t^*-t_*)}\sum_{k=0}^{N-1}\gamma(\tau_k)\Delta_k + \\ + e^{L(t^*-t_*)}(t^* - t_*)\Big(\omega^f((1 + K^f)\Delta) + \omega^g((1 + K^g)\Delta)\Big) \end{gathered} \tag{2.32}$$

Выбирая разбиения Γ промежутка $[t_*, t^*]$ такие, что $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$, и переходя в правой части оценки (2.32) к пределу при $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$, получаем оценку

$$d(X(t^*), X^{(\alpha)}(t^*)) \le e^{L(t^*-t_*)}\int_{t_*}^{t^*}\gamma(t)dt, \tag{2.33}$$

здесь $\int_{t_*}^{t^*}\gamma(t)dt$ – интеграл Римана.

Очевидно, что справедлива и более общая оценка

$$d(X(t), X^{(\alpha)}(t)) \le e^{L(t-t_*)}\int_{t_*}^{t}\gamma(\tau)d\tau; \quad t \in [t_*, t^*] \tag{2.34}$$

Нам осталось оценить величину $d(X(t), X^{(\alpha)}(t))$ на промежутке $[t^*, \vartheta]$.

Поскольку на $[t^*, \vartheta]$ системы $\Sigma^{(f)}$ и $\Sigma^{(\alpha)}$ имеют одну и ту же динамику – динамику системы $\Sigma^{(f)}$ и, стало быть, соответствующие д.в. имеют одну и ту же динамику, то нетрудно оценить величину $d(X(t), X^{(\alpha)}(t))$ на $[t^*, \vartheta]$.

Справедлива следующая оценка (см., например, [2])

$$d(X(t), X^{(\alpha)}(t)) \le e^{L^f(t-t^*)}d(X(t^*), X^{(\alpha)}(t^*)); \quad t \in [t^*, \vartheta] \tag{2.35}$$

Из (2.33) и (2.35) получаем

$$d(X(t), X^{(\alpha)}(t)) \le e^{L^f(t-t_*)}e^{L(t^*-t_*)}\int_{t_*}^{t^*}\gamma(\tau)d\tau \le e^{L(t-t_*)}\int_{t_*}^{t}\gamma(\tau)d\tau; \quad t \in [t^*, \vartheta] \tag{2.36}$$

Объединим оценки (2.34) и (2.36) в одну оценку, для чего введем функцию

$$d^*(t) = \begin{cases} e^{L(t-t_*)}\int\limits_{t_*}^{t}\gamma(\tau)d\tau & \text{при} \quad t \in [t_*, t^*] \\ e^{L(t-t_*)}\int\limits_{t_*}^{t^*}\gamma(\tau)d\tau & \text{при} \quad t \in [t^*, \vartheta] \end{cases}$$

В итоге получаем оценку, которую сформулируем в виде следующего утверждения.

Лемма 1. Хаусдорфово расстояние между множествами достижимости исходной системы (2.1) и проварьированной системы (2.10) удовлетворяет неравенству

$$d(X(t), X^{(\alpha)}(t)) \le d^*(t); \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{2.37}$$

при условии выполнения условий А и Б, налагаемых на функции $f(t,x,u)$ и $g(t,x,u)$, из которых по формуле (2.11) сконструирована функция $\varphi(t,x,u)$, являющаяся правой частью системы (2.10).

Из (2.37) вытекает следующая оценка.

Следствие. Хаусдорфово расстояние между интегральными воронками исходной системы (2.1) и проварьированной системы (2.10) удовлетворяет неравенству

$$d(X(t_0, X^{(0)}), X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})) \le \max_{t \in [t_0, \vartheta]} d^*(t) \tag{2.38}$$

при условии выполнения условий А и Б, налагаемых на функции $f(t,x,u)$ и $g(t,x,u)$, из которых по формуле (2.11) сконструирована функция $\varphi(t,x,u)$, являющаяся правой частью системы (2.10).

Рассуждения и оценки, которые будем проводить в последующих параграфах, связаны также с оценкой рассогласования между множествами $X^{(\alpha)}(t_i) = X^{(\alpha)}(t_i, t_0, X^{(0)})$, $t_i \in \Gamma$, отвечающими моментам из разбиения $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_{N^*} = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$, и множествами $X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)$. Множества $X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)$ заданы рекуррентно с начальным множеством $X_\Gamma^{(\alpha)}(t_0) = X^{(0)}$ подобно тому, как задавались множества $X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)$ для разбиения Γ промежутка $[t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$.

Здесь считается, что разбиение Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$ совпадает с упоминавшимся ранее разбиением Γ промежутка $[t_*, t^*]$, т.е. является продолжением разбиения Γ промежутка $[t_*, t^*]$.

Таким образом, в системе $\{X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i) : t_i \in [t_*, t^*]\}$, входящей в систему $\{X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i) : t_i \in [t_0, \vartheta]\}$, начальным множеством является $X_* = X_\Gamma^{(\alpha)}(t_*)$, а последним, – множество $X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*)$.

Множества $X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)$, $t_i \in [t_*, t^*]$ определены соотношениями

$$X_\Gamma^{(\alpha)}(t_{i+1}) = \tilde{Y}(t_{i+1}, t_i, X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)), \; t_i \text{ и } t_{i+1} \text{ из } [t_*, t^*]$$

Для удобства обозначим $X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*) = Y_\Gamma(t^*, t_*, X_*)$, подчеркнув тем самым зависимость этих множеств от множества $X_* = X_\Gamma^{(\alpha)}(t_*)$ и системы $\Sigma^{(g)}$ (2.2).

Оценку величины $d(X^{(\alpha)}(t_i), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i))$, $t_i \in \Gamma$ проведем в три этапа, соответствующие промежуткам $[t_0, t_*]$, $[t_*, t^*]$, $[t^*, \vartheta]$.

Рассмотрим первый промежуток $[t_0, t_*]$.

Справедливы соотношения при $t_i \in [t_0, t_*] \cap \Gamma$

$$X^{(\alpha)}(t_i) = X(t_i), \quad X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i) = X_\Gamma(t_i)$$

При этом имеем, согласно теории,

$$d(X^{(\alpha)}(t_i), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)) = d(X(t_i), X_\Gamma(t_i)) \le e^{L^f(t_i - t_0)}(t_i - t_0)\,\omega^f((1 + K^f)\Delta)$$

$$t_i \in [t_0, t_*] \cap \Gamma, \quad \Delta = \Delta(\Gamma) = \left(N^*\right)^{-1}(\vartheta - t_0)$$

В частности, справедлива оценка

$$d(X^{(\alpha)}(t_*), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_*)) \le e^{L^f(t_* - t_0)}(t_* - t_0)\omega^f((1 + K^f)\Delta) \tag{2.39}$$

Рассмотрим второй промежуток $[t_*, t^*]$ из $[t^*, \vartheta]$. Введем обозначения

$$d(t_*) = d(X^{(\alpha)}(t_*), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_*)), \quad d(t^*) = d(X^{(\alpha)}(t^*), X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*))$$

Оценим сверху величину $d(t^*)$, используя оценку (2.39) для величины $d(t_*)$. Для этого введем промежуточное (в оценках) множество $X^{(\sigma)}(t^*) = Y(t^*, t_*, X_*)$.

Справедлива оценка

$$d(t^*) \le d(X^{(\alpha)}(t^*), X^{(\sigma)}(t^*)) + d(X^{(\sigma)}(t^*), X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*))$$

Учитывая ранее принятые обозначения для множеств $X^{(\alpha)}(t^*)$, $X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*)$ и $X^{(\sigma)}(t^*)$, эту оценку запишем в виде

$$\begin{aligned} d(t^*) &\le d(Y(t^*, t_*, X^{(\alpha)}(t_*)), Y(t^*, t_*, X_\Gamma^{(\alpha)}(t_*)) + d(Y(t^*, t_*, X_*), Y_\Gamma(t^*, t_*, X_*)) \le \\ &\le e^{L^g(t^* - t_*)} d(X^{(\alpha)}(t_*), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_*)) + e^{L^g(t^* - t_*)}(t^* - t_*)\omega^g((1 + K^g)\Delta) \le \\ &\le e^{L^g(t^* - t_*)} e^{L^f(t^* - t_0)}(t^* - t_0)\omega^f((1 + K^f)\Delta) + e^{L^g(t^* - t_*)}(t^* - t_*)\omega^g((1 + K^g)\Delta) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Принимая во внимание $L = \max(L^f, L^g)$, получаем

$$d(t^*) \le e^{L(t^* - t_0)}\Big((t^* - t_0)\omega^f((1 + K^f)\Delta) + (t^* - t_*)\omega^g((1 + K^g)\Delta)\Big) \tag{2.41}$$

Введем обозначения: $K = \max(K^f, K^g)$, $\omega^*((1 + K)\Delta) = \max\Big(\omega^f((1 + K^f)\Delta),$ $\omega^g((1 + K^g)\Delta)\Big)$, $\Delta \in (0, \infty)$.

При введенных обозначениях из (2.41) следует

$$d(t^*) \le e^{L(t^* - t_0)}(t^* - t_0)\omega^*((1 + K)\Delta); \quad \Delta = \Delta(\Gamma) \tag{2.42}$$

Рассмотрим промежуток $[t^*, \vartheta] \subset [t_0, \vartheta]$ и оценим сверху $d(\vartheta) = d(X^{(\alpha)}(\vartheta), X_\Gamma^{(\alpha)}(\vartheta))$.

Множества $X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)$, $t_i \in \Gamma \cap [t^*, \vartheta]$ определяются рекуррентно: $X_\Gamma^{(\alpha)}(t_{i+1}) = \tilde{X}(t_{i+1}, t_i, X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i))$, t_i и t_{i+1} из $[t^*, \vartheta]$.

Для удобства обозначим $X_\Gamma^{(\alpha)}(\vartheta) = \tilde{X}(\vartheta, t^*, X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*))$, подчеркнув зависимость $X_\Gamma^{(\alpha)}(\vartheta)$ от множества $X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*)$ и системы $\Sigma^{(f)}$, а также $X^{(\rho)}(\vartheta) = X(\vartheta, t^*, X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*))$.

