ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2023, том 87, № 5, с. 883–898

УДК 539.374

К РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ИЗОГНУТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ

Г. М. Севастьянов[1,*]

[1]*Институт машиноведения и металлургии ХФИЦ ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия*
**e-mail: akela.86@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.
После доработки 05.06.2023 г.
Принята к публикации 15.07.2023 г.

В работе приведено замкнутое аналитическое решение задачи плоской деформации о релаксации напряжений в пластине, вязкие свойства которой различаются при растяжении и сжатии. Обратимые и необратимые деформации полагаются конечными. Используется линейно-вязкая модель на основе эквивалентного напряжения, которое является кусочно-линейной функцией главных напряжений с параметром разносопротивляемости. Обсуждаются характерные для этой модели особенности решения.

Ключевые слова: вязкоупругость, ползучесть, изгиб, разносопротивляемость

DOI: 10.31857/S0032823523050132, **EDN:** QPGCOZ

1. Введение. Механические свойства материалов могут заметно различаться при растяжении и сжатии. Упругие эффекты такого рода обсуждались в различных работах [1–7], для их описания были созданы специальные разномодульные теории упругости. Упомянем недавнее исследование, в котором такая теория строится для нелинейно-упругих материалов [8]. В теории пластичности также известны модели, способные учитывать асимметрию в поведении материала [9–11]. Описание материалов, для которых вязкие свойства различаются при сжатии и растяжении (см., например, [12–19]), может быть дано на основе специального выбора эквивалентного напряжения в потенциальных законах ползучести [20–22].

На рис. 1 приведена иллюстрация разносопротивляемости вязкой деформации растяжения и сжатия. Изображены диаграммы “скорость деформации–напряжение” для двух линейно-вязких материалов. Для каждого из них эффективные коэффициенты вязкости при сжатии и растяжении различаются в четыре раза, но для одного из них выше вязкость при сжатии, а для второго наоборот.

В недавнем исследовании [23] получены аналитические решения о релаксации напряжений в изогнутой в условиях плоской деформации пластине для двух линейно-вязких моделей разносопротивляющегося материала с гладкими потенциалами ползучести. В отличие от [23], здесь проведено исследование той же задачи для кусочно-линейного потенциала ползучести и обсуждаются качественные различия решений.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 приведена постановка задачи. В разд. 3 приведены общие соотношения модели материала. В разд. 4 кратко изложено известное решение об упругом изгибе несжимаемой нелинейно-упругой пластины. В исследовании используется несжимаемая упругая модель Генки, как наиболее простая и, вместе с тем, корректно описывающая достаточно широкий спектр материалов

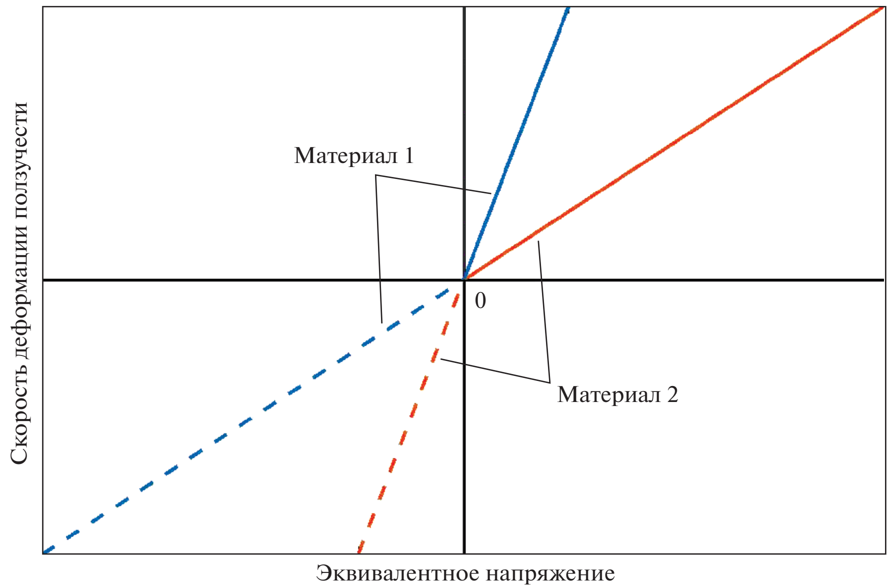

Рис. 1. Разносопротивляемость вязкой деформации сжатия/растяжения.

при умеренных упругих деформациях. Далее разносопротивляемость материала при чисто упругой деформации не учитывается, что позволяет сосредоточиться исключительно на вязких эффектах. В разд. 5 получено решение задачи релаксации пластины для тензорно-линейного закона ползучести материала с эквивалентным напряжением σ_{eq}, описывающим разносопротивляемость вязкой деформации. Это эквивалентное напряжение представляет собой кусочно-линейную функцию главных напряжений, в которую входит параметр материала, отвечающий за разносопротивляемость. Поверхность $\sigma_{\text{eq}} = \text{const}$ представляет собой шестигранник лежащий на гидростатической оси (для двух предельных значений параметра разносопротивляемости шестигранник вырождается в треугольную призму) [20–22]. Процесс релаксации напряжений в изогнутой пластине проходит в две стадии. На первой стадии напряженное состояние в той части изогнутой пластины, которая сжата в продольном направлении X_2 (см. рис. 2), соответствует одной из граней шестигранника, а напряженное состояние в точках растянутой части пластины соответствует противоположной грани шестигранника. В определенный момент времени напряженное состояние каждой точки пластины выходит на смежное с соответствующей гранью шестигранника ребро и начинается вторая стадия релаксации. В конце разд. 5 приведено замкнутое аналитическое решение для релаксации изгибающего момента. В разд. 6 обсуждаются свойства полученного решения в сравнении с другими моделями разносопротивляемости.

2. Постановка задачи. Прямоугольная пластина в недеформированном состоянии в декартовой системе координат $OX_1X_2X_3$ с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ограничена неравенствами $0 \le X_1 \le H$, $-L/2 \le X_2 \le +L/2$, $-1/2 \le X_3 \le +1/2$ (рис. 2). К пластине приложен изгибающий момент M, вследствие чего пластина деформируется симметрично относительно плоскости OX_1X_3. Деформированная пластина может быть описана в цилиндрической системе координат $Or\varphi z$ с базисными векторами $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$.

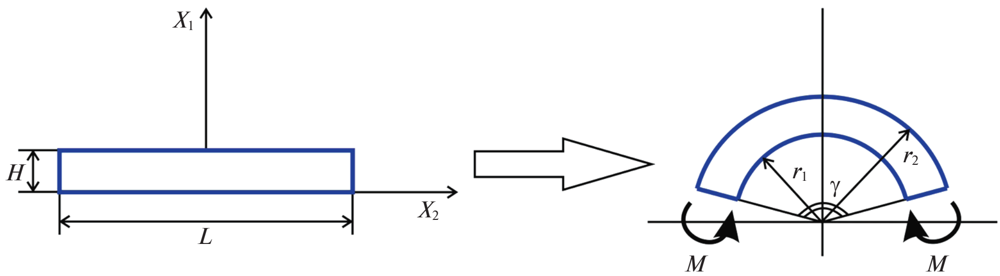

Рис. 2. Изгиб пластины в условиях плоской деформации.

Полагается, что изгиб происходит в условиях плоской деформации (для чего требуются ограничения на торцах пластины, находящихся в плоскости OX_1X_2). Активное нагружение полагается достаточно быстрым, чтобы можно было пренебречь действием вязких эффектов при деформировании.

