

УДК 531.012

О КИНЕМАТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2023 г. А. Г. Петров^{1,*}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: petrovipmech@gmail.com

Поступила в редакцию 21.02.2023 г.

После доработки 19.06.2023 г.

Принята к публикации 15.07.2023 г.

Выведена система обыкновенных дифференциальных уравнений для вектора конечного поворота, соответствующего теореме Эйлера: вектор конечного поворота направлен по оси конечного поворота твердого тела и его длина равна углу плоского поворота вокруг этой оси. Система уравнений явно разрешена относительно производной по времени компонент вектора поворота. Правая часть системы зависит от вектора поворота и вектора угловой скорости в главных осях. Показана эквивалентность полученной системы уравнений системе уравнений для кватернионов. Координаты ортов главных осей твердого тела в неподвижных осях выражены через углы конечного поворота и компоненты угловой скорости по простым аналитическим формулам.

Ключевые слова: теорема Эйлера о конечном повороте, кинематика твердого тела, кватернион, ориентация

DOI: 10.31857/S0032823523050120, EDN: QPJYLE

1. Введение. Согласно теореме Эйлера [1] любое перемещение твердого тела с одной неподвижной точкой может быть заменено плоским поворотом вокруг некоторой оси на некоторый угол. Таким образом, ориентацию твердого тела в пространстве можно однозначно определить с помощью вектора поворота Φ

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \theta \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, направленный по оси поворота, θ — угол плоского поворота.

Поставим задачу описать движение твердого тела с неподвижной точкой под действием заданного момента сил с помощью вектора поворота Φ или иначе с помощью параметров $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Теорема Эйлера гарантирует однозначность ориентации твердого тела при заданном векторе Φ , что дает преимущество по сравнению с другими параметрами, которые такой однозначности не имеют.

Следует иметь в виду, что между вектором Φ и положением тела в пространстве нет взаимно однозначного соответствия. Заданный вектор Φ определяет одно положение тела в пространстве, а обратное не верно. Одному и тому же положению тела в пространстве соответствует счетное число значений вектора Φ

$$\Phi = \mathbf{e}(\theta_0 + 2\pi n); \quad -\pi < \theta_0 \leq \pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.2)$$

Наиболее простым и часто используемым способом описания ориентации твердого тела в настоящее время является кватернионное описание. Параметры Родрига–Гамильтона кватерниона $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ выражаются через единичный вектор $\mathbf{e}$ и угол θ (1.1): $\lambda_0 = \cos \theta/2$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e} \sin \theta/2$. Большую роль в популяризации идеи использования кватернионов сыграла книга [2], в которой отражены основные аспекты алгебры кватернионов применительно к практическим задачам исследования углового движения твердых тел. Этот подход представлен во многих современных учебниках, например, [1–3]. Ряд задач динамики космического полета в кватернионной постановке рассмотрен в монографии [4] и во многих научных статьях других авторов. В [5] представлен подробный обзор работ об ориентации твердого тела с помощью параметров Родрига–Гамильтона и связи их с углами конечного поворота.

Ниже излагается альтернативный способ реализации ориентации твердого тела с помощью ортогональной матрицы $C(\boldsymbol{\varphi})$ следующим образом.

Введем абсолютную инерциальную систему координат (АСК) и систему координат, скрепленную с твердым телом (ССК). Векторы в подвижной системе будем помечать индексом “*”. Пусть $\mathbf{R}_*$ – независящий от времени радиус-вектор материальной точки твердого тела в ССК. Тогда радиус-вектор $\mathbf{R}$ этой точки в АСК связан с $\mathbf{R}_*$ так:

$$\mathbf{R} = C(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{R}_*, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_* = \begin{pmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Поставим задачу: определить зависимость компонент матрицы $C(\boldsymbol{\varphi})$ от компонент векторного аргумента $\boldsymbol{\varphi}$ и затем вывести для него дифференциальное уравнение в виде $d\boldsymbol{\varphi}/dt = f(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}_*)$, где $\boldsymbol{\omega}_*$ – вектор угловой скорости в осях твердого тела.