Справедлива оценка

$$d(\vartheta) = d(X^{(\alpha)}(\vartheta), X^{(\rho)}(\vartheta)) + d(X^{(\rho)}(\vartheta), X_\Gamma^{(\alpha)}(\vartheta)) =$$
$$= d(X(\vartheta, t^*, X^{(\alpha)}(t^*)), X(\vartheta, t^*, X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*))) +$$
$$+ d(X(\vartheta, t^*, X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*)), X_\Gamma(\vartheta, t^*, X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*))) \le$$
$$\le e^{L^f(\vartheta - t^*)} d(X^{(\alpha)}(t^*), X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*)) + e^{L^f(\vartheta - t^*)}(\vartheta - t^*)\omega^f((1 + K^f)\Delta) \le$$
$$\le e^{L^f(\vartheta - t^*)} e^{L(t^* - t_0)}(t^* - t_0)\omega^*((1 + K)\Delta) + e^{L^f(\vartheta - t^*)}(\vartheta - t^*)\omega^f((1 + K^f)\Delta) \tag{2.43}$$

Заменим в правой части этого неравенства $e^{L^f(\vartheta - t^*)}$ на $e^{L(\vartheta - t^*)}$, функцию $\omega^f((1 + K^f)\Delta)$ на $\omega^*((1 + K)\Delta)$ и в результате замены получим

$$d(\vartheta) \le e^{L(\vartheta - t_0)}(t^* - t_0)\omega^*((1 + K)\Delta) + e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t^*)\omega^*((1 + K)\Delta)$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть выполнены условия А и Б на функции $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$, из которых по формуле (2.11) сконструирована функция $\varphi(t, x, u)$, являющаяся правой частью системы $\Sigma^{(\alpha)}$ (2.10). Тогда хаудорфово расстояние между множеством достижимости $X^{(\alpha)}(\vartheta) = X^{(\alpha)}(\vartheta, t_0, X^{(0)})$ системы $\Sigma^{(\alpha)}$ и аппроксимацией $X_\Gamma^{(\alpha)}(\vartheta)$ этого множества удовлетворяет неравенству

$$d(X^{(\alpha)}(\vartheta), X_\Gamma^{(\alpha)}(\vartheta)) \le e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)\omega^*((1 + K)\Delta), \tag{2.44}$$

где $\Delta = \Delta(\Gamma)$ — диаметр разбиения Γ, функция $\omega^*(\cdot)$ и постоянная K определены при формулировке неравенства (2.42).

Замечание 1. Проведенные выше рассуждения показывают, что верна более общая оценка, чем (2.44), а именно,

$$d(X^{(\alpha)}(t_i), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)) \le e^{L(t_i - t_0)}(t_i - t_0)\omega^*((1 + K)\Delta); \quad t_i \in \Gamma \tag{2.45}$$

Заметим, что также для любого промежутка $[t_i, t_{i+1}]$ разбиения Γ и любого $t \in [t_i, t_{i+1}]$ справедлива оценка

$$d(X^{(\alpha)}(t), X^{(\alpha)}(t_i)) \le (1 + K)\Delta \tag{2.46}$$

Принимая во внимание оценки (2.45) и (2.46), получаем, что для любого промежутка $[t_i, t_{i+1}]$ разбиения Γ и любого $t \in [t_i, t_{i+1}]$ имеет место

$$d(X^{(\alpha)}(t), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)) \le e^{L(t_i - t_0)}\omega^*((1 + K)\Delta) + (1 + K)\Delta; \quad \Delta = \Delta(\Gamma) \tag{2.47}$$

Введем в рассмотрение множество $X_\Gamma^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}) = \bigcup\limits_{t_i \in \Gamma} (t_i, \tilde{X}_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)) \subset D$.

Из (2.47) следует оценка

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})) \le e^{L(t_i - t_0)}\omega^*((1 + K)\Delta) + (1 + K)\Delta; \quad \Delta = \Delta(\Gamma) \tag{2.48}$$

В оценке (2.48) множество $X_\Gamma^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$ есть дискретная (по t) аппроксимация интегральной воронки $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$ в пространстве $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$.

Замечание 2. При выводе оценки (2.44) был осуществлен в промежуточных оценках ряд замен констант L^f, L^g, K^f, K^g и функций $\omega^f((1 + K^f)\Delta)$, $\omega^g((1 + K^g)\Delta)$ на константы L, K и функцию $\omega^*((1+K)\Delta)$. Также были в итоге заменены величины $t_* - t_0$, $t^* - t_*$, $\vartheta - t^*$ на $\vartheta - t_0$.

В результате получена загрубленная оценка (2.44) величины $d(X^{(\alpha)}(\vartheta), X_\Gamma^{(\alpha)}(\vartheta))$, в которой выхолощена персонификация констант L^f, L^g, K^f, K^g, моментов t_*, t^* и функций $\omega^f((1+K^f)\Delta)$, $\omega^g((1+K^g)\Delta)$.

Оценка (2.44) достаточна для проведения последующих рассуждений, и, тем не менее, выпишем более точную оценку величины $d(\vartheta)$. А именно, в оценке (2.43) заменяем $d(t^*)$ на правую часть оценки (2.40) и получаем

$$d(X^{(\alpha)}(\vartheta), X_\Gamma^{(\alpha)}(\vartheta)) \le e^{L_*(\alpha)}(\vartheta - t_0)\omega^f((1+K^f)\Delta) + e^{L^*(\alpha)}(t^* - t_*)\omega^g((1+K^g)\Delta) \qquad (2.49)$$

Здесь обозначено

$$L_*(\alpha) = L^f(t_* - t_0) + L^g(t^* - t_*) + L^f(\vartheta - t^*)$$

$$L^*(\alpha) = L^g(t^* - t_*) + L^f(\vartheta - t^*)$$

Справедлива и более общая оценка

$$\begin{aligned} d(X^{(\alpha)}(t_i), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)) \le e^{L_*(\alpha)}(\vartheta - t_0)\omega^f((1+K^f)\Delta) + \\ + e^{L^*(\alpha)}(t^* - t_*)\omega^g((1+K^g)\Delta); \quad t_i \in \Gamma, \end{aligned} \qquad (2.50)$$

а также вытекающая из нее оценка

$$\begin{aligned} d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})) \le e^{L_*(\alpha)}(\vartheta - t_0)\omega^f((1+K^f)\Delta) + \\ + e^{L^*(\alpha)}(t^* - t_*)\omega^g((1+K^g)\Delta) \end{aligned} \qquad (2.51)$$

3. О сравнении интегральных воронок д.в., отвечающих двум вариациям системы Σ. В этом параграфе рассмотрим вариации $\Sigma^{(\alpha)}$ и $\Sigma^{(\beta)}$ системы $\Sigma^{(f)}$, отвечающие промежуткам $\alpha = [t_*, t^*]$ и $\beta = [\tau_*, \tau^*]$ из $[t_0, \vartheta]$. Здесь полагаем, что управляемая система $\Sigma^{(\beta)}$ представима в виде

$$\frac{dx}{dt} = h(t, x, u); \quad t \in [t_0, \vartheta], \qquad (3.1)$$

здесь

$$h(t,x,u) = \begin{cases} f(t,x,u),\ u \in P^f & \text{при} \quad t \in [t_0, \tau_*) \\ g(t,x,u),\ u \in P^g & \text{при} \quad t \in [\tau_*, \tau^*) \\ f(t,x,u),\ u \in P^f & \text{при} \quad t \in [\tau^*, \vartheta], \end{cases}$$

где $t_0 \le \tau_* \le \tau^* \le \vartheta$.

Системе $\Sigma^{(\beta)}$ сопоставим д.в.

$$\frac{dx}{dt} \in H(t, x); \quad t \in [t_0, \vartheta], \qquad (3.2)$$

где множество $H(t, x) \subset \mathbb{R}^m$ определено соотношением

$$H(t,x) = \begin{cases} F(t,x) & \text{при} \quad t \in [t_0, \tau_*) \\ G(t,x) & \text{при} \quad t \in [\tau_*, \tau^*) \\ F(t,x) & \text{при} \quad t \in [\tau^*, \vartheta] \end{cases}$$

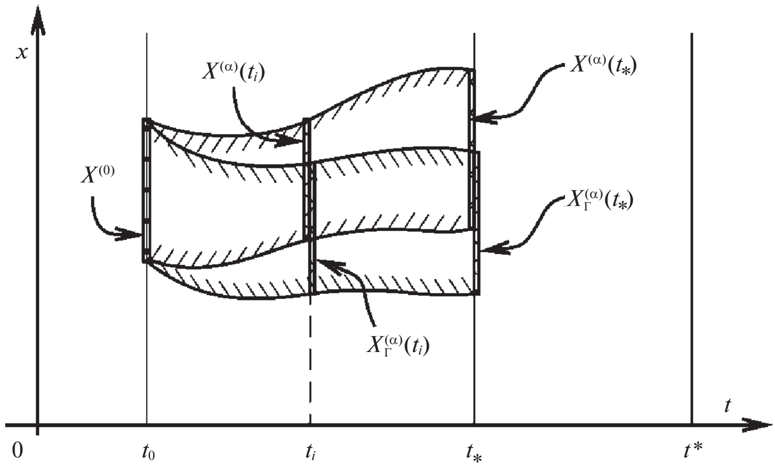

Рис. 1.

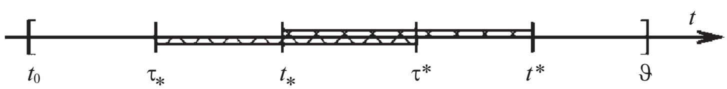

Рис. 2. Расположение промежутков α и β в варианте 1.

Для множеств достижимости и интегральных воронок д.в. (3.2) введем обозначения, аналогичные обозначениям множеств достижимости и интегральных воронок д.в., соответствующих системам $\Sigma^{(f)}$ и $\Sigma^{(\alpha)}$ (рис. 1):

$$X^{(\beta)}(\eta^*, \eta_*, x_*), \quad X^{(\beta)}(\eta^*, \eta_*, X_*) \text{ в } \mathbb{R}^m$$

$$X^{(\beta)}(\eta_*, x_*), \quad X^{(\beta)}(\eta_*, X_*) \text{ в } \mathbb{R}^m$$

$$t_0 \le \eta_* \le \eta^* \le \vartheta, \quad X_* \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^m) \quad \text{и} \quad (\eta_*, X_*) \subset D$$

Пусть $X^{(0)} \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ – начальное множество, $(t_0, X^{(0)}) \subset D$.

Возникает вопрос об оценках рассогласований между интегральными воронками $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$ и $X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})$: “Насколько велико хаусдорфово расстояние $d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)}))$?”

С этим вопросом связан вопрос об оценке сверху величины $d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)}))$.

В связи с этим рассмотрим всевозможные варианты расположения промежутков $\alpha = [t_*, t^*]$ и $\beta = [\tau_*, \tau^*]$ в $[t_0, \vartheta]$.

Вариант 1. $t_0 \le \tau_* \le t_* \le \tau^* \le t^* \le \vartheta$ (рис. 2).

Вариант 2. $t_0 \le t_* \le \tau_* \le \tau^* \le t^* \le \vartheta$ (рис. 3).