Изогнутая пластина зафиксирована от перемещений и рассматривается процесс релаксации напряжений за счет вязких эффектов, в частности, определяется эволюция изгибающего момента.

3. Модель материала. Кинематика больших деформаций принимается в виде мультипликативного разложения [24] тензора градиента деформации $\mathbf{F}$ на обратимую (упругую) $\mathbf{F}^e$ и необратимую (вязкую) $\mathbf{F}^c$ составляющие

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e\mathbf{F}^c \tag{3.1}$$

Ниже используется простейшая модель несжимаемого материала Генки с упругим законом

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{h}^e \quad \text{или} \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - (1/3)\,\mathbf{I}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{h}^e \tag{3.2}$$

Здесь μ имеет тот же смысл, что модуль сдвига в линейной теории упругости; $\boldsymbol{\sigma}$ есть тензор напряжений Коши; $\mathbf{I}$ есть единичный тензор; $\mathbf{s}$ есть девиатор напряжений; $\mathbf{h}^e = \ln\mathbf{V}^e$ есть упругий логарифмический тензор деформации Генки, $\left(\mathbf{V}^e\right)^2 = \mathbf{B}^e = \mathbf{F}^e\left(\mathbf{F}^e\right)^T$, где $\mathbf{B}^e$ есть упругий левый тензор деформации Коши–Грина, $\mathbf{V}^e$ есть упругий левый (пространственный) тензор растяжений; учтено, что для несжимаемого материала $\mathrm{tr}\,\mathbf{h}^e = 0$; скалярная функция p вводится из-за ограничений несжимаемости.

Необратимая (вязкая) деформация материала описывается линейным законом ползучести вида

$$W = \frac{\sigma_{\text{eq}}^2}{2\eta}, \quad \mathbf{D}^c = \frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{dW}{d\sigma_{\text{eq}}}\frac{\partial\sigma_{\text{eq}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\eta}\frac{\partial\sigma_{\text{eq}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.3}$$

Здесь $W = W(\sigma_{\text{eq}})$ есть потенциал ползучести; σ_{eq} есть эквивалентное напряжение; $\mathbf{D}^c$ есть тензор скорости необратимой деформации; η есть коэффициент вязкости. Если положить $\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{J_2}$, где $J_2 = (1/2)\,\mathrm{tr}\,\mathbf{s}^2$, или, альтернативно, $\sigma_{\text{eq}} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, где σ_1 и σ_3 есть наибольшее и наименьшее главные напряжения, то получим обычную линейную вязкоупругую модель без разносопротивляемости растяжению/сжатию.

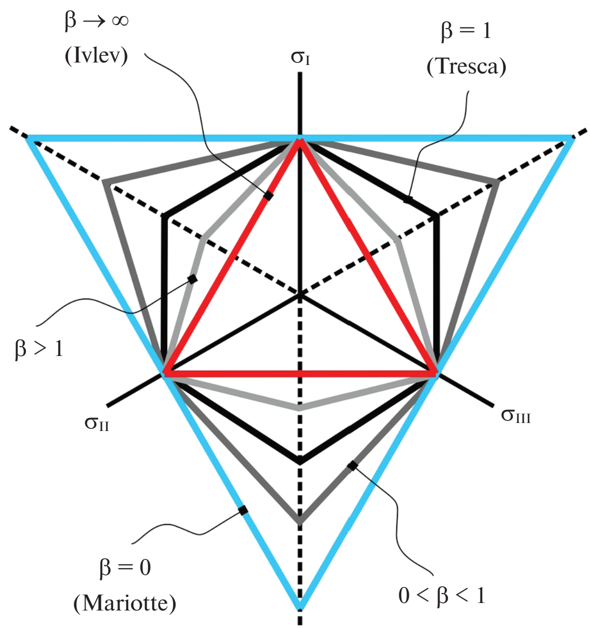

Рис. 3. Сечение девиаторной плоскостью поверхностей $\sigma_{eq} = \text{const}$ (формула (3.4)).

Будем использовать следующее определение эквивалентного напряжения [20–22]

$$\sigma_{eq} = \frac{3}{2}\frac{s_1 - \beta s_3}{2+\beta} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \frac{-1+\beta}{2+\beta}\sigma_2 + \frac{-1-2\beta}{2+\beta}\sigma_3\right), \tag{3.4}$$

где параметр материала $\beta \geq 0$ отвечает за разносопротивляемость вязкой деформации, s_1 и s_3 есть наибольшее и наименьшее собственные значения девиатора напряжений $\mathbf{s}$. Сечения поверхностей $\sigma_{eq} = \text{const}$ девиаторной плоскостью при различных значениях параметра β изображены на рис. 3. При $\beta = 1$ эквивалентное напряжение $\sigma_{eq} = (s_1 - s_3)/2$ соответствует призме Треска (материал не проявляет разносопротивляемость). Предельным значениям параметра разносопротивляемости $\beta = 0$ и $\beta \to \infty$ соответствуют треугольные призмы Мариотта и Ивлева [25] с $\sigma_{eq} = 3s_1/4$ и $\sigma_{eq} = -3s_3/2$. Для этих предельных поверхностей эквивалентные напряжения при одноосных напряженных состояниях сжатия и растяжения одинаковой по модулю нагрузкой различаются в два раза (при $\beta = 0$ больше эквивалентное напряжение в случае растяжения, при $\beta \to \infty$ наоборот). Промежуточным значениям β соответствуют шестиугольные призмы.

Используемая модель с эквивалентным напряжением (3.4) описывает разносопротивляемость вязкой деформации. Действительно, при одноосном растяжении $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = T > 0$, $s_1 = 2\sigma_1/3$, $s_2 = s_3 = -\sigma_1/3$. При одноосном сжатии $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = T < 0$, $s_1 = s_2 = -\sigma_3/3$, $s_3 = 2\sigma_3/3$. Тогда по (3.4) при растяжении $\sigma_{eq} = T/2$ и скорость деформации ползучести в направлении действия растягивающей силы есть

$$D_{\text{tens}}^c = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\eta}\frac{\partial\sigma_{\text{eq}}}{\partial\sigma_1} = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\eta}\left(\frac{\partial\sigma_{\text{eq}}}{\partial s_1}\frac{\partial s_1}{\partial\sigma_1} + \frac{\partial\sigma_{\text{eq}}}{\partial s_3}\frac{\partial s_3}{\partial\sigma_1}\right) = \frac{T}{4\eta},$$

а при сжатии $\sigma_{\text{eq}} = -\frac{1+2\beta}{2+\beta}\frac{T}{2} > 0$ и скорость деформации ползучести в направлении действия сжимающей силы есть

$$D_{\text{comp}}^c = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\eta}\frac{\partial\sigma_{\text{eq}}}{\partial\sigma_3} = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\eta}\left(\frac{\partial\sigma_{\text{eq}}}{\partial s_1}\frac{\partial s_1}{\partial\sigma_3} + \frac{\partial\sigma_{\text{eq}}}{\partial s_3}\frac{\partial s_3}{\partial\sigma_3}\right) = \frac{T}{4\eta}\left(\frac{1+2\beta}{2+\beta}\right)^2$$

Здесь T есть нормальное напряжение на площадке, перпендикулярной направлению сжатия/растяжения; $T > 0$ для растяжения, $T < 0$ для сжатия.