Для решения этой задачи введем единичную матрицу E и антисимметричную матрицу $A(\mathbf{X})$, зависящую от векторного аргумента $\mathbf{X}$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0 & -X_3 & X_2 \\ X_3 & 0 & -X_1 \\ -X_2 & X_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad A(\mathbf{X})\mathbf{R} = \mathbf{X} \times \mathbf{R} \quad (1.4)$$

2. Определение матрицы поворотов $C(\boldsymbol{\varphi})$. Докажем, что формула

$$C(\boldsymbol{\varphi}) = E + A(\mathbf{e}) \sin \theta + A(\mathbf{e})^2 (1 - \cos \theta), \quad (2.1)$$

где векторы $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{e}$ определены формулами (1.1), является решением поставленной задачи, то есть матрица $C(\boldsymbol{\varphi})$ 1) является ортогональной и 2) определяет поворот около оси $\mathbf{e}$ на угол θ .

1) Ортогональность матрицы (2.1) можно доказать, учитывая симметрию матрицы $A(\mathbf{e})^2$ и следующие равенства

$$A(\mathbf{e})^3 = -A(\mathbf{e}), \quad A(\mathbf{e})^4 = -A(\mathbf{e})^2 \quad (2.2)$$

Отсюда для транспонированной матрицы получаем

$$C(\boldsymbol{\varphi})^T = C(-\boldsymbol{\varphi}) = E - A(\mathbf{e}) \sin \theta + A(\mathbf{e})^2 (1 - \cos \theta), \quad C(\boldsymbol{\varphi})C(\boldsymbol{\varphi})^T = E, \quad (2.3)$$

что и требовалось доказать. (Учитывая равенство $\boldsymbol{\varphi} = \theta \mathbf{e}$, изменение знака у вектора $\boldsymbol{\varphi}$ равносильно изменению знака либо у θ либо у вектора $\mathbf{e}$.)

2) Докажем, что преобразование $\mathbf{R} = C(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{R}_*$ является поворотом около оси $\mathbf{e}$ на угол θ . Введем единичные базисные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Вектор $\mathbf{k}$ направим по вектору $\mathbf{e}$,

остальные два перпендикулярно ему, так чтобы выполнялись соотношения $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Заметим также, что выполняются равенства

$$A(\mathbf{k})\mathbf{R}_* = \mathbf{k} \times \mathbf{R}_*, \quad A(\mathbf{k})^2\mathbf{R}_* = \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_*) = \mathbf{k}R_*^* - \mathbf{R}_*$$

С помощью их преобразование примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= C(\varphi)\mathbf{R}_* = \mathbf{R}_* + \sin \theta (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_*) + (1 - \cos \theta) \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_*) = \\ &= \mathbf{R}_* + \sin \theta (\mathbf{j}R_1^* - \mathbf{i}R_2^*) + (1 - \cos \theta) (\mathbf{k}R_3^* - \mathbf{R}_*) \end{aligned}$$

Для проекций на базисные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ получим

$$R_1 = \cos \theta R_1^* - \sin \theta R_2^*, \quad R_2 = \sin \theta R_1^* + \cos \theta R_2^*, \quad R_3 = R_3^*$$

Это есть преобразование поворота около оси $\mathbf{k} = \mathbf{e}$ на угол θ , что и требовалось доказать.

3. Векторы в неподвижных и подвижных осях. Абсолютную инерциальную систему координат (АСК) будем называть системой с неподвижными осями, а систему координат, скрепленную с твердым телом (ССК) — системой с подвижными осями. Векторы в подвижной системе будем помечать индексом “*”. Векторы $\mathbf{a}$ в неподвижных осях и $\mathbf{a}_*$ — в подвижных осях имеют разные компоненты. Их вектор столбцы связаны соотношениями

$$\mathbf{a} = C(\varphi)\mathbf{a}_*, \quad \mathbf{a}_* = C(-\varphi)\mathbf{a}, \quad (3.1)$$

где матрицы $C(\varphi)$ и $C(-\varphi)$ определяются по формулам (2.1) и (2.3) соответственно.