Вариант 3. $t_0 \le t_* \le \tau_* \le t^* \le \tau^* \le \vartheta$ (рис. 4).

Вариант 4. $t_0 \le t_* \le t^* \le \tau_* \le \tau^* \le \vartheta$ (рис. 5).

Рис. 3. Расположение промежутков α и β в варианте 2.

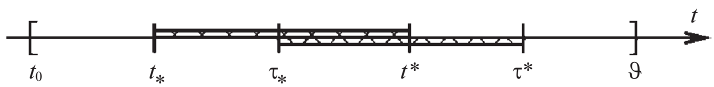

Рис. 4. Расположение промежутков α и β в варианте 3.

Рис. 5. Расположение промежутков α и β в варианте 4.

Этими вариантами исчерпываются фактически другие варианты взаимного расположения α и β в $[t_0, \vartheta]$, так как получаются из указанных четырех с помощью замены $t_* \leftrightarrow \tau_*$, $t^* \leftrightarrow \tau^*$.

Оценку сверху величины $d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)}))$ сведем к оценке величины $d^{\alpha,\beta}(t) = d(X^{(\alpha)}(t), X^{(\beta)}(t))$, $t \in [t_0, \vartheta]$ между сечениями $X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t_0, X^{(0)})$ и $X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t_0, X^{(0)})$ интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$ и $X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})$.

Начнем вывод с варианта 1. Рассмотрим промежуток $[t_0, \tau_*]$. При $t \in [t_0, \tau_*]$ имеем

$$X^{(\alpha)}(t) = X(t, t_0, X^{(0)}), \quad X^{(\beta)}(t) = X(t, t_0, X^{(0)})$$

Следовательно, при $t \in [t_0, \tau_*]$ имеет место $d^{\alpha,\beta}(t) = 0$ и, следовательно,

$$X^{(\alpha)}(\tau_*) = X^{(\beta)}(\tau_*)$$

Рассмотрим промежуток $[\tau_*, t_*]$. Имеем при $t \in [\tau_*, t_*]$

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*)) = X(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*)) = Y(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*))$$

Учитывая эти соотношения, по аналогии с разд. 2, получаем при $t \in [\tau_*, t_*]$

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L(t-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{t} \gamma(\tau) d\tau$$

В частности, справедливо

$$d^{\alpha,\beta}(t_*) \le e^{L(t_*-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{t_*} \gamma(\tau) d\tau \tag{3.3}$$

Рассмотрим промежуток $[t_*, \tau^*]$.

Справедливы представления при $t \in [t_*, \tau^*]$

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t_*, X^{(\alpha)}(t_*)) = Y(t, t_*, X^{(\alpha)}(t_*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t_*, X^{(\beta)}(t_*)) = Y(t, t_*, X^{(\beta)}(t_*))$$

Учитывая эти соотношения, получаем при $t \in [t_*, \tau^*]$

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L^g(t-t_*)} d^{\alpha,\beta}(t_*) \le e^{L(t-\tau_*)} d^{\alpha,\beta}(t_*)$$

В частности, справедливо неравенство

$$d^{\alpha,\beta}(\tau^*) \le e^{L(\tau^*-t_*)} d^{\alpha,\beta}(t_*) \tag{3.4}$$

Рассмотрим промежуток $[\tau^*, t^*]$. Имеем при $t \in [\tau^*, t^*]$:

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*)) = Y(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*)) = X(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*))$$

Справедлива при $t \in [\tau^*, t^*]$ оценка

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le d(Y(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*)), Y(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*))) +$$

$$+ d(Y(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*)), X(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*))) \le e^{L^g(t-\tau^*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*) + e^{L(t-\tau^*)} \int\limits_{\tau^*}^{t} \gamma(\tau) d\tau$$

В частности, справедливо неравенство

$$d^{\alpha,\beta}(t^*) \le e^{L^g(t^*-\tau^*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*) + e^{L(t^*-\tau^*)} \int\limits_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \tag{3.5}$$

Рассмотрим промежуток $[t^*, \vartheta]$. Имеем при $t \in [t^*, \vartheta]$:

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t^*, X^{(\alpha)}(t^*)) = X(t, t^*, X^{(\alpha)}(t^*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t^*, X^{(\beta)}(t^*)) = X(t, t^*, X^{(\beta)}(t^*))$$

и, значит,

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L^g(t-t^*)} d^{\alpha,\beta}(t^*) \le e^{L(t-t^*)} d^{\alpha,\beta}(t^*)$$

В частности, справедливо неравенство

$$d^{\alpha,\beta}(\vartheta) \le e^{L(\vartheta-t^*)} d^{\alpha,\beta}(t^*) \tag{3.6}$$

Учитывая предыдущие оценки, получаем при $t \in [t_0, \vartheta]$

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L(\vartheta-t^*)} \left(e^{L(t^*-\tau^*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*) + e^{L(t^*-\tau^*)} \int\limits_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \right) =$$

$$= e^{L(\vartheta-\tau^*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*) + e^{L(\vartheta-\tau^*)} \int\limits_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \le e^{L(\vartheta-\tau^*)} e^{L(\tau^*-t_*)} d^{\alpha,\beta}(t^*) + e^{L(\vartheta-\tau^*)} \int\limits_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \le$$

$$\le e^{L(\vartheta-t_*)} e^{L(t_*-\tau_*)} \int\limits_{\tau_*}^{t_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-\tau^*)} \int\limits_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau$$

Итак, получаем при $t \in [t_0, \vartheta]$ оценку

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L(\vartheta-\tau_*)}\int\limits_{\tau_*}^{t_*}\gamma(\tau)d\tau + e^{L(\vartheta-\tau^*)}\int\limits_{\tau^*}^{t^*}\gamma(\tau)d\tau \tag{3.7}$$

В рассматриваемом варианте 1 из (3.7) вытекает оценка

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})) \le e^{L(\vartheta-\tau_*)}\int\limits_{\tau_*}^{t_*}\gamma(\tau)d\tau + e^{L(\vartheta-\tau^*)}\int\limits_{\tau^*}^{t^*}\gamma(\tau)d\tau \tag{3.8}$$

Обратимся к варианту 2. Рассмотрим промежуток $[t_0, t_*]$. При $t \in [t_0, t_*]$ имеем

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t_0, X^{(0)}) = X(t, t_0, X^{(0)})$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t_0, X^{(0)}) = X(t, t_0, X^{(0)})$$

Из этих равенств следует

$$d^{\alpha,\beta}(t) = 0; \quad t \in [t_0, t_*]$$

Рассмотрим промежуток $[t_*, \tau_*] \subset [t_0, \tau_*]$. При $t \in [t_*, \tau_*]$ имеет место оценка

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L(\tau_*-t_*)}\int\limits_{t_*}^{t}\gamma(\tau)d\tau$$

В частности,

$$d^{\alpha,\beta}(\tau_*) \le e^{L(\tau_*-t_*)}\int\limits_{t_*}^{\tau_*}\gamma(\tau)d\tau \tag{3.9}$$

Рассмотрим промежуток $[\tau_*, \tau^*] \subset [t_*, t^*]$. При $t \in [\tau_*, \tau^*]$ имеем

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*)) = Y(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*)) = Y(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*))$$

Отсюда следует при $t \in [\tau_*, \tau^*]$ оценка

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L^g(t-\tau_*)}d^{\alpha,\beta}(\tau_*) \le e^{L(t-\tau_*)}d^{\alpha,\beta}(\tau_*)$$

В частности, имеет место

$$d^{\alpha,\beta}(\tau^*) \le e^{L(\tau^*-\tau_*)}d^{\alpha,\beta}(\tau_*) \tag{3.10}$$

Далее, рассмотрим промежуток $[\tau^*, t^*]$. При $t \in [\tau^*, t^*]$ имеем

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*)) = Y(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*)) = X(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*))$$

Справедлива при $t \in [\tau^*, t^*]$ оценка

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le d(Y(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*)), Y(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*))) +$$

$$+ d(Y(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*)), X(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*))) \le e^{L^g(t-\tau^*)}d^{\alpha,\beta}(\tau^*) + e^{L(t-\tau^*)}\int\limits_{\tau^*}^{t}\gamma(\tau)d\tau$$

В частности, справедлива оценка

$$d^{\alpha,\beta}(t^*) \le e^{L^g(t^*-\tau^*)}d^{\alpha,\beta}(\tau^*) + e^{L(t^*-\tau^*)}\int_{\tau^*}^{t^*}\gamma(\tau)d\tau \tag{3.11}$$

Рассмотрим промежуток $[t^*, \vartheta]$. При $t \in [t^*, \vartheta]$ имеют место соотношения

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t^*\ X^{(\alpha)}(t^*)) = X(t, t^*, X^{(\alpha)}(t^*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t^*, X^{(\beta)}(t^*)) = X(t, t^*, X^{(\beta)}(t^*))$$

Из этих соотношений получаем при $t \in [t^*, \vartheta]$

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L^g(t-t^*)}d^{\alpha,\beta}(t^*) \le e^{L(t-t^*)}d^{\alpha,\beta}(t^*) \tag{3.12}$$

В итоге, в варианте 2 получаем на $[t_0, \vartheta]$ оценку

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L(t-t^*)}\left(e^{L(t^*-\tau^*)}d^{\alpha,\beta}(\tau^*) + e^{L(t^*-\tau^*)}\int_{\tau^*}^{t^*}\gamma(\tau)d\tau\right) =$$

$$= e^{L(t-\tau^*)}d^{\alpha,\beta}(\tau^*) + e^{L(t-\tau^*)}\int_{\tau^*}^{t^*}\gamma(\tau)d\tau \le e^{L(t-\tau^*)}e^{L(\tau^*-\tau_*)}d^{\alpha,\beta}(\tau_*) + e^{L(t-\tau^*)}\int_{\tau^*}^{t^*}\gamma(\tau)d\tau =$$

$$= e^{L(t-\tau_*)}d^{\alpha,\beta}(\tau_*) + e^{L(t-\tau^*)}\int_{\tau^*}^{t^*}\gamma(\tau)d\tau \le e^{L(t-\tau_*)}e^{L(\tau_*-t_*)}\int_{t_*}^{\tau_*}\gamma(\tau)d\tau + e^{L(t-\tau^*)}\int_{\tau^*}^{t^*}\gamma(\tau)d\tau$$

То есть, в итоге получаем при $t \in [t_0, \vartheta]$

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L(t-t_*)}\int_{t_*}^{\tau_*}\gamma(\tau)d\tau + e^{L(t-\tau^*)}\int_{\tau^*}^{t^*}\gamma(\tau)d\tau$$