Если $\beta = B > 1$, то скорости необратимой деформации при одноосном нагружении сжатия и растяжения одинаковой по модулю нагрузкой соотносятся как

$$\left|\frac{D_{\text{comp}}^c}{D_{\text{tens}}^c}\right| = \left(\frac{1+2B}{2+B}\right)^2 = A > 1$$

Если же $\beta = 1/B < 1$, то

$$\left|\frac{D_{\text{comp}}^c}{D_{\text{tens}}^c}\right| = \left(\frac{2+B}{1+2B}\right)^2 = \frac{1}{A} < 1$$

То есть, если для материала 2 на рис. 1 $\beta = B$, то для материала 1 $\beta = 1/B$. Учитывая, что $\beta \geq 0$, используемая модель способна описать разносопротивляемость вязкой деформации в ограниченном, хотя и достаточно широком, диапазоне: при $\beta = 0$ $\left|D_{\text{comp}}^c / D_{\text{tens}}^c\right| = 1/4$, при $\beta \to \infty$ $\left|D_{\text{comp}}^c / D_{\text{tens}}^c\right| = 4$.

4. Предварительная упругая деформация изгиба в несжимаемой нелинейно-упругой пластине. Кинематика изгиба в условиях плоской деформации описывается уравнениями [26–28]:

$$r = \sqrt{B + \frac{2X_1}{A}}, \quad \varphi = AX_2, \quad z = X_3$$

Внутренний и внешний радиусы кривизны изогнутой пластины могут быть выражены в виде

$$r_1 = \sqrt{B}, \quad r_2 = \sqrt{B + \frac{2H}{A}}; \quad A = \frac{\gamma}{L}, \quad B = \frac{1}{A^2}\left(\sqrt{1+(AH)^2} - AH\right)$$

Здесь γ угол изгиба, L и H – длина и толщина пластины соответственно (см. рис. 2). Кроме того, справедливо равенство $r_1 r_2 = A^{-2}$ [26].

Градиент деформации диагональный, $\mathbf{F} = (Ar)^{-1}\,\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_1 + Ar\,\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_3$. Тензор деформации Генки также диагональный, имеет вид $\mathbf{h} = -\ln(Ar)\,\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \ln(Ar)\,\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi$.

Замечание. Поскольку градиент деформации $\mathbf{F}$ в рассматриваемой задаче диагональный (в смешанном координатном базисе), то, полагая, что это свойство имеют также $\mathbf{F}^e$ и $\mathbf{F}^c$, из (3.1) дифференцированием по времени можно получить

$$\dot{\mathbf{F}}^e\left(\mathbf{F}^e\right)^{-1} = \mathbf{D} - \mathbf{D}^c,$$

где $\mathbf{D} = \operatorname{sym}\left(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\right)$, $\mathbf{D}^c = \operatorname{sym}\left(\dot{\mathbf{F}}^c\left(\mathbf{F}^c\right)^{-1}\right)$, $2\operatorname{sym}(\ ) = (\ ) + (\ )^T$. Здесь точка над символом означает полную производную по времени.

С другой стороны, для диагональных $\mathbf{F}^e$ и $\mathbf{h}^e = \ln\left[\mathbf{F}^e\left(\mathbf{F}^e\right)^T\right]^{1/2}$ верно, что

$$\dot{\mathbf{h}}^e = \dot{\mathbf{F}}^e\left(\mathbf{F}^e\right)^{-1}$$

Приравнивая последние формулы, имеем

$$\dot{\mathbf{h}}^e = \mathbf{D} - \mathbf{D}^c \tag{4.1}$$

Везде далее вместо формулы (3.1) будет использоваться (4.1).

Учитывая, что при чисто упругом деформировании $\mathbf{h}^e = \mathbf{h}$, имеем

$$s_{rr} = -s_{\varphi\varphi} = -2\mu\ln(Ar), \quad s_{zz} = 0 \tag{4.2}$$

Изгибающий момент на единицу длины в направлении $z = X_3$ есть

$$M = \int_{r_1}^{r_2}\sigma_{\varphi\varphi}rdr = \int_{r_1}^{r_2}\sigma_{rr}rdr + 2\mu\int_{r_1}^{r_2}\left(h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr}\right)rdr = \frac{1}{2}\underbrace{\left[r^2\sigma_{rr}\right]_{r_1}^{r_2}}_{0} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{d\sigma_{rr}}{dr}r^2dr + 2\mu\int_{r_1}^{r_2}\left(h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr}\right)rdr = -\mu\int_{r_1}^{r_2}\left(h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr}\right)rdr +$$

$$+ 2\mu\int_{r_1}^{r_2}\left(h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr}\right)rdr = \mu\int_{r_1}^{r_2}\left(h^e_{\varphi\varphi} - h^e_{rr}\right)rdr = \frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2}\left(s_{\varphi\varphi} - s_{rr}\right)rdr \tag{4.3}$$

Здесь в первой строке использован упругий закон (3.2); во второй строке использовано интегрирование по частям и тот факт, что поверхности пластины свободны от напряжений, т.е. $\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$; в третьей строке использовано уравнение равновесия $r\,d\sigma_{rr}/dr = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$.

Формула (4.3) верна и при релаксации напряжений; релаксация изгибающего момента однозначно определяется изменением функции $\left(s_{\varphi\varphi} - s_{rr}\right)$ во времени. Начальная величина изгибающего момента определяется по (4.3) с учетом упругого решения (4.2):

$$M_0 = 2\mu\int_{r_1}^{r_2}\ln(Ar)rdr$$

5. Релаксация напряжений в пластине

5.1. Начальный этап релаксации. С момента времени $t = 0$ начинается релаксация напряжений в пластине, которая приводит к снижению приложенного изгибающего момента. Поскольку материал полностью зафиксирован от перемещений, то в формуле (4.1) $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, а полная производная по времени совпадает с частной производной:

$$\frac{\partial\mathbf{h}^e}{\partial t} = -\mathbf{D}^c$$

Используя упругий закон $\mathbf{s} = 2\mu\mathbf{h}^e$, можно записать предыдущее равенство в виде

$$\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial t} = -2\mu\mathbf{D}^c \tag{5.1}$$

Согласно (4.2) в упруго изогнутой пластине в начальный момент времени во внутреннем слое ($r < 1/A$) $s_{rr} = s_1 > 0$, $s_{\varphi\varphi} = s_3 < 0$, $s_{zz} = s_2 = 0$. Во внешнем слое ($r > 1/A$) наоборот, $s_{rr} = s_3 < 0$, $s_{\varphi\varphi} = s_1 > 0$, $s_{zz} = s_2 = 0$. Тогда по (3.3) и (3.4) имеем следующие равенства для компонент скорости необратимой деформации.