Покажем, что векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}_*$ в неподвижных и подвижных осях имеют одни и те же компоненты. Действительно, пользуясь формулами (3.1) и (2.3), получим

$$\mathbf{e}_* = C(-\varphi)\mathbf{e} = \mathbf{e} - \sin \theta \mathbf{e} \times \mathbf{e} + (1 - \cos \theta) \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{e}) = \mathbf{e}, \quad (3.2)$$

что и требовалось показать.

Из (3.2) и (1.1) заключаем, что векторы φ и φ_* в неподвижных и подвижных осях имеют тоже одни и те же компоненты

$$\varphi = \varphi_* \quad (3.3)$$

4. Распределение скорости в твердом теле в неподвижных осях (АСК) можно получить, дифференцируя по времени преобразование $\mathbf{R} = C(\varphi)\mathbf{R}_*$ при постоянном $\mathbf{R}_*$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \left(\frac{d}{dt} C(\varphi) \right) \mathbf{R}_* = \left(\frac{d}{dt} C(\varphi) \right) C(-\varphi) \mathbf{R}$$

Откуда следует

$$\mathbf{v} = A(\omega)\mathbf{R}, \quad A(\omega) = \left(\frac{d}{dt} C(\varphi) \right) C(-\varphi) \quad (4.1)$$

Из тождества

$$A(\omega) + A^T(\omega) = \left(\frac{d}{dt} C(\varphi) \right) C(-\varphi) + C(\varphi) \frac{d}{dt} C(-\varphi) = \frac{d}{dt} (C(\varphi)C(-\varphi)) = 0 \quad (4.2)$$

следует антисимметричность матрицы $A(\omega)$. Угловой скоростью ω в неподвижных

осях является аргумент антисимметричной матрицы $A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$, а форму-

ла (4.1) является формулой Эйлера распределения скоростей в твердом теле

$$\mathbf{v} = A(\omega)\mathbf{R} = \omega \times \mathbf{R} \quad (4.3)$$

Угловая скорость в неподвижных осях определяется формулой

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e} + \dot{\epsilon}\sin\theta + (1 - \cos\theta)(\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}), \quad (4.4)$$

где векторы $\mathbf{e}, \dot{\epsilon}$ и $(\mathbf{e} \times \dot{\epsilon})$ образуют тройку взаимно-ортогональных векторов, а приведенные формулы — разложения угловых скоростей по этим векторам. (Доказательство приведено в приложении.)

Закон Эйлера для распределения скоростей в подвижных осях имеет вид

$$\mathbf{v}_* = C(-\boldsymbol{\varphi})\mathbf{v} = A(\boldsymbol{\omega}_*)\mathbf{R}_*, \quad \boldsymbol{\omega}_* = \dot{\theta}\mathbf{e} + \dot{\epsilon}\sin\theta - (1 - \cos\theta)(\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}) \quad (4.5)$$

(Доказательство приведено в приложении.)

5. Динамика твердого тела. Известно, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_*(p, q, r)$ в главных осях твердого тела при заданном моменте сил $\mathbf{M}$ можно найти из уравнений Эйлера [1]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_*}{dt} + \boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{K}_* &= \mathbf{M} \Rightarrow \\ J_1 \frac{dp}{dt} + (J_3 - J_2)qr &= M_1 \\ J_2 \frac{dq}{dt} + (J_1 - J_3)rp &= M_2 \\ J_3 \frac{dr}{dt} + (J_2 - J_1)qp &= M_3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

6. Кинематика твердого тела. Предположим, что вектор угловой скорости как функция времени $\boldsymbol{\omega}_*(t)$ найдена из уравнений динамики. Поставим задачу: по известному вектору $\boldsymbol{\omega}_*(t)$ вычислить вектор координат твердого тела $\boldsymbol{\varphi}(t)$ и найти матрицу $C(\boldsymbol{\varphi})$ (2.1), определяющую ориентацию твердого тела в пространстве. Будем исходить из уравнения (4.5), с помощью которого выведем систему уравнений для компонент вектора $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{e})$. Умножая скалярно и векторно уравнение (4.5) на $\mathbf{e}$, получим