Отсюда вытекает в варианте 2 оценка

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})) \le \max_{t\in[t_0,\vartheta]} d^{\alpha,\beta}(t) \le$$

$$\le e^{L(\vartheta-t_*)}\int_{t_*}^{\tau_*}\gamma(\tau)d\tau + e^{L(\vartheta-\tau^*)}\int_{\tau^*}^{t^*}\gamma(\tau)d\tau \tag{3.13}$$

Обратимся к варианту 3. Совершенно очевидно, что этот вариант получается из варианта 1 с помощью упомянутой выше замены $t_* \leftrightarrow \tau_*$, $t^* \leftrightarrow \tau^*$. Тогда получаем оценку

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})) \le e^{L(\vartheta-t_*)}\int_{t_*}^{\tau_*}\gamma(\tau)d\tau + e^{L(\vartheta-t^*)}\int_{t^*}^{\tau^*}\gamma(\tau)d\tau \tag{3.14}$$

Рассмотрим теперь вариант 4. При $t \in [t_0, t_*]$ имеют место соотношения

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t_0, X^{(0)}) = Y(t, t_0, X^{(\alpha)}(t_*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t_0, X^{(0)}) = X(t, t_0, X^{(0)})$$

Из этих соотношений получаем

$$d^{\alpha,\beta}(t) = 0; \quad t \in [t_0, t_*]$$

При $t \in [t_*, t^*]$ имеют место соотношения

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t_0, X^{(0)}) = Y(t, t_0, X^{(0)})$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t_0, X^{(0)}) = X(t, t_0, X^{(0)}),$$

из которых следует при $t \in [t_*, t^*]$

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L(t-t_*)} \int_{t_*}^{t} \gamma(\tau) d\tau$$

В частности выполняется

$$d^{\alpha,\beta}(t^*) \le e^{L(t^*-t_*)} \int_{t_*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \tag{3.15}$$

При $t \in [t^*, \tau_*]$ имеют место соотношения

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t^*, X^{(\alpha)}(t^*)) = X(t, t^*, X^{(\alpha)}(t^*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t^*, X^{(\beta)}(t^*)) = X(t, t^*, X^{(\beta)}(t^*)),$$

из которых следует

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L^f(t-t^*)} d^{\alpha,\beta}(t^*) \le e^{L(t-t^*)} d^{\alpha,\beta}(t^*),$$

и, в частности,

$$d^{\alpha,\beta}(\tau_*) \le e^{L(\tau_*-t^*)} d^{\alpha,\beta}(t^*) \tag{3.16}$$

При $t \in [\tau_*, \tau^*]$ имеют место соотношения

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*)) = X(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*)) = Y(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*)),$$

из которых следует при $t \in [\tau_*, \tau^*]$

$$\begin{gathered} d^{\alpha,\beta}(t) \le d(Y(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*)), X(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*))) + \\ + d(X(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*)), Y(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*))) \le \\ \le e^{L^f(t-\tau_*)} d^{\alpha,\beta}(\tau_*) + e^{L^f(t-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{t} \gamma(\tau) d\tau \le e^{L(t-\tau_*)} d^{\alpha,\beta}(\tau_*) + e^{L(t-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{t} \gamma(\tau) d\tau \end{gathered}$$

В частности, выполняется

$$d^{\alpha,\beta}(\tau^*) \le e^{L(\tau^*-\tau_*)} d^{\alpha,\beta}(\tau_*) + e^{L(\tau^*-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau \tag{3.17}$$

При $t \in [\tau^*, \vartheta]$ имеют место соотношения

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*)) = X(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*)) = X(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*)),$$

из которых следует при $t \in [\tau^*, \vartheta]$

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L^f(t-\tau^*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*) \le e^{L(t-\tau^*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*)$$

В частности, имеет место

$$d^{\alpha,\beta}(\vartheta) \le e^{L(\vartheta-\tau^*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*) \tag{3.18}$$

Принимая во внимание в рассматриваемом случае варианта 4 оценки (3.15)−(3.18), а также предшествующие им оценки величины $d^{\alpha,\beta}(t)$, получаем при $t \in [\tau^*, \vartheta]$

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L(t-\tau^*)} \left(e^{L(\tau^*-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\tau^*-\tau_*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*) \right) \le$$

$$= e^{L(t-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(t-\tau_*)} d^{\alpha,\beta}(\tau_*) \le e^{L(t-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(t-\tau_*)} e^{L(\tau_*-t^*)} d^{\alpha,\beta}(t^*) \le$$

$$\le e^{L(t-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(t-t_*)} \int_{t_*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \tag{3.19}$$

Учитывая, что в рассматриваемом варианте 4 правая часть оценки (3.19) монотонно возрастает на промежутке $[t_0, \vartheta]$, получаем

$$d^{\alpha,\beta}(\vartheta) \le e^{L(\vartheta-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-t_*)} \int_{t_*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau,$$

и, значит,

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})) \le e^{L(\vartheta-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-t_*)} \int_{t_*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \tag{3.20}$$

Для того, чтобы было удобнее анализировать оценки величины $d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)}))$, $t \in [t_0, \vartheta]$, сведем вместе правые части этих оценок:

<u>Вариант 1</u>. $t_0 \le \tau_* \le t_* \le \tau^* \le t^* \le \vartheta$,

$$e^{L(\vartheta-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{t_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau;$$

<u>Вариант 2</u>. $t_0 \le t_* \le \tau_* \le \tau^* \le t^* \le \vartheta$,

$$e^{L(\vartheta-t_*)} \int_{t_*}^{\tau_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau;$$

<u>Вариант 3</u>. $t_0 \le t_* \le \tau_* \le t^* \le \tau^* \le \vartheta$,

$$e^{L(\vartheta-t_*)} \int_{t_*}^{\tau_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-t^*)} \int_{t^*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau;$$

<u>Вариант 4</u>. $t_0 \le t_* \le t^* \le \tau_* \le \tau^* \le \vartheta$,

$$e^{L(\vartheta-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-t_*)} \int_{t_*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau;$$

Еще не рассмотрены три варианта взаимного расположения промежутков α и β в $[t_0, \vartheta]$:

Вариант 5. $t_0 \le \tau_* \le t_* \le t^* \le \tau^* \le \vartheta$;

Вариант 6. $t_0 \le \tau_* \le t_* \le \tau^* \le t^* \le \vartheta$;

Вариант 7. $t_0 \le \tau_* \le \tau^* \le t_* \le t^* \le \vartheta$.

Заметим, однако, что каждый из этих вариантов получается из одного из вариантов 1–4 путем замены $t_* \leftrightarrow \tau_*$, $t^* \leftrightarrow \tau^*$. Вместе с этим правые части оценок величины $d^{\alpha,\beta}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ получаются из соответствующих правых частей оценок величины в вариантах 1–4 путем указанной замены.

Введем обозначение: $\rho(\alpha, \beta)$ – хаусдорфово расстояние между отрезками α и β на прямой $\mathbb{R}^1$.

Задача теперь заключается в том, чтобы найти универсальную мажоранту в виде функции, зависящей от $\rho(\alpha, \beta)$ для правых частей оценок величины $d^{\alpha,\beta}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ во всех четырех вариантах 1–4.

Очевидно, что во всех четырех вариантах 1–4, отрезки $\alpha = [t_*, t^*]$ и $\beta = [\tau_*, \tau^*]$ из $[t_0, \vartheta]$ стеснены оценками:

Вариант 1. $t_* - \tau_* \le \rho(\alpha, \beta)$, $t^* - \tau^* \le \rho(\alpha, \beta)$;

Вариант 2. $\tau_* - t_* \le \rho(\alpha, \beta)$, $t^* - \tau^* \le \rho(\alpha, \beta)$;

Вариант 3. $\tau_* - t_* \le \rho(\alpha, \beta)$, $\tau^* - t^* \le \rho(\alpha, \beta)$;

Вариант 4. $t^* - t_* \le \tau_* - t_* \le \rho(\alpha, \beta)$, $\tau^* - \tau_* \le \tau^* - t^* \le \rho(\alpha, \beta)$.

Введем также параметр $\rho \in (0, \vartheta - t_0]$, множество $T^{(\rho)} = \left\{[t^{(1)}, t^{(2)}] \subset [t_0, \vartheta] : t^{(2)} - t^{(1)} \le \rho\right\}$, функцию

$$\varkappa(\rho) = \max_{[t^{(1)}, t^{(2)}] \in T^{(\rho)}} \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \gamma(t) dt, \quad \rho \in (0, \vartheta - t_0], \tag{3.21}$$

и *калибровочную* функцию

$$\varkappa^*(\rho) = 2e^{L(\vartheta - t_0)} \varkappa(\rho); \quad \rho \in (0, \vartheta - t_0] \tag{3.22}$$

Выполняется $\varkappa^*(\rho) \downarrow 0$ при $\rho \downarrow 0$.

Заметим также, что в любом из вариантов правая оценка величины $d^{\alpha,\beta}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ не превосходит величины $\varkappa^*(\rho(\alpha, \beta))$.

Покажем это для варианта 1. Для этого варианта при $t \in [t_0, \vartheta]$ имеем

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le e^{L(\vartheta - \tau_*)} \int_{\tau_*}^{t_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta - \tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \le 2e^{L(\vartheta - t_0)} \varkappa(\rho(\alpha, \beta)) = \varkappa^*(\rho(\alpha, \beta))$$

Аналогично доказывается неравенство

$$d^{\alpha,\beta}(t) \le \varkappa^*(\rho(\alpha, \beta)); \quad t \in [t_0, \vartheta] \tag{3.23}$$

для других вариантов взаимного расположения промежутков α и β из $[t_0, \vartheta]$.

Учитывая (3.23), можем сформулировать основной результат.

Теорема. Для интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$ и $X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})$ дифференциальных включений (2.10) и (3.2), соответствующих управляемым системам $\Sigma^{(\alpha)}$ и $\Sigma^{(\beta)}$, являющимися вариациями системы $\Sigma^{(f)}$, выполняется оценка сверху

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})) \le \varkappa^*(\rho(\alpha, \beta)), \tag{3.24}$$

выраженная в виде функции, зависящей от хаусдорфова расстояния между отрезками отрезки α и β из $[t_0,\vartheta]$ и заданной соотношениями (2.16), (3.21) и (3.22).

Теперь приведем рассуждения, относящиеся к калибровочной функции $\varkappa^*(\rho)$ и весьма полезные для приложений. В связи с этим обратимся к вектор-функциям $f(t,x,u)$ и $g(t,x,u)$, (t,x,u) из $D\times P^f$ и $D\times P^g$ соответственно.