Во внутреннем слое

$$D_{rr}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta} > 0, \quad D_{\varphi\varphi}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta}\frac{-1-2\beta}{2+\beta} < 0, \quad D_{zz}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta}\frac{-1+\beta}{\beta+2} \tag{5.2}$$

Во внешнем слое

$$D_{rr}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta}\frac{-1-2\beta}{\beta+2} < 0, \quad D_{\varphi\varphi}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta}\frac{2+\beta}{\beta+2} > 0, \quad D_{zz}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta}\frac{-1+\beta}{\beta+2} \tag{5.3}$$

Знак D_{zz}^c определяется величиной β: если $\beta > 1$, то $D_{zz}^c > 0$; если $0 \le \beta < 1$, то $D_{zz}^c < 0$. При этом поскольку $-1 - 2\beta < -1 + \beta < 2 + \beta$, то D_{zz}^c в любом случае является промежуточным главным значением тензора скорости необратимой деформации. Во внутреннем слое $D_{rr}^c = D_1^c$, $D_{\varphi\varphi}^c = D_3^c$; во внешнем слое наоборот, $D_{rr}^c = D_3^c$, $D_{\varphi\varphi}^c = D_1^c$. Здесь и далее D_1^c, D_3^c, D_2^c есть наибольшее, наименьшее и промежуточное главные значения тензора $\mathbf{D}^c$. Выражения (5.2) и (5.3) верны до тех пор, пока s_{zz} остается промежуточным главным значением девиатора напряжений. Пока это верно, координатное направление, соответствующее максимальному главному значению девиатора напряжений, совпадает с координатным направлением максимального главного значения тензора скорости необратимой деформации (и то же самое для минимальных главных значений). В этом случае из (5.1) с учетом (3.3) и (3.4) для произвольных чисел a и b можно получить

$$\frac{\partial(as_1 - bs_2 - cs_3)}{\partial t} = -2\mu\left(aD_1^c - bD_2^c - cD_3^c\right) = -\sigma_{eq}\frac{\mu}{\eta}\left(a + b\frac{1-\beta}{2+\beta} + c\frac{1+2\beta}{2+\beta}\right) \tag{5.4}$$

Если в (5.4) выбрать $a = \frac{3}{2}\frac{1}{2+\beta}$, $b = 0$ и $c = \frac{3}{2}\frac{\beta}{2+\beta}$, то имеем

$$\frac{\partial\sigma_{eq}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}\frac{s_1 - \beta s_3}{2+\beta}\right) = -\sigma_{eq}\frac{\mu}{\eta}\frac{3\left(1+\beta+\beta^2\right)}{(2+\beta)^2} \tag{5.5}$$

а если выбрать $a = 1$, $b = 0$ и $c = 1$, то можно получить

$$\frac{\partial(s_1 - s_3)}{\partial t} = -3\sigma_{eq}\frac{\mu}{\eta}\frac{1+\beta}{2+\beta} \tag{5.6}$$

Первое из этих уравнений есть обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, которое позволяет найти эволюцию эквивалентного напряжения (3.4):

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}^0 e^{-\frac{3\left(1+\beta+\beta^2\right)}{(2+\beta)^2}\frac{\mu}{\eta}t}, \quad \sigma_{eq}^0(r) = 3\mu\frac{1+\beta}{2+\beta}\left|\ln(Ar)\right| \tag{5.7}$$

Здесь для определения константы интегрирования использовано начальное условие – распределение эквивалентного напряжения в начальный момент времени $\sigma_{eq}(r,0) = \sigma_{eq}^0(r)$, которое определяется упругим решением (4.2).

Уравнение (5.6) удовлетворяется непосредственным интегрированием и позволяет найти разность $(s_1 - s_3)$ как функцию времени:

$$s_1 - s_3 = 4\mu\left\{1 + \frac{3}{4}\frac{(1+\beta)^2}{1+\beta+\beta^2}\left[e^{-\frac{3\left(1+\beta+\beta^2\right)}{(2+\beta)^2}\frac{\mu}{\eta}t} - 1\right]\right\}\left|\ln(Ar)\right|$$

Начальное условие при этом также определяется упругим решением (4.2): в момент времени $t = 0$ разница максимального и минимального главных напряжений есть $4\mu\left|\ln(Ar)\right|$.

Во внутреннем слое $(r < 1/A)$ $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = -(s_1 - s_3)$, во внешнем слое $(r > 1/A)$ $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = s_1 - s_3$. Следовательно, по формуле (4.3) может быть найдена релаксация изгибающего момента:

$$M = \frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2}(s_{\varphi\varphi} - s_{rr})\,rdr = -\frac{1}{2}\int_{r_1}^{1/A}(s_1 - s_3)\,rdr + \frac{1}{2}\int_{1/A}^{r_2}(s_1 - s_3)\,rdr =$$

$$= M_0\left\{1 + \frac{3}{4}\frac{(1+\beta)^2}{1+\beta+\beta^2}\left[e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)}{(2+\beta)^2}\frac{\mu}{\eta}t} - 1\right]\right\}, \tag{5.8}$$

где $M_0 = 2\mu\int_{r_1}^{r_2}\ln(Ar)\,rdr$. Для материала без разносопротивляемости вязкой деформации ($\beta = 1$) формула выше принимает вид $M = M_0 e^{-\mu t/\eta}$.

Далее нам потребуются также формулы, описывающие эволюцию величин $(s_1 - s_2)$ и $(s_1 - s_2)$. Из (5.4) при $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ и $a = 0$, $b = -1$, $c = 1$ с учетом (5.5) следует, что

$$\frac{\partial(s_1 - s_2)}{\partial t} = -\frac{\mu}{\eta}\frac{3}{2+\beta}\sigma_{eq} = \frac{\partial\sigma_{eq}}{\partial t}\frac{2+\beta}{1+\beta+\beta^2}$$

$$\frac{\partial(s_2 - s_3)}{\partial t} = -\frac{\mu}{\eta}\frac{3\beta}{2+\beta}\sigma_{eq} = \frac{\partial\sigma_{eq}}{\partial t}\frac{\beta(2+\beta)}{1+\beta+\beta^2}$$

Интегрируя эти выражения с учетом (5.7) и начальных условий $(s_1 - s_2)\big|_{t=0} = (s_2 - s_3)\big|_{t=0} = 2\mu\left|\ln(Ar)\right| = \frac{2}{3}\frac{2+\beta}{1+\beta}\sigma_{eq}^0$, имеем

$$s_1 - s_2 = \sigma_{eq}^0\frac{2+\beta}{1+\beta+\beta^2}\left(e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)}{(2+\beta)^2}\frac{\mu}{\eta}t} - \frac{(1+2\beta)(1-\beta)}{3(1+\beta)}\right)$$

$$s_2 - s_3 = \sigma_{eq}^0\frac{\beta(2+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\left(e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)}{(2+\beta)^2}\frac{\mu}{\eta}t} - \frac{(\beta+2)(\beta-1)}{3\beta(1+\beta)}\right)$$

4.2. Конечный этап релаксации. Из формул выше следует, что если $\beta > 1$, то в момент времени

$$t^* = \frac{\eta}{\mu}\frac{(2+\beta)^2}{3(1+\beta+\beta^2)}\ln\frac{3\beta(1+\beta)}{(\beta+2)(\beta-1)}, \tag{5.9}$$

напряженное состояние выходит на ребро поверхности ползучести с $s_2 = s_3$; а если $0 \le \beta < 1$, то в момент времени

$$t^* = \frac{\eta}{\mu}\frac{(2+\beta)^2}{3(1+\beta+\beta^2)}\ln\frac{3(1+\beta)}{(1+2\beta)(1-\beta)} \tag{5.10}$$

напряженное состояние выходит на ребро поверхности ползучести с $s_2 = s_1$. Причем это происходит одномоментно во всех точках пластины.