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}) \\ (\mathbf{e} \times \dot{\epsilon})\sin\theta - (1 - \cos\theta)\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}) &= \sin\theta(\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}) + (1 - \cos\theta)\dot{\epsilon} = \mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_* \end{aligned} \quad (6.1)$$

Последнее уравнение и уравнение (4.5) можно привести к системе уравнений

$$\begin{aligned} \sin\theta(\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}) + (1 - \cos\theta)\dot{\epsilon} &= \mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_* \\ -(1 - \cos\theta)(\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}) + \sin\theta\dot{\epsilon} &= \boldsymbol{\omega}_* - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_*) = -\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_*) \end{aligned}$$

Ее удобно записать в матричной форме

$$2\sin\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \times \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_* \\ -\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_*) \end{pmatrix}$$

Матрица в левой части ортогональна и система легко разрешается относительно $\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}$ и $\dot{\epsilon}$. Откуда найдем

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2}(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_*) - \frac{1}{2\operatorname{tg}(\theta/2)}(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_*)) \Rightarrow \\ \dot{\epsilon}\theta &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*) - \frac{1}{2\theta\operatorname{tg}(\theta/2)}(\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*)) \end{aligned} \quad (6.2)$$

С помощью (6.1) получим

$$\mathbf{e}\dot{\theta} = \frac{1}{\theta^2} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\omega}_* \cdot \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\theta^2} (\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*)) + \boldsymbol{\omega}_* \quad (6.3)$$

Складывая (6.2) и (6.3), находим

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{e}\dot{\theta} + \boldsymbol{\omega}_* = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*) - \frac{1}{2\theta \operatorname{tg}(\theta/2)} (\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*)) + \frac{1}{\theta^2} (\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*)) + \boldsymbol{\omega}_*$$

Таким образом, получаем требуемое уравнение относительно $\boldsymbol{\varphi}(t)$. Его удобно записать в векторном виде

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}_* + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*) + \Phi(\varphi^2) (\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\omega}_*) - \varphi^2 \boldsymbol{\omega}_*), \quad (6.4)$$

и получить из него систему уравнений для трех компонент $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ вектора

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= p + \frac{1}{2} (\varphi_2 r - \varphi_3 q) + \Phi(\varphi^2) (\varphi_1 (\varphi_2 q + \varphi_3 r) - p (\varphi_2^2 + \varphi_3^2)) \\ \dot{\varphi}_2 &= q + \frac{1}{2} (\varphi_3 p - \varphi_1 r) + \Phi(\varphi^2) (\varphi_2 (\varphi_3 r + \varphi_1 p) - q (\varphi_3^2 + \varphi_1^2)) \\ \dot{\varphi}_3 &= r + \frac{1}{2} (\varphi_1 q - \varphi_2 p) + \Phi(\varphi^2) (\varphi_3 (\varphi_1 p + \varphi_2 q) - r (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)) \\ \Phi(\varphi^2) &= \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{2\theta \operatorname{tg}(\theta/2)}, \quad \varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \theta^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Начальные значения углов следует положить равными нулю

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_3(0) = 0 \quad (6.6)$$

Здесь p, q, r — компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_*$, которые находятся из системы динамических уравнений Эйлера (5.1) для движения твердого тела с закрепленной точкой. В каждый момент времени единичные векторы главных осей твердого тела $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ находятся с помощью матрицы поворота $C(\boldsymbol{\varphi})$ (2.1) по формулам

$$\mathbf{i}(t) = C(\boldsymbol{\varphi}(t)) \mathbf{i}_0, \quad \mathbf{j}(t) = C(\boldsymbol{\varphi}(t)) \mathbf{j}_0, \quad \mathbf{k} = C(\boldsymbol{\varphi}(t)) \mathbf{k}_0 \quad (6.7)$$