Допустим, что расстояние $\rho(f,g)$ между функциями $f(t,x,u)$ и $g(t,x,u)$ удовлетворяется неравенству

$$\rho(f,g)=\max_{t\in[t_0,\vartheta]}\max_{x\in D(t),\overline{u}\in P^f,\overline{\overline{u}}\in P^g}\|f(t,x,\overline{u})-g(t,x,\overline{\overline{u}})\|\le\max_{t\in[t_0,\vartheta]}\gamma(t)\le\gamma^*;\quad \gamma^*\in(0,\infty) \tag{3.25}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\varkappa(\rho(\alpha,\beta))=\max_{[t^{(1)},t^{(2)}]\in T^{(\rho(\alpha,\beta))}}\int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\gamma(t)dt\le\rho(\alpha,\beta)\gamma^*,$$

из которого следует

$$\varkappa^*(\rho(\alpha,\beta))\le 2e^{L(\vartheta-t_0)}\gamma^*\,\rho(\alpha,\beta) \tag{3.26}$$

Значит, при ограничении (3.25), наложенном на вектор-функции $f(t,x,u)$ и $g(t,x,u)$, справедлива оценка

$$d(X^{(\alpha)}(t_0,X^{(0)}),X^{(\beta)}(t_0,X^{(0)}))\le 2e^{L(\vartheta-t_0)}\gamma^*\rho(\alpha,\beta), \tag{3.27}$$

где $\rho(\alpha,\beta)$ – хаусдорфово расстояние между промежутками α и β из $[t_0,\vartheta]$.

Оценки (3.25)–(3.27) будут использованы при решении некоторых задач управления интегральными воронками в следующем параграфе.

4. Задачи о сближении и уклонении интегральных воронок с целевым множеством в $\mathbb{R}^m$. В этом параграфе будет рассмотрена управляемая система $\Sigma^{(f)}$ на $[t_0,\vartheta]$, а также управляемая система $\Sigma^{(\alpha)}$, $\alpha=[t_*,t^*]$ на $[t_0,\vartheta]$. Наряду с ними рассматриваются начальное множество $X^{(0)}$, $(t_0,X^{(0)})\subset D$ и целевое множество $M\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, отвечающее моменту ϑ.

Сформулируем и изучим несколько задач сближения и уклонения систем $\Sigma^{(f)}$ и $\Sigma^{(\alpha)}$ с M в момент ϑ, выраженных на языке интегральных воронок $X(t_0,X^{(0)})$, $X^{(\alpha)}(t_0,X^{(0)})$ дифференциальных включений, соответствующих системам $\Sigma^{(f)}$ и $\Sigma^{(\alpha)}$.

При этом интегральные воронки $X^{(\alpha)}(t_0,X^{(0)})$, $\alpha=[t_*,t^*]\subset[t_0,\vartheta]$ трактуются как вариации интегральной воронки $X(t_0,X^{(0)})$, возникшие в результате варьирования системы $\Sigma^{(f)}$ на промежутке $\alpha=[t_*,t^*]$ на $[t_0,\vartheta]$.

Это варьирование трактуется как своеобразное управление системой $\Sigma^{(f)}$ и соответствующей ей воронкой $X(t_0,X^{(0)})$ путем выбора управляющего параметра $\alpha=[t_*,t^*]$.

Сформулируем несколько задач, связанных с управлением интегральной воронкой $X(t_0,X^{(0)})$.

Задача 1. В $\mathbb{R}^m$ заданы компакты $X^{(0)}$ и M. Требуется вычислить $\rho(X(\vartheta),M)=\min_{(x,y)\in X(\vartheta)\times M}\|x-y\|$ – расстояние между множествами $X(\vartheta)=X(\vartheta,t_0,X^{(0)})$ и M.

В задаче 1 будем интересоваться, насколько близко “подходит” “последнее” (отвечающее моменту ϑ из $[t_0,\vartheta]$) сечение $X(\vartheta)$ интегральной воронки $X(t_0,X^{(0)})$ к целевому множеству M. Этот интерес связан задачей “подвести” интегральную воронку $X(t_0,X^{(0)})$ к множеству M. Для этого будем варьировать интегральную воронку $X(t_0,X^{(0)})$, то есть применять к ней управления $\alpha=[t_*,t^*]\subset[t_0,\vartheta]$ и выяснять, насколько близко к M “подходят” в момент ϑ интегральные воронки $X^{(\alpha)}(t_0,X^{(0)})$.

В связи с этим возникает задача об оптимальном сближении интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0,X^{(0)})$, $\alpha=[t_*,t^*]$ с M.

Задача 2 (о сближении). Заданы компакты $X^{(0)}$ и M в $\mathbb{R}^m$ и число $\lambda=N_\lambda^{-1}(\vartheta-t_0)$, $N_\lambda\in\mathbb{N}$. Требуется определить промежуток $\alpha=[t_*,t^*]\subset[t_0,\vartheta]$, удовлетворяющий

$$\rho(X^{(\alpha)}(\vartheta),M)=\min\left\{\rho(X^{(\beta)}(\vartheta),M):\beta=[\eta_*,\eta^*]\subset[t_0,\vartheta],\eta^*-\eta_*=\lambda\right\}$$

Представляет интерес и дуальная к задаче 2 задача об оптимальном уклонении интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0,X^{(0)})$, $\alpha=[t_*,t^*]$ от M.

Задача 3 (об уклонении). Заданы компакты $X^{(0)}$ и M в $\mathbb{R}^m$ и число $\lambda=N_\lambda^{-1}(\vartheta-t_0)$, $N_\lambda\in\mathbb{N}$. Требуется определить такой промежуток $\alpha=[t_*,t^*]\subset[t_0,\vartheta]$, $t^*-t_*=\lambda$, что

$$\rho(X^{(\alpha)}(\vartheta),M)=\max\left\{\rho(X^{(\beta)}(\vartheta),M):\beta=[\eta_*,\eta^*]\subset[t_0,\vartheta],\eta^*-\eta_*=\lambda\right\}$$

Наряду с λ зафиксируем еще число $\rho=N_\rho^{-1}(\vartheta-t_0)$, $N_\rho\in\mathbb{N}$. При этом ρ выбираем таким, что отрезок длины ρ укладывается в отрезок длины λ целое число раз: $\dfrac{\lambda}{\rho}=\dfrac{N_\rho}{N_\lambda}\in\mathbb{N}$.

После определения чисел λ и ρ введем конечное разбиение $\Gamma^{(\rho)}=\{t_0,t_1,\ldots,t_k,\ \ldots,\ t_{N_\rho-1},t_{N_\rho}=\vartheta\}$ промежутка $[t_0,\vartheta]$ и систему отрезков $\beta_k=[t_k,t_k+\lambda]$, $k\in\overline{0,N_\rho-1}$, содержащихся в $[t_0,\vartheta]$. Очевидно, что таких отрезков длины λ будет меньше, чем N_ρ. Эту систему будем называть для краткости изложения β-системой.

Возьмем произвольный промежуток $\alpha=[t_*,t_*+\lambda]\subset[t_0,\vartheta]$. Очевидно, что найдется такой промежуток β_k из β-системы, для которого $t_*\in[t_k,t_{k+1}]$ и, значит, $d(\alpha,\beta_k)=$ $=t_*-t_k\le t_{k+1}-t_k=\rho$.

Следовательно, можем сказать, что β-система — конечная система отрезков в $[t_0,\vartheta]$ длины λ представляет собой совокупность всех отрезков α в $[t_0,\vartheta]$ длины λ с точностью до величины ρ (в хаусдорфовой метрике).

Отсюда вытекает, что для любой интегральной воронки $X^{(\alpha)}(t_0,X^{(0)})$, отвечающей отрезку $\alpha=[t_*,t_*+\lambda]$, найдется в β-системе такой отрезок $\beta_k=[t_k,t_k+\lambda]$, что

$$d(X^{(\alpha)}(t_0,X^{(0)}),X^{(\beta_k)}(t_0,X^{(0)}))\le 2e^{L(\vartheta-t_0)}\rho\gamma^* \tag{4.1}$$

Далее, отметим, что при решении задач 1–3 с конкретными управляемыми системами $\Sigma^{(f)}$ отсутствует возможность иметь дело с идеальными интегральными воронками $X^{(\alpha)}(t_0,X^{(0)})\subset D$, так как не в состоянии их вычислить. Более реально иметь дело с их дискретными (по t) аппроксимациями $X_\Gamma^{(\alpha)}(t_0,X^{(0)})=\bigcup\limits_{t_i\in\Gamma}(t_i,X_\Gamma^{(\alpha)})\subset D$. Это относится и к интегральным воронкам $X^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})$, которые заменены в неравенстве (4.1), учитывая (2.48), их аппроксимациями $X_\Gamma^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)}) \subset D$, отвечающими разбиению Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$. А именно, от оценки (4.1) переходим к оценке

$$\begin{gathered}d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X_\Gamma^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})) \le \\ \le d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})) + d(X^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)}), X_\Gamma^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})) \le \\ \le 2e^{L(\vartheta - t_0)}\rho\gamma^* + e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)\omega^*((1+K)\Delta) + (1+K)\Delta; \quad \Delta = \Delta(\Gamma)\end{gathered} \tag{4.2}$$

Тогда справедливо утверждение, что для любой интегральной воронки $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, отвечающей отрезку $\alpha = [t_*, t_* + \lambda]$ из $[t_0, \vartheta]$, в β-системе найдется такой отрезок $\beta_k = [t_k, t_k + \lambda]$, что имеет место (4.2).

Далее, зафиксируем $\varepsilon^* \in (0, \infty)$. По ε^* определим числа ρ и $\Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(\vartheta - t_0)$ так, чтобы

$$2e^{L(\vartheta - t_0)}\rho\gamma^* \le \frac{\varepsilon^*}{2} \quad \text{и} \quad e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)\omega^*((1+K)\Delta) + (1+K)\Delta \le \frac{\varepsilon^*}{2}, \tag{4.3}$$

т.е. ρ и $\Delta = \Delta(\Gamma)$ определим удовлетворяющими неравенствам

$$\begin{gathered}\rho \le \frac{1}{4}e^{L(t_0 - \vartheta)}\gamma^{*-1}\varepsilon^* \\ \omega^*((1+K)\Delta) + e^{L(t_0 - \vartheta)}(\vartheta - t_0)^{-1}(1+K)\Delta \le \frac{1}{2}e^{L(t_0 - \vartheta)}(t_0 - \vartheta)\varepsilon^*\end{gathered} \tag{4.4}$$

Кроме того, число ρ должно удовлетворять включению $\frac{\lambda}{\rho} \in \mathbb{N}$. Так выбранному ρ сопоставим разбиение Γ^ρ промежутка $[t_0, \vartheta]$ и конечную β-систему отрезков $\beta_k = [t_k, t_k + \lambda]$, $t_k \in \Gamma^\rho$, удовлетворяющих включению $\beta_k \in [t_0, \vartheta]$.