После этого начинается второй этап релаксации. Изгибающий момент, соответствующий переходу во вторую стадию релаксации, может быть найден по формуле (5.8):

$$M^* = M(t^*) = \begin{cases} \dfrac{\beta - 1}{2\beta} M_0, & \beta > 1 \\ \dfrac{1 - \beta}{2} M_0, & 0 \le \beta < 1 \end{cases} \tag{5.11}$$

На втором этапе релаксации, если $\beta > 1$, то $s_2 = s_3 = -s_1/2$ и

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = -2\mu D_1^c = -2\mu \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_1} = -\mu \frac{\sigma_{eq}}{\eta} = -\frac{3}{4} \frac{\mu}{\eta} s_1$$

Здесь учтено, что в этом случае $\sigma_{eq} = 3s_1/4$. Интегрируя, имеем

$$s_1 = s_1\big|_{t=t^*} e^{-\frac{3\mu}{4\eta}(t-t^*)} = \frac{4}{3}\sigma_{eq}^* e^{-\frac{3\mu}{4\eta}(t-t^*)} = \frac{4}{9}\frac{(\beta+2)(\beta-1)}{\beta(1+\beta)}\sigma_{eq}^0 e^{-\frac{3\mu}{4\eta}(t-t^*)}, \quad \sigma_{eq}^* = \sigma_{eq}(t^*)$$

И далее, во внутреннем слое $(r < 1/A)$ $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = -(s_1 - s_3) = -3s_1/2$, а во внешнем слое $(r > 1/A)$ $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = s_1 - s_3 = 3s_1/2$. По формуле (4.3):

$$M = \frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2} (s_{\varphi\varphi} - s_{rr})\, r dr = -\frac{3}{4}\int_{r_1}^{1/A} s_1 r dr + \frac{3}{4}\int_{1/A}^{r_2} s_1 r dr =$$

$$= \frac{(\beta+2)(\beta-1)}{3\beta(1+\beta)} e^{-\frac{3\mu}{4\eta}(t-t^*)} \left(\int_{1/A}^{r_2} \sigma_{eq}^0 r dr - \int_{r_1}^{1/A} \sigma_{eq}^0 r dr \right) = \frac{\beta - 1}{2\beta} e^{-\frac{3\mu}{4\eta}(t-t^*)} M_0$$

Если $0 \le \beta < 1$, то на втором этапе релаксации $s_1 = s_2 = -s_3/2$ и

$$\frac{\partial s_3}{\partial t} = -2\mu D_3^c = -2\mu \frac{\sigma_{eq}}{\eta}\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_3} = \frac{\mu}{\eta}\frac{1+2\beta}{2+\beta}\sigma_{eq} = -\frac{3}{4}\frac{\mu}{\eta}\left(\frac{1+2\beta}{2+\beta}\right)^2 s_3$$

Здесь учтено, что $\sigma_{eq} = -\dfrac{3}{4}\dfrac{1+2\beta}{2+\beta} s_3$. Интегрируя, имеем

$$s_3 = s_3\big|_{t=t^*} e^{-\frac{3\mu}{4\eta}\left(\frac{1+2\beta}{2+\beta}\right)^2 (t-t^*)} = -\frac{4}{3}\frac{2+\beta}{1+2\beta}\sigma_{eq}^* e^{-\frac{3\mu}{4\eta}\left(\frac{1+2\beta}{2+\beta}\right)^2 (t-t^*)} =$$

$$= -\frac{4}{9}\frac{(2+\beta)(1-\beta)}{1+\beta}\sigma_{eq}^0 e^{-\frac{3\mu}{4\eta}\left(\frac{1+2\beta}{2+\beta}\right)^2 (t-t^*)}$$

И далее, во внутреннем слое $(r < 1/A)$ $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = -(s_1 - s_3) = 3s_3/2$, во внешнем слое $(r > 1/A)$ $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = s_1 - s_3 = -3s_3/2$. По формуле (4.3):

$$M = \frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2} (s_{\varphi\varphi} - s_{rr})\, r dr = \frac{3}{4}\int_{r_1}^{1/A} s_3 r dr - \frac{3}{4}\int_{1/A}^{r_2} s_3 r dr =$$

$$= \frac{(2+\beta)(1-\beta)}{3(1+\beta)} e^{-\frac{3\mu}{4\eta}\left(\frac{1+2\beta}{2+\beta}\right)^2 (t-t^*)} \left(\int_{1/A}^{r_2} \sigma_{eq}^0 r dr - \int_{r_1}^{1/A} \sigma_{eq}^0 r dr \right) = \frac{1-\beta}{2} e^{-\frac{3\mu}{4\eta}\left(\frac{1+2\beta}{2+\beta}\right)^2 (t-t^*)} M_0$$

Итак, эволюция изгибающего момента в процессе релаксации в целом описывается уравнениями:

– при $0 \le \beta < 1$:

$$\frac{M}{M_0} = \begin{cases} 1 + \frac{3}{4}\frac{(1+\beta)^2}{1+\beta+\beta^2}\left[e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)}{(2+\beta)^2}\frac{\mu}{\eta}t} - 1\right], & t \le t^* \\ \frac{1-\beta}{2}e^{-\frac{3\mu}{4\eta}\left(\frac{1+2\beta}{2+\beta}\right)^2(t-t^*)}, & t \ge t^*, \end{cases} \quad (5.12)$$

где $t^* = \frac{\eta}{\mu}\frac{(2+\beta)^2}{3\left(1+\beta+\beta^2\right)}\ln\frac{3(1+\beta)}{(1+2\beta)(1-\beta)}$;

– при $\beta > 1$:

$$\frac{M}{M_0} = \begin{cases} 1 + \frac{3}{4}\frac{(1+\beta)^2}{1+\beta+\beta^2}\left[e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)}{(2+\beta)^2}\frac{\mu}{\eta}t} - 1\right], & t \le t^* \\ \frac{\beta-1}{2\beta}e^{-\frac{3\mu}{4\eta}(t-t^*)}, & t \ge t^*, \end{cases} \quad (5.13)$$

где $t^* = \frac{\eta}{\mu}\frac{(2+\beta)^2}{3\left(1+\beta+\beta^2\right)}\ln\frac{3\beta(1+\beta)}{(\beta+2)(\beta-1)}$.

В частности, для предельных значений параметра разносопротивляемости:

– при $\beta = 0$:

$$\frac{M}{M_0} = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-\frac{3\mu}{4\eta}t}, & t \le \frac{4\ln 3}{3}\frac{\eta}{\mu} \\ \frac{3^{1/4}}{2}e^{-\frac{3\mu}{16\eta}t}, & t \ge \frac{4\ln 3}{3}\frac{\eta}{\mu} \end{cases}$$

– при $\beta \to \infty$:

$$\frac{M}{M_0} = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-3\frac{\mu}{\eta}t}, & t \le \frac{\ln 3}{3}\frac{\eta}{\mu} \\ \frac{3^{1/4}}{2}e^{-\frac{3\mu}{4\eta}t}, & t \ge \frac{\ln 3}{3}\frac{\eta}{\mu} \end{cases}$$

Траектория напряженного состояния в пространстве девиаторных напряжений изображена на рис. 4.