Направим неподвижные оси по главным осям твердого тела в начальный момент времени $t^2 = 0$, то есть зададим их вектор-столбцы в виде

$$\mathbf{i}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Тогда с помощью (2.1) формулы (6.7) приведутся к виду

$$\mathbf{i}(t) = \begin{pmatrix} (1 - \cos \theta) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \cos \theta \\ (1 - \cos \theta) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \sin \theta \mathbf{e}_3 \\ (1 - \cos \theta) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 - \sin \theta \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_2 \varphi_1 \varphi_1 + \cos \theta \\ \Phi_2 \varphi_1 \varphi_2 + \Phi_1 \varphi_3 \\ \Phi_2 \varphi_1 \varphi_3 - \Phi_1 \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}(t) &= \begin{pmatrix} (1 - \cos \theta)e_2e_1 - \sin \theta e_3 \\ (1 - \cos \theta)e_2e_2 + \cos \theta \\ (1 - \cos \theta)e_2e_3 + \sin \theta e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_2\varphi_2\varphi_1 - \Phi_1\varphi_3 \\ \Phi_2\varphi_2\varphi_2 + \cos \theta \\ \Phi_2\varphi_2\varphi_3 + \Phi_1\varphi_1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{k}(t) &= \begin{pmatrix} (1 - \cos \theta)e_3e_1 + \sin \theta e_2 \\ (1 - \cos \theta)e_3e_2 - \sin \theta e_1 \\ (1 - \cos \theta)e_3e_3 + \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_2\varphi_3\varphi_1 + \Phi_1\varphi_2 \\ \Phi_2\varphi_3\varphi_2 - \Phi_1\varphi_1 \\ \Phi_2\varphi_3\varphi_3 + \cos \theta \end{pmatrix} \\
\Phi_1 &= \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad \Phi_2 = \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}, \quad \theta^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Входящую в уравнение (6.5) функцию Φ и в выражения для осей функции Φ_1, Φ_2 удобно вычислять с помощью быстро сходящихся рядов по параметру $\varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \theta^2$

$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi^2) &= \frac{1}{12} + \frac{\varphi^2}{720} + \frac{\varphi^4}{30240} + \frac{\varphi^6}{1209600} + \frac{\varphi^8}{47900160} + \dots \\
\Phi_1(\varphi^2) &= 1 - \frac{\varphi^2}{3!} + \frac{\varphi^4}{5!} - \dots, \quad \Phi_2(\varphi^2) = \frac{1}{2!} - \frac{\varphi^2}{4!} + \frac{\varphi^4}{6!} - \dots
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Таким образом особенности при $\varphi^2 = 0$ в этих функциях устраняется. На отрезке $\varphi^2 < \pi^2$ в функциях $\Phi(\varphi^2), \Phi_1(\varphi^2), \Phi_2(\varphi^2)$ достигается семи знаков точности, если учесть в них 8, 7 и 6 членов ряда соответственно.

Значения ортов $\mathbf{i}(t), \mathbf{j}(t), \mathbf{k}(t)$ не изменятся при заменах $\theta = \theta' \pm 2\pi$, $\varphi = \varphi' \frac{\theta' \pm 2\pi}{\theta}$.

При этой замене угол θ увеличивается или уменьшается на 2π . Поэтому без ограничения общности можно считать, что вектор угла конечного поворота удовлетворяет неравенству

$$\varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \leq \pi^2 \tag{6.11}$$

7. Кватернионное описание кинематики твердого тела. Систему уравнений (6.5) и формулы для направлений главных осей (6.7) можно получить с помощью кватерниона [1–4]

$$\Lambda = \cos(\theta/2) + \mathbf{e} \sin(\theta/2) \tag{7.1}$$

Преобразованию поворота (2.1) соответствует присоединенное отображение $\mathbf{R} = \Lambda \circ \mathbf{R}_* \circ \bar{\Lambda}$. Угловая скорость в подвижных осях твердого тела выражается через кватернион так $\omega_* = 2\bar{\Lambda}\dot{\Lambda}$. Отсюда следуют тождества

$$\begin{aligned}
C(\varphi)\mathbf{R}_* &= (E + A(\mathbf{e})\sin \theta + A(\mathbf{e})^2(1 - \cos \theta))\mathbf{R}_* = \Lambda \circ \mathbf{R}_* \circ \bar{\Lambda} \\
\omega_* &= \dot{\theta}\mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}\sin \theta - (1 - \cos \theta)(\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}) = 2\bar{\Lambda} \circ \frac{d}{dt} \Lambda
\end{aligned}$$

Они представляют альтернативный вывод формул (2.1) и (4.5). Здесь и далее знак $\circ$ означает умножение кватернионов.