Эта конечная β-система и отвечающие ее элементам β_k множества $X_\Gamma^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})$ представляют совокупность всех интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$, $t^* - t_* = \lambda$ с точностью до величины $\varepsilon^* \in (0, \infty)$. То есть для любой интегральной воронки $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$, $t^* - t_* = \lambda$ найдется $\beta_k = [t_k, t_k + \lambda]$ из β-системы, такой, что

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X_\Gamma^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})) \le \varepsilon^* \tag{4.5}$$

Учитывая это, вместо задачи 2, сформулированной для бесконечного семейства интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t_* + \lambda] \subset [t_0, \vartheta]$, можем сформулировать задачу об оптимальном сближении, более приемлемую для конструирования решения. Эта задача формируется уже для конечного семейства множеств $X_\Gamma^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})$, где β_k из β-системы.

Задача 2,а (о сближении). Пусть $X^{(0)}$, M — компакты в $\mathbb{R}^m$ и $\varepsilon^* \in (0, \infty)$. Заданы также $\lambda = N_\lambda^{-1}(\vartheta - t_0)$, $N_\lambda \in \mathbb{N}$, конечные разбиения Γ, Γ^ρ промежутка $[t_0, \vartheta]$, удовлетворяющие (4.4), и соответствующая разбиению Γ^ρ конечная β-система отрезков $\beta_k = [t_k, t_k + \lambda] \subset [t_0, \vartheta]$, $t_k \in \Gamma^\rho$.

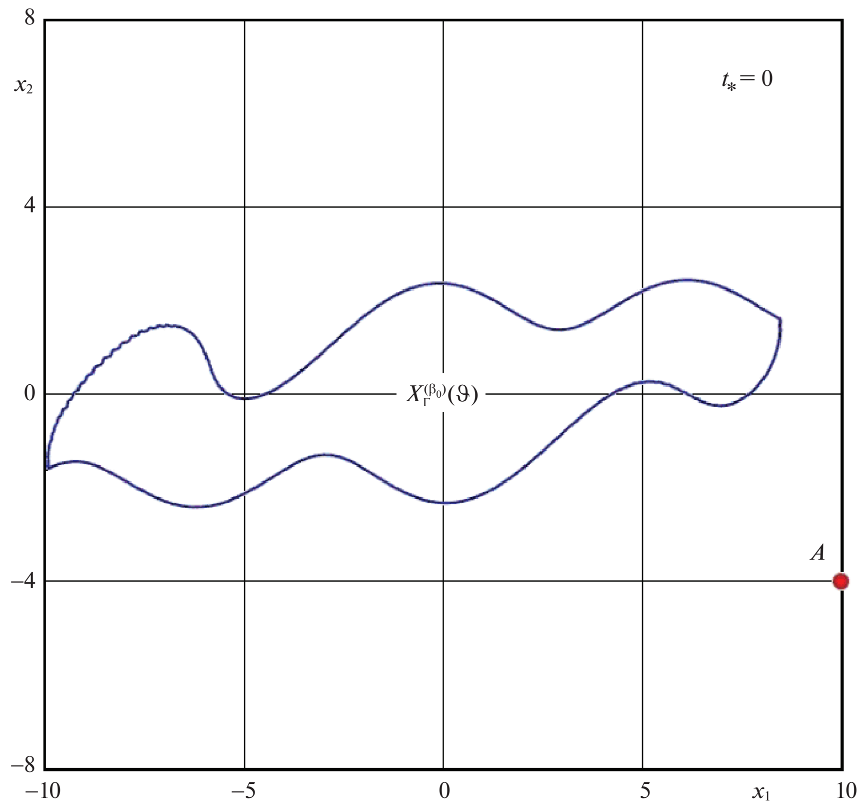

Рис. 6. $X_\Gamma^{(\beta_0)}(\vartheta)$ – аппроксимация множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ при $x^{(0)} = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, $[t_*, t^*] = [t_0, t_{30}] = [0,3]$.

Требуется определить промежуток β_{k^*} из β-системы, удовлетворяющий соотношению

$$\rho(X_\Gamma^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) = \min_{\beta_k \in \beta} \rho(X_\Gamma^{(\beta_k)}(\vartheta), M) \tag{4.6}$$

Допустим теперь, что задача 2,а решена и найден отрезок β_{k^*} из β-системы, удовлетворяющий (4.5). Из этого следует

$$\rho(X_\Gamma^{(\beta_k)}(\vartheta), M) \le \rho(X^{(\alpha)}(\vartheta), M) + d(X^{(\alpha)}(\vartheta), X_\Gamma^{(\beta_k)}(\vartheta)) \le \rho(X^{(\alpha)}(\vartheta), M) + \varepsilon^*$$

и, принимая во внимание, что $\rho(X_\Gamma^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) \le \rho(X_\Gamma^{(\beta_k)}(\vartheta), M)$, получаем

$$\rho(X_\Gamma^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) \le \rho(X^{(\alpha)}(\vartheta), M) + \varepsilon^* \tag{4.7}$$

Так как $d(X_\Gamma^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), X^{(\beta_{k^*})}(\vartheta)) \le \varepsilon^*$, то

$$\rho(X^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) \le \rho(X_\Gamma^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) + \varepsilon^* \tag{4.8}$$

Из (4.7), (4.8) следует

$$\rho(X^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) \le \rho(X^{(\alpha)}(\vartheta), M) + 2\varepsilon^* \tag{4.9}$$

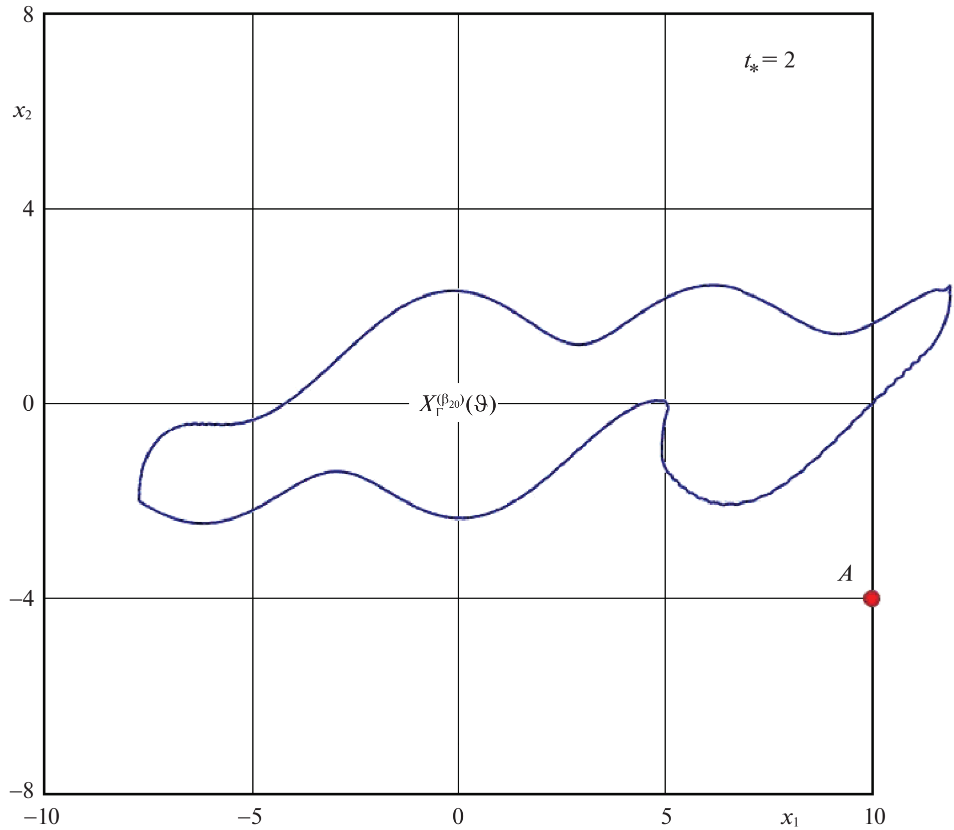

Рис. 7. $X_\Gamma^{(\beta_{20})}(\vartheta)$ – аппроксимация множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ при $x^{(0)} = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, $[t_*, t^*] = [t_{20}, t_{50}] = [2, 5]$.

Неравенство (4.9) означает, что промежуток β_{k^*} из β-системы, являющийся решением задачи 2,а, доставляет оптимальный результат с точностью до $2\varepsilon^*$ и в задаче 2 об оптимальном сближении с M интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \subset [t_0, \vartheta]$.

Так же, как и при решении задач о сближении, вместо задачи 3 об оптимальном уклонении, сформулированной для бесконечного семейства интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t_* + \lambda] \subset [t_0, \vartheta]$, сформулируем задачу об оптимальном уклонении от M для конечного семейства множеств $X_\Gamma^{(\beta_k)}(\vartheta)$, $\beta_k \in \beta$. Эта задача более приемлема для конструирования решения.

Задача 3,а (об уклонении). Пусть $X^{(0)}$, M – компакты в $\mathbb{R}^m$ и $\varepsilon^* \in (0, \infty)$. Также заданы число $\lambda = N_\lambda^{-1}(\vartheta - t_0)$, $N_\lambda \in \mathbb{N}$, конечные разбиения Γ, Γ^ρ промежутка $[t_0, \vartheta]$, удовлетворяющие (4.4), и соответствующая разбиению Γ^ρ конечная β-система отрезков $\beta_k = [t_k, t_k + \lambda] \subset [t_0, \vartheta]$, $t_k \in \Gamma^\rho$.