6. Обсуждение результатов. В [23] рассмотрены две линейно-вязкие модели, основанные на различном определении эквивалентного напряжения [9, 10]:

$$W = \frac{\sigma_{\text{eq}}^2}{2\eta_1}; \quad \sigma_{\text{eq}} = \left[J_2^{3/2} - \left(3\sqrt{3}/2\right)\alpha J_3\right]^{1/3}, \quad \alpha \in [-1,1],$$

где $J_3 = \det \mathbf{s}$, α отвечает за ТСА (при $\alpha = 0$: $\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{J_2}$); и

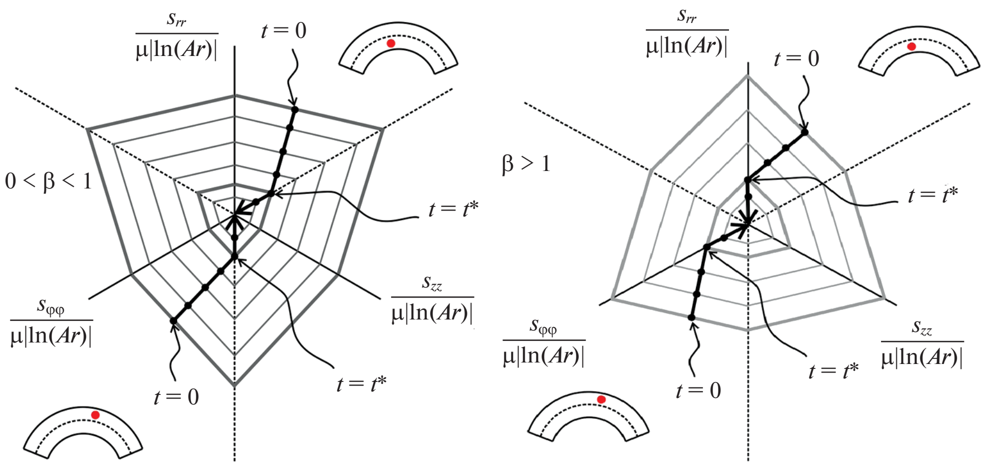

Рис. 4. Траектория напряженного состояния произвольной точки пластины. Слева для материала с $0 \le \beta < 1$, справа для материала с $\beta > 1$. Верхняя траектория на каждом графике соответствует точкам пластины внутренней области $Ar < 1$, нижняя – точкам внешней области $Ar > 1$ (точки на нейтральной поверхности $Ar = 1$ свободны от напряжений).

$$W = \frac{\sigma_{\text{eq}}^2}{2\eta_2}, \quad \sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_3 s_3^2\right)}, \quad n_k = \begin{cases} n^+, & s_i \ge 0 \\ n^-, & s_i < 0 \end{cases}; \quad i = 1,2,3$$

$$n^+ = (1-k)^2, \quad n^- = (1+k)^2; \quad k \in [-1,1],$$

где s_1, s_2, s_3 есть упорядоченные по убыванию главные значения девиатора напряжений.

При одноосном нагружении сжатия или растяжения скорость деформации ползучести в направлении действия силы для первой модели описывается равенствами

$$D^c_{\text{tens}} = \frac{T}{3\eta_1}(1-\alpha)^{2/3}, \quad D^c_{\text{comp}} = \frac{T}{3\eta_1}(1+\alpha)^{2/3}$$

Для второй модели

$$D^c_{\text{tens}} = \frac{2n^+ + n^-}{9\eta_2}T, \quad D^c_{\text{comp}} = \frac{n^+ + 2n^-}{9\eta_2}T$$

Здесь T есть нормальное напряжение на площадке, перпендикулярной направлению сжатия/растяжения; $T > 0$ для растяжения, $T < 0$ для сжатия.

Отсюда очевидно, что два материала, схематично изображенные на рис. 1, при описании с помощью первой из этих моделей различаются только знаком параметра α, а при описании с помощью второй модели – знаком параметра k.

Релаксация изгибающего момента пластины по первой модели определяется в параметрическом виде [23]

$$\frac{M}{M_0} = \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{6}\alpha}\int_\gamma^0 \frac{1+\sqrt{6}\alpha\zeta}{1/3 - (5/2)\zeta^2 + 3\zeta^4}\,d\zeta\right\}$$

$$\frac{\mu t}{\eta_1} = \frac{1}{\sqrt{6}\alpha}\int_\gamma^0 \frac{\sqrt[3]{1+3\sqrt{6}\alpha\xi\left(1/2-\xi^2\right)}}{1/3-(5/2)\xi^2+3\xi^4}\,d\xi,$$

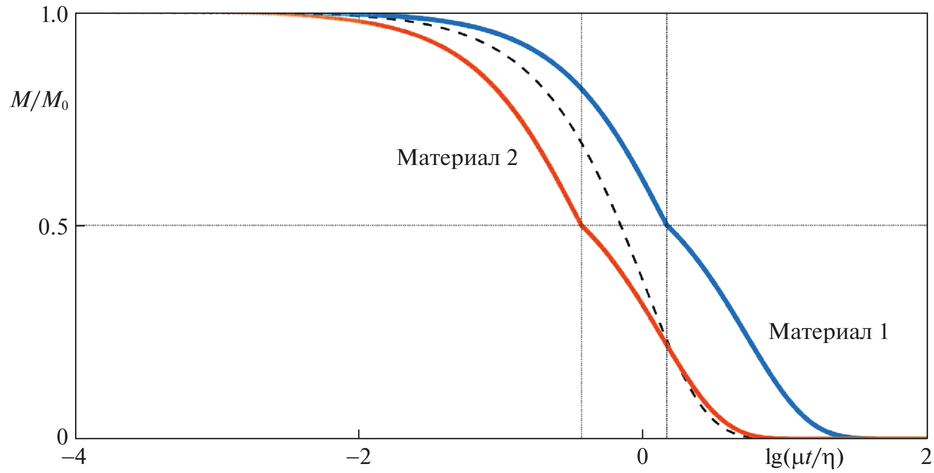

Рис. 5. Релаксация изгибающего момента M в пластине. Линейная модель с разносопротивляемостью вязкой деформации (3.3), (3.4); решение по формулам (5.12), (5.13). Параметры материалов: для материала 1 $\beta = 0$, для материала 2 $\beta \to \infty$. Пунктирная линия соответствует решению для материала без разносопротивляемости $M/M_0 = e^{-\mu t/\eta}$. Вертикальные линии соответствуют моментам времени t^* перехода между этапами релаксации (формулы (5.9) и (5.10)), когда напряженное состояние выходит на ребро функции ползучести; горизонтальная линия соответствует значениям M в эти моменты времени (формула (5.11)).

где M_0 есть начальный изгибающий момент, γ параметр решения, противоположный по знаку с α, t время, μ модуль сдвига. При $\alpha = 0$ (для материала без ТСА) формулы выше приводят к выражению $M/M_0 = e^{-\mu t/\eta_1}$.

Для второй модели в явном виде [23]

$$\frac{M}{M_0} = \frac{1}{4}\exp\left\{-n_{\sup}\frac{\mu t}{\eta_2}\right\} + \frac{3}{4}\exp\left\{-\frac{n_{\sup} + 2n_{\inf}}{3}\frac{\mu t}{\eta_2}\right\}$$

$$n_{\sup} = \max\left\{n^+, n^-\right\}, \quad n_{\inf} = \min\left\{n^+, n^-\right\}$$

Здесь для материала без ТСА $n^+ = n^- = 1$ и так же $M/M_0 = e^{-\mu t/\eta_2}$.

Оба решения имеют одну особенность: они прогнозируют идентичную релаксацию для, вообще говоря, разных материалов, схематично представленных на рис. 1. То есть для этих решений имеет значение, во сколько раз различается эффективная вязкость материала при растяжении и сжатии, но не имеет значения, какая из них больше, а какая меньше [23]. Эту особенность непросто проверить экспериментально, поскольку для этого нужны два материала с одинаковым упругим модулем, вязкая деформация которых соответствует схеме на рис. 1. Тем не менее, такое поведение решений кажется достаточно странным.