Систему уравнений (6.5) можно заменить на одно уравнение для кватерниона [1]: $2\frac{d}{dt}\Lambda = \Lambda \circ \omega_*$. Оно эквивалентно системе уравнений для его компонент: параметров Родрига–Гамильтона

$$\lambda_0 = \cos(\theta/2), \quad \lambda_1 = e_1 \sin(\theta/2), \quad \lambda_2 = e_2 \sin(\theta/2), \quad \lambda_3 = e_3 \sin(\theta/2)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_0 &= -\frac{1}{2}(p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3) \\
\dot{\lambda}_1 &= \frac{1}{2}(p\lambda_0 + \lambda_2 r - \lambda_3 q) \\
\dot{\lambda}_2 &= \frac{1}{2}(q\lambda_0 + \lambda_3 p - \lambda_1 r) \\
\dot{\lambda}_3 &= \frac{1}{2}(r\lambda_0 + \lambda_1 q - \lambda_2 p)
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Начальному условию (6.6) соответствуют условия

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0$$

Система уравнений имеет интеграл $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. По найденному кватерниону можно найти орты главных осей твердого тела

$$\mathbf{i}(t) = \Lambda \circ \mathbf{i}_0 \circ \bar{\Lambda}, \quad \mathbf{j}(t) = \Lambda \circ \mathbf{j}_0 \circ \bar{\Lambda}, \quad \mathbf{k}(t) = \Lambda \circ \mathbf{k}_0 \circ \bar{\Lambda}, \tag{7.3}$$

где орты $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$ и кватернион Λ определены формулами (6.8) и (7.1). Формулы для ортов (7.3) и (6.9) тождественны.

Приложение. П1. Вывод формулы для угловой скорости в главных осях.

Согласно (4.1) матрица $A(\omega)$ равна произведению двух матриц

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}C(\varphi) &= (A(\mathbf{e})\cos\theta + A(\mathbf{e})^2\sin\theta)\dot{\theta} + A(\dot{\mathbf{e}})\sin\theta + (A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) + A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}}))(1 - \cos\theta) \\
C(-\varphi) &= E - A(\mathbf{e})\sin\theta + A(\mathbf{e})^2(1 - \cos\theta)
\end{aligned}$$

Его можно представить в виде

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \left(\frac{d}{dt}C(\varphi)\right)C(-\varphi) = \\
&= \dot{\theta}F + \sin\theta F_1 + \sin^2\theta F_2 + (1 - \cos\theta)F_3 + (1 - \cos\theta)^2 F_4 + \sin\theta(1 - \cos\theta)F_5 \tag{П1.1}
\end{aligned}$$

Воспользовавшись равенствами (2.2) и

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}} &= 0, \quad A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e})\mathbf{R} = \mathbf{e} \times (\dot{\mathbf{e}} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{R})) = \mathbf{e} \times \mathbf{e}(\dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R}) = 0, \\
A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e})\mathbf{R} &= \mathbf{e} \times (\dot{\mathbf{e}} \times (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{R}))) = \mathbf{e} \times (\dot{\mathbf{e}} \times (\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R})) = \\
&= \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{R}) - \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{R}) = 0
\end{aligned}$$

последовательно находим

$$\begin{aligned}
F &= A(\mathbf{e}), \quad F_1 = A(\dot{\mathbf{e}}), \quad F_2 = -A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}), \quad F_3 = A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) + A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}}) \\
F_4 &= (A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) + A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}}))A(\mathbf{e})^2 = -A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) + A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e})^2 = -A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) \\
F_5 &= A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e})^2 - A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e})^2 - A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) = 0
\end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в (П1.1), найдем

$$A(\omega) = \dot{\theta}A(\mathbf