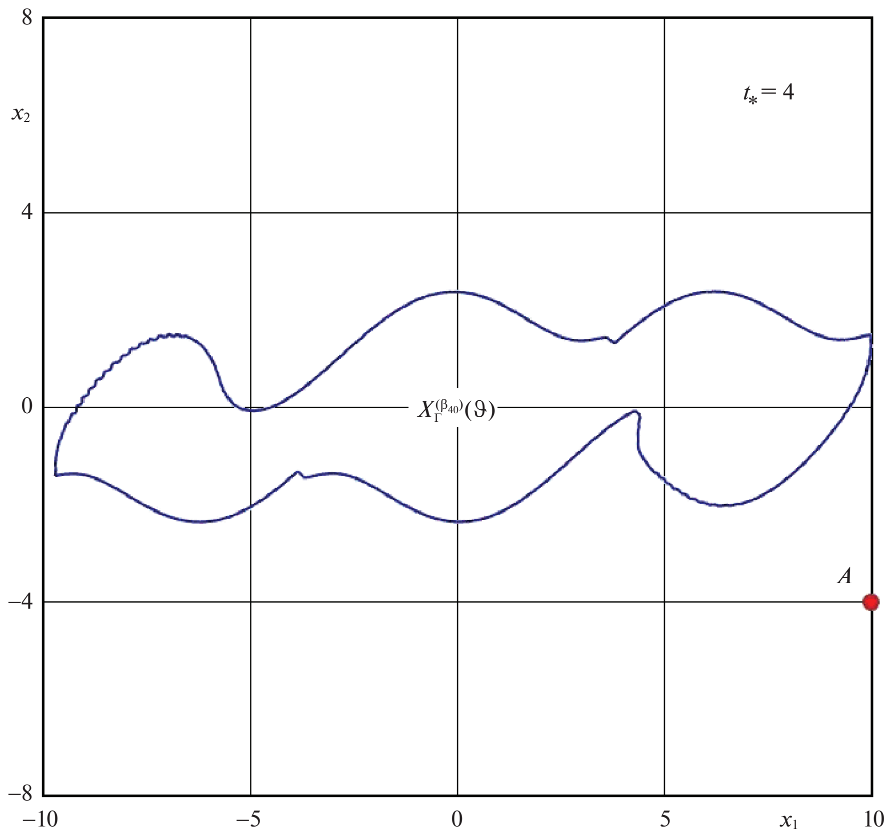

Рис. 8. $X_\Gamma^{(\beta_{40})}(\vartheta)$ – аппроксимация множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ при $x^{(0)} = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, $[t_*, t^*] = [t_{40}, t_{70}] = [4,7]$.

Требуется определить промежуток β_{k^*} из β-системы, удовлетворяющий соотношению

$$\rho(X_\Gamma^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) = \max_{\beta_k \in \beta} \rho(X_\Gamma^{(\beta_k)}(\vartheta), M) \tag{4.10}$$

Неравенство (4.10) означает, что промежуток β_{k^*} из β-системы, являющийся решением задачи 3,а, доставляет оптимальный результат с точностью до $2\varepsilon^*$ в задаче 3 об оптимальном уклонении интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t_* + \lambda] \subset [t_0, \vartheta]$ от M.

5. Пример. Пусть на промежутке времени $t \in [t_0, \vartheta] = [0,10]$ задана управляемая система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha(t)x_1 - \sin x_1 + u(t) \\ x(0) &= x^{(0)} = (0,1), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где управление $u(t) \in [-1,1]$, функция

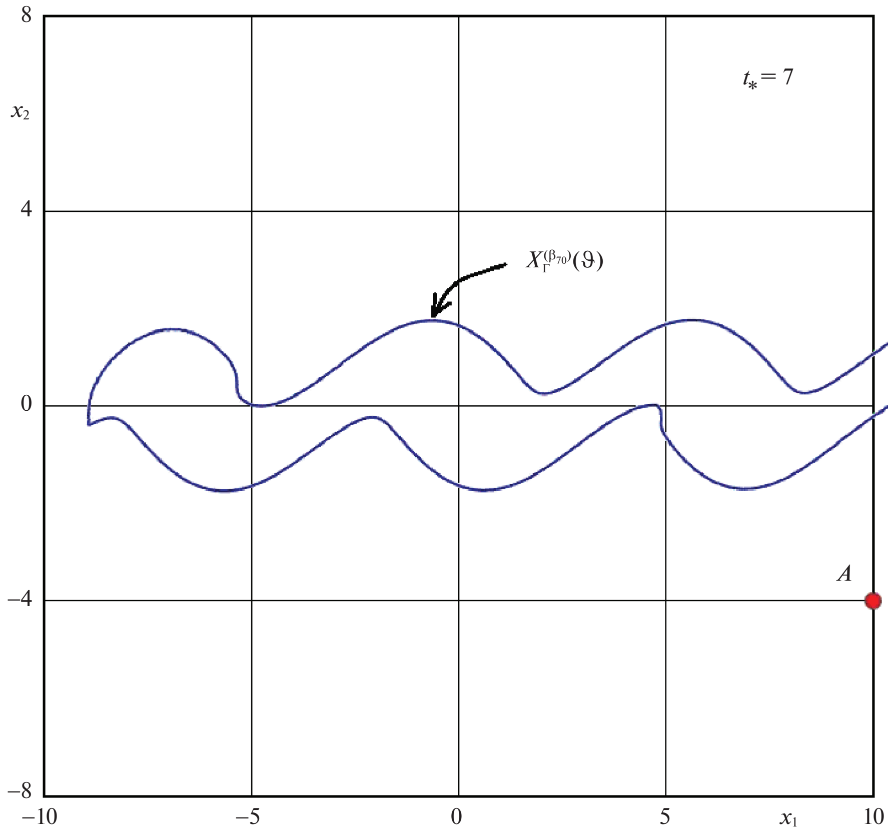

Рис. 9. $X_\Gamma^{(\beta_{70})}(\vartheta)$ – аппроксимация множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ при $x^{(0)} = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, $[t_*, t^*] = [t_{70}, t_{100}] = [7,\ 10]$.

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1] \backslash [t_*, t^*] \\ 1, & t \in [0,1] \cap [t_*, t^*], \end{cases}$$

где $t^* = t_* + 3$.

На промежутке $[t_0, \vartheta] = [0, 10]$ заданы разбиение $\Gamma = \{t_0 = 0,\ t_1,\ \ldots,\ t_k,\ \ldots,\ t_N = \vartheta\}$ с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma) = 0.1$ и соответствующая разбиению Γ конечная β-система отрезков $\beta_k = [t_k, t_k + 3] \subset [t_0, \vartheta]$, $t_k \in \Gamma$.

Символами $X^{(\beta_k)}(\vartheta)$, $k = \overline{0,\ N - 30}$ обозначим (в соответствии с предыдущим разделом) множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ системы (5.1) в конечный момент времени ϑ, соответствующие начальной позиции $(t_0, x^{(0)})$ и промежуткам $[t_*, t^*]$, $t_* = t_k$, $k = \overline{0,\ N - 30}$.

Определим целевое одноточечное множество $M = \{A\}$, где точка $A = (20, -18)$.

Для системы (5.1) сформулируем задачи 2,а и 3,а.

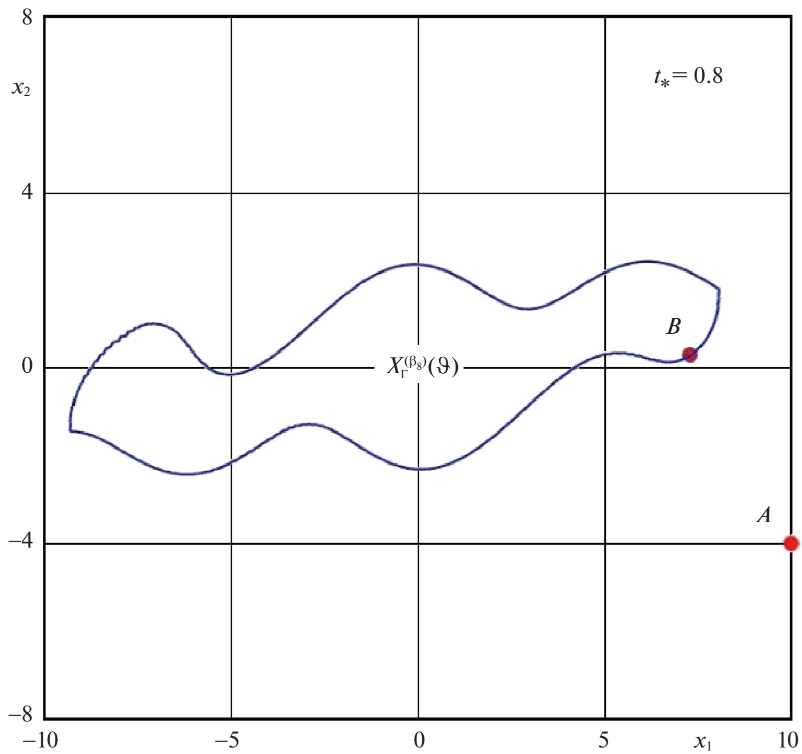

Рис. 10. $X_\Gamma^{(\beta_8)}(\vartheta)$ – аппроксимация множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ при $x^{(0)} = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, $[t_*, t^*] = [t_8, t_{38}] = [0.8, 3.8]$; точка A и ближайшая к ней точка B из $X_\Gamma^{(\beta_8)}(\vartheta)$.

Задача 2,а (о сближении). Требуется определить промежуток β_{k^*} из β-системы $\{[t_*, t^*]\colon t_* = t_k,\ k = \overline{0,\ N-30}\}$, удовлетворяющий соотношению

$$\rho(X_\Gamma^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) = \min_{\beta_k \in \beta} \rho(X_\Gamma^{(\beta_k)}(\vartheta), M)$$

Задача 3,а (об уклонении). Требуется определить промежуток β_{k^*} из β-системы, удовлетворяющий соотношению

$$\rho(X_\Gamma^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) = \max_{\beta_k \in \beta} \rho(X_\Gamma^{(\beta_k)}(\vartheta), M)$$

На рис. 6–9 изображены $X^{(\beta_k)}(\vartheta)$, соответствующие $k = 0$, 20, 40, 70. На рис. 10 и 11 изображены решения задач 2,а и 3,а, символом B обозначены проекции точки A соответственно на ближайшее к A и наиболее удаленное от A множества $X^{(\beta_k)}(\vartheta)$.