В отличие от них, полученное в предыдущем разделе решение прогнозирует разную релаксацию для этих материалов. Графики релаксации изгибающего момента, рассчитанные по формулам (5.12), (5.13) для обоих материалов, приведены на рис. 5.

Рассматриваемая модель прогнозирует, что в материале 1 (см. рис. 1), для которого сопротивление вязкой деформации растяжения ниже, чем деформации сжатия (скорость деформации при растяжении выше, чем при сжатии, при одинаковой по модулю нагрузке), релаксация изгибающего момента происходит медленнее, чем в материале 2.

На обоих графиках (см. рис. 5) прослеживаются точки перегиба, соответствующие переходу между этапами релаксации, в которых напряженное состояние пластины выходит на ребро кусочно-линейной функции ползучести.

Поскольку линейно-вязкая модель, вообще говоря, только приближенно описывает поведение реальных материалов, на практике часто используется обобщенная вязкоупругая модель Максвелла (см., например, [29, 30]). Эта модель представляет собой параллельно соединенные линейно-вязкие элементы с разными свойствами. В каждом таком элементе общая деформация одна и та же, а общее напряжение в системе есть сумма напряжений в каждой ветви. Полученные здесь решения (5.12) и (5.13) могут рассматриваться как решения в каждой ветви обобщенной модели Максвелла, учитывающей разносопротивляемость вязкому деформированию.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. ж. МТТ. 1966. № 2. С. 44–53.
2. *Шапиро Г.С.* О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. ж.: МТТ. 1966. № 2. С. 123–125.
3. *Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А.* К разномодульной теории упругости // Инж. ж. МТТ. 1966. № 6. С. 64–67.
4. *Маслов В.П., Мосолов П.П.* Общая теория решения уравнений движения разномодульной упругой среды // ПММ. 1985. Т. 49, Вып. 3. С. 419–437.
5. *Мясников В.П., Олейников А.И.* Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разносопротивляющейся среды // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322. № 1. С. 44–53.
6. *Олейников А.И., Могильников Е.В.* Единственность решения краевых задач и устойчивость для разномодульного нелинейного материала // Дальневост. матем. ж. 2002. Т. 3. № 2. С. 242–253.
7. *Tsvelodub I.Yu.* Multimodulus elasticity theory // J. Appl. Mech.&Tech. Phys. 2008. V. 49. P. 129–135. https://doi.org/10.1007/s10808-008-0019-1
8. *Du Z., Zhang G., Guo T., Tang Sh., Guo X.* Tension-compression asymmetry at finite strains: A theoretical model and exact solutions // J. Mech.&Phys. Solids. 2020. V. 143. Art. no. 104084. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104084
9. *Cazacu O., Barlat F.* A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals // Int. J. Plasticity. 2004. V. 20(11). P. 2027–2045. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.11.021
10. *Cazacu O., Plunkett B., Barlat F.* Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals // Int. J. Plasticity. 2006. V. 22(7). P. 1171–1194. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.06.001
11. *Cazacu O., Revil-Baudard B.* Tension-compression asymmetry effects on the plastic response in bending: new theoretical and numerical results // Mech. Res. Commun. 2021. V. 114. Art. no. 103596. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2020.103596
12. *Pirnia F.* Experimental Analyses on XLPE under Tension and Compression / Master's Degree Thesis. Dep. Mech. Engng., Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden. 2014.
13. *Guo Y., Liu G., Huang Y.* A complemented multiaxial creep constitutive model for materials with different properties in tension and compression // Europ. J. Mech. A/Solids. 2022. V. 93. Art. no. 104510. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104510
14. *Zolochevsky A., Voyiadjis G.Z.* Theory of creep deformation with kinematic hardening for materials with different properties in tension and compression // Int. J. Plasticity. 2005. V. 21(3). P. 435–462. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.12.007
15. *Banshchikova I.A.* Construction of constitutive equations for orthotropic materials with different properties in tension and compression under creep conditions // J. Appl. Mech.&Tech. Phys. 2020. V. 61. P. 87–100. https://doi.org/10.1134/S0021894420010101
16. *Al'tenbakh Kh.I., Zolochevskii A.A.* Energy version of creep and stress-rupture strength theory for anisotropic and isotropic materials which differ in resistance to tension and compression // J. Appl. Mech.&Tech. Phys. 1992. V. 33. P. 101–106. https://doi.org/10.1007/BF00864514

17. *Gorev B.V., Rubanov V.V., Sosnin O.V.* Construction of the creep equations for materials with different extension and compression properties // J. Appl. Mech.&Tech. Phys. 1979. V. 20(4). P. 487–492. https://doi.org/10.1007/BF00905605

18. *Teixeira L., Gillibert J., Sayet T., Blond E.* A creep model with different properties under tension and compression: Applications to refractory materials // Int. J. Mech. Sci. 2021. V. 212. Art. no. 106810. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106810

19. *Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С.* Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычисл. методы и програм. 2008. Т. 9. С. 346–365.

20. *Быковцев Г.И., Ярушина В.М.* Об особенностях модели неустановившейся ползучести, основанной на использовании кусочно-линейных потенциалов // В сб.: Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций (к 60-летию со дня рожд. проф. Г.И. Быковцева). Владивосток: Дальнаука, 1998. С. 9–26.

21. *Буренин А.А., Ярушина В.М.* К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // В сб.: Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию Е.И. Шемякина / Ред. *Ивлев Д.Д., Морозов Н.Ф.*. М.: Физматлит, 2006. С. 100–106.

22. *Ярушина В.М.* К моделированию ползучести разносопротивляющихся материалов // Докл. РАН. 2005. Т. 403. № 2. С. 198–200.

23. *Севастьянов Г.М., Бормотин К.С.* Релаксация напряжений в изогнутой вязкоупругой пластине с различными свойствами при сжатии и растяжении // ПМТФ. 2023. (*в печати*)

24. *Sidoroff F.* Un modele viscoelastique non lineaire avec configuration intermediate // J. de Mécanique. 1974. V. 13(4). P. 679–713.

25. *Ивлев Д.Д.* К теории разрушения твердых тел // ПММ. 1959 Т. 23. № 3. С. 618–624.

26. *Rivlin R.* Large elastic deformations of isotropic materials – V: The problem of flexure // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Math.&Phys. Sci. 1949. V. 195. P. 463–473. https://doi.org/10.1098/rspa.1949.0004

27. *Destrade M., Murphy J.G., Rashid B.* Differences in tension and compression in the nonlinearly elastic bending of beams // Int. J. Struct. Changes in Solids – Mech.&Appl. 2009. V. 1(1). P. 73–81.

28. *Destrade M., Gilchrist M.D., Motherway J.A., Murphy J.G.* Bimodular rubber buckles early in bending // Mech. Mater. 2010. V. 42(4). P. 469–476. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2009.11.018

29. *Ghobady E., Shutov A., Steeb H.* Parameter identification and validation of shape-memory polymers within the framework of finite strain viscoelasticity // Materials (Basel). 2021. V. 14(8). 2049. https://doi.org/10.3390/ma14082049

30. *Sevastyanov G.M.* Creep relaxation in nonlinear viscoelastic twisted rods // ZAMM. 2022. e202100552. https://doi.org/10.1002/zamm.202100552

Stress Relaxation in Bended Viscoelastic Plate with Tension-Compression Asymmetry

G. M. Sevastyanov[a,#]

[a] *Institute of Machinery and Metallurgy KhFRC FEB RAS, Komsomolsk-on-Amure, Russia*

[#] *e-mail: akela.86@mail.ru*

The paper presents closed-form analytical solution to the plane-strain problem of stress relaxation in a bended plate with tension-compression asymmetry (TCA) in viscous properties. Reversible and irreversible strains are assumed to be finite. We utilize a linear viscous model with equivalent stress that is piecewise linear function of the principal stresses with TCA parameter. The specific features of the solution are discussed.

Keywords: viscoelasticity, creep, bending, tension-compression asymmetry

REFERENCES

1. *Ambartsumyan S.A., Khachatryan A.A.* Basic equations of the theory of elasticity for materials having different elastic moduli in tension and compression // Engng. J.: Mech. Solids, 1966, no. 2, pp. 44–53. (in Russian)
2. *Shapiro G.S.* On deformations of solids with different elastic moduli in tension and compression // Engng. J.: Mech. Solids, 1966, no. 2, pp. 123–125. (in Russian)
3. *Ambartsumyan S.A., Khachatryan A.A.* On bimodular elasticity theory // Engng. J.: Mech. Solids, 1966, no. 6, pp. 64–67. (in Russian)
4. *Maslov V.P., Mosolov P.P.* General theory of the equations of motion of an elastic medium of different moduli // JAMM, 1985, vol. 49, no. 3, pp. 322–336. https://doi.org/10.1016/0021-8928(85)90031-0
5. *Myasnikov V.P., Oleinikov A.I.* Fundamental general relationships for a model of an isotropically elastic heteromodular medium // Dokl. Phys., 1992, vol. 322, no. 1, pp. 44–53. (in Russian)
6. *Oleinikov A.I., Mogilnikov E.V.* Uniqueness and stability of the solutions for boundary value problems for bimodular nonlinear materials // Far Eastern Math. J., 2002, vol. 3, no. 2, pp. 242–253. (in Russian)
7. *Tsvelodub I.Yu.* Multimodulus elasticity theory // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2008, vol. 49, pp. 129–135. https://doi.org/10.1007/s10808-008-0019-1
8. *Du Z., Zhang G., Guo T., Tang Sh., Guo X.* Tension-compression asymmetry at finite strains: A theoretical model and exact solutions // J. Mech.&Phys. Solids, 2020, vol. 143, art. no. 104084. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104084
9. *Cazacu O., Barlat F.* A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals // Int. J. Plasticity, 2004, vol. 20(11), pp. 2027–2045. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.11.021
10. *Cazacu O., Plunkett B., Barlat F.* Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals // Int. J. Plasticity, 2006, vol. 22(7), pp. 1171–1194. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.06.001
11. *Cazacu O., Revil-Baudard B.* Tension-compression asymmetry effects on the plastic response in bending: new theoretical and numerical results // Mech. Res. Commun., 2021, vol. 114, art. no. 103596. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2020.103596
12. *Pirnia F.* Experimental Analyses on XLPE under Tension and Compression / Master's Degree Thesis. Dep. Mech. Engng., Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden. 2014.
13. *Guo Y., Liu G., Huang Y.* A complemented multiaxial creep constitutive model for materials with different properties in tension and compression // Europ. J. Mech. A/Solids, 2022, vol. 93, art. no. 104510. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104510
14. *Zolochevsky A., Voyiadjis G.Z.* Theory of creep deformation with kinematic hardening for materials with different properties in tension and compression // Int. J. Plasticity, 2005, vol. 21(3), pp. 435–462. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.12.007
15. *Banshchikova I.A.* Construction of constitutive equations for orthotropic materials with different properties in tension and compression under creep conditions // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2020, vol. 61, pp. 87–100. https://doi.org/10.1134/S0021894420010101
16. *Al'tenbakh Kh.I., Zolochevskii A.A.* Energy version of creep and stress-rupture strength theory for anisotropic and isotropic materials which differ in resistance to tension and compression // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 1992, vol. 33, pp. 101–106. https://doi.org/10.1007/BF00864514
17. *Gorev B.V., Rubanov V.V., Sosnin O.V.* Construction of the creep equations for materials with different extension and compression properties // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 1979, vol. 20(4), pp. 487–492. https://doi.org/10.1007/BF00905605
18. *Teixeira L., Gillibert J., Sayet T., Blond E.* A creep model with different properties under tension and compression: Applications to refractory materials // Int. J. Mech. Sci., 2021, vol. 212, art. no. 106810. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106810
19. *Korobeinikov S.N., Oleinikov A.I., Gorev B.V., Bormotin K.S.* Mathematical simulation of creep processes in metal products made of materials with different properties in tension and compression // Comput. Meths.&Progr., 2008, vol. 9, pp. 346–365. (in Russian)
20. *Bykovtsev G.I., Yarushina V.M.* On the features of the unsteady creep model based on the use of piecewise linear potentials // In: Problems of Mechanics of Continuous Media and Structural Elements (to the 60th Anniversary of Prof. G.I. Bykovtsev). Vladivostok, Dalnauka, 1998. pp. 9–26. (in Russian)

21. *Burenin A.A., Yarushina V.M.* On modeling the deformation of materials with different properties in tension and compression // In: Problems of Mechanics of Deformable Solids and Rocks. Collection of articles dedicated to the 75th anniversary of E.I. Shemyakin / Ed. by: *Ivlev D.D., Morozov N.F.* Moscow: Fizmatlit, 2006. pp. 100–106. (in Russian)
22. *Yarushina V.M.* Simulation of the creep of materials with different strengths // Dokl. Phys., 2005, vol. 50, no. 7, pp. 385–387. https://doi.org/10.1134/1.2005366
23. *Sevastyanov G.M., Bormotin K.S.* Stress relaxation in bended viscoelastic plate with tension-compression asymmetry // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2023. (in Press).
24. *Sidoroff F.* Un modele viscoelastique non lineaire avec configuration intermediate // J. de Mécanique, 1974, vol. 13(4), pp. 679–713.
25. *Ivlev D.D.* The theory of fracture of solids // JAMM, 1959, vol. 23, no. 3, pp. 884–895. https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90185-6
26. *Rivlin R.* Large elastic deformations of isotropic materials – V: The problem of flexure // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Math.&Phys. Sci., 1949, vol. 195, pp. 463–473. https://doi.org/10.1098/rspa.1949.0004
27. *Destrade M., Murphy J.G., Rashid B.* Differences in tension and compression in the nonlinearly elastic bending of beams // Int. J. Struct. Changes in Solids – Mech.&Appl., 2009, vol. 1(1), pp. 73–81.
28. *Destrade M., Gilchrist M.D., Motherway J.A., Murphy J.G.* Bimodular rubber buckles early in bending // Mech. Mater., 2010, vol. 42(4), pp. 469–476. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2009.11.018
29. *Ghobady E., Shutov A., Steeb H.* Parameter identification and validation of shape-memory polymers within the framework of finite strain viscoelasticity // Materials (Basel), 2021, vol. 14(8), 2049. https://doi.org/10.3390/ma14082049
30. *Sevastyanov G.M.* Creep relaxation in nonlinear viscoelastic twisted rods // ZAMM. 2022. e202100552. https://doi.org/10.1002/zamm.202100552