Заключение. В работе рассмотрена нелинейная управляемая система на конечном промежутке времени в конечномерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^m$. Изучена устойчивость ее интегральной воронки (последнего временнóго сечения интегральной воронки) в зависимости от скачкообразного изменения динамики системы на нескольких малых промежутках времени. Степень возмущения интегральной воронки (ее послед-

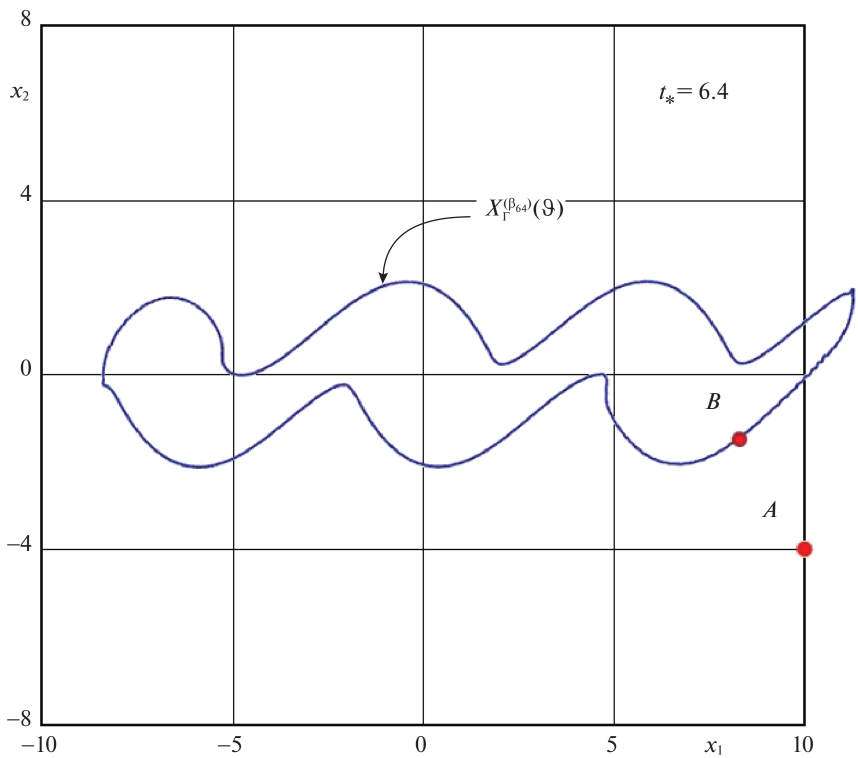

Рис. 11. $X_\Gamma^{(\beta_{64})}(\vartheta)$ – аппроксимация множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ при $x^{(0)} = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, $[t_*, t^*] = [t_{64}, t_{94}] = [6.4, 9.4]$; точка A и ближайшая к ней точка B из $X_\Gamma^{(\beta_{64})}(\vartheta)$.

них временны́х сечений) оценивается в хаусдорфовой метрике: получены экспоненциальные оценки степени возмущения. Кроме задач, связанных с получением упомянутых выше оценок, рассмотрены задачи о наведении интегральной воронки на целевое множество, либо, наоборот уклонении от него с помощью оптимального выбора одного временно́го промежутка с измененной по заранее известному закону динамикой систем. В заключительной части работы приведен пример колебательной механической управляемой системы, иллюстрирующий теорию.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00105, https://rscf.ru/project/19-11-00105/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.

2. *Куржанский А.Б.* Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009. 756 с.

3. *Шматков А.М.* Об управлении ансамблем траекторий при наличии ограниченной помехи // Изв. РАН. ТиСУ. 1995. № 4. С. 82–87.

4. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.

5. *Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Паршиков Г.В.* Метод построения разрешающего управления задачи о сближении, основанный на притягивании к множеству разрешимости // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 2. С. 270–284.
6. *Матвийчук А.Р., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Ушаков В.Н.* Задача о сближении нелинейной управляемой системы на конечном промежутке времени // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 165–187.
7. *Ершов А.А., Ушаков В.Н.* О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 9. С. 56–99.
8. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
9. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов // Изв. АН СССР. Технич. киберн. 1980. № 3. С. 3–11.
10. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов. Ч. II // Изв. АН СССР. Технич. киберн. 1980. № 4. С. 4–11.
11. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов. Ч. III // Изв. АН СССР. Технич. киберн. 1980. № 5. С. 5–11.
12. *Kurjanskii A., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Systems & Control: Foundations & Applications. Basel: Birkhäuser Basel and IIASA, 1997. 321 p.
13. *Schweppe F.C.* Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. AC-13. № 1. P. 22–28.
14. *Bertsekas D.P., Rhodes J.B.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. AC-16. № 2. P. 117–128.
15. *Гусев М.И.* Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94.
16. *Филиппова Т.Ф.* Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 223–232.
17. *Черноусько Ф.Л.* Оценка множеств достижимости линейных систем с неопределенной матрицей // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 1. С. 32–34.
18. *Рокитянский Д.Я.* Возмущенные линейные отображения множеств // Изв. РАН. ТиСУ. 1996. № 6. С. 110–116.
19. *Костоусова Е.К.* Об ограниченности и неограниченности внешних полиэдральных оценок множеств достижимости линейных дифференциальных систем // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 134–145.
20. *Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.* Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // ПММ. 1998. Т. 62. № 2. С. 179–187.
21. *Никольский М.С.* Об аппроксимации множества достижимости дифференциального включения // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1987. № 4. С. 31–34.
22. *Lempio F., Veliov V.M.* Discrete approximation of differential inclusions // Bayr. Math. Schriften. 1998. V. 54. P. 149–232.
23. *Ананьевский И.М.* Управление нелинейной колебательной системой четвертого порядка с неизвестными параметрами // Автомат. и телемех. 2001. № 3. С. 3–15.
24. *Ананьевский И.М.* Синтез управления линейными системами с помощью методов теории устойчивости движения // Дифференц. уравн. 2003. Т. 39. № 1. С. 3–11.
25. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: Ленанд, 2014. 560 с.
26. *Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В. и др.* Управление маятником при помощи маховика. Спецпрактикум по теоретической и прикладной механике / Под ред. *В.В. Александрова*. М.: Изд-во МГУ, 2009. С. 170–195.
27. *Горнов А.Ю., Тятюшкин А.И., Финкельштейн Е.А.* Численные методы для решения терминальных задач оптимального управления // ЖВММФ. 2016. Т. 56. № 2. С. 224–237.

On Integral Funnel of Control Systems, Changed at Several Small Time Interval

V. N. Ushakov[a,#], **A. A. Ershov**[a,##], **and A. V. Ushakov**[a,###]

[a]*N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russia*
[#]*e-mail: ushak@imm.uran.ru*
[##]*e-mail: ale10919@yandex.ru*
[###]*e-mail: aushakov.pk@gmail.com*

A nonlinear control system in a finite-dimensional Euclidean space and on a finite time interval is considered, the dynamics of which changes significantly over several small sections from a given time interval. We study the degree of change in the reachable sets and integral funnels of the system under consideration when it varies in these sections. The corresponding changes are estimated in the Hausdorff metric.

Keywords: control system, differential inclusion, reachable set, integral funnel, variable structure, system variation, Hausdorff distance

REFERENCES

1. *Krasovskii N.N.* Dynamical System Control. Moscow: Nauka, 1985. 520 p. (in Russian)
2. *Kurjanskii A.B.* Selected Works. Moscow: MSU Publ., 2009. 756 p. (in Russian)
3. *Shmatkov A.M.* Control of systems with inteference of bounded magnitude // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 1995, vol. 33, no. 5, pp. 57–63. https://elibrary.ru/item.asp?id=31080527
4. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Positional Differential Games. Moscow: Fizmatlit, 1974. 456 p. (in Russian)
5. *Ushakov V.N., Matviichuk A.R., Parshikov G.V.* A method for constructing a resolving control in an approach problem based on attraction to the feasibility set // Proc. Steklov Inst. Math., 2014, vol. 284, suppl. 1, pp. S135–S144.
6. *Matviychuk A.R., Ukhobotov V.I., Ushakov A.V., Ushakov V.N.* The approach problem of a nonlinear controlled system in a finite time interval // JAMM, 2017, vol. 81, no. 2, pp. 114–128.
7. *Ershov A.A., Ushakov V.N.* An approach problem for a control system with an unknown parameter // Sb.: Math., 2017, vol. 208, no. 9, pp. 1312–1352.
8. *Chernous'ko F.L.* State Estimation for Dynamic Systems. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994. 320 p.
9. *Chernous'ko F.L.* Optimal guaranteed estimates of indeterminacies with the aid of ellipsoids. I // Eng. Cybern., 1980, vol. 18, no. 3, pp. 1–9.
10. *Chernous'ko F.L.* Optimal guaranteed estimates of indeterminacy with the aid of ellipsoids. II // Eng. Cybern., 1980, vol. 18, no. 4, pp. 1–9.
11. *Chernous'ko F.L.* Optimal guaranteed estimates of indeterminacy with the aid of ellipsoids. III // Eng. Cybern., 1980, vol. 18, no. 5, pp. 3–9.
12. *Kurjanskii A., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Systems & Control: Foundations & Applications. Basel: Birkhäuser Basel and IIASA, 1997. 321 p.
13. *Schweppe F.C.* Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Trans. Automat. Control, 1968, vol. AC_13, no. 1, pp. 22–28.
14. *Bertsekas D.P., Rhodes J.B.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control, 1971, vol. AC-16, no. 2, pp. 117–128.
15. *Gusev V.I.* Estimates of reachable sets of multidimensional control systems with nonlinear interconnections // Proc. Steklov Inst. Math., 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S134–S146.
16. *Filippova T.F.* Differential equations for ellipsoidal estimates for reachable sets of a nonlinear dynamical control system // Proc. Steklov Inst. Math., 2010, vol. 271, suppl. 1, pp. S75–S84.
17. *Chernousko F.L.* Estimation of the attainability sets of linear systems with an indeterminate matrix // Dokl. Math., 1996, vol. 54, no. 1, pp. 634–636.
18. *Rokityanskii D.Y.* Perturbed linear mapping of sets // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 1996, vol. 35, no. 6, pp. 948–954.

19. *Kostousova E.K.* On the boundedness and unboundedness of external polyhedral estimates for reachable sets of linear differential systems // Proc. Steklov Inst. Math., 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S162–S173.
20. *Guseinov K.G., Moiseyev A.A., Ushakov V.N.* The approximation of reachable domains of control systems // JAMM, 1998, vol. 62, no. 2, pp. 169–175.
21. *Nikol'skii M.S.* On the approximation of the reachable set of a differential inclusion // Moscow Univ. Bull. Ser. 15. Comput. Math.&Cybern., 1987, no. 4, pp. 31–34. (in Russian)
22. *Lempio F., Veliov V.M.* Discrete approximation of differential inclusions // Bayr. Math. Schriften, 1998, vol. 54, pp. 149–232.
23. *Anan'evskii I.M.* Control of a nonlinear vibratory system of the fourth order with unknown parameters // Automat.&Remote Control, 2001, vol. 62, pp. 343–355.
24. *Anan'evskii I.M.* Control synthesis for linear systems by methods of stability theory of motion // Differ. Eqns., 2003, vol. 39, pp. 1–10.
25. *Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Control of Linear Systems under External Disturbances: Technique of Linear Matrix Inequalities. Moscow: Lenand, 2014. 560 p.
26. *Beznos A.V., Grishin A.A., Lenskiy A.V. et al.* Control of the Pendulum Using a Flywheel. Special workshop on theoretical and applied mechanics / Ed. by *V.V. Alexandrov.* Moscow: MSU Publ., 2009. pp. 170–195. (in Russian)
27. *Gornov A.Yu., Tyatyushkin A.I., Finkelstein E.A.* Numerical methods for solving terminal optimal control problems // Comput. Math. Math. Phys., 2016, vol. 56, no. 2, pp. 221–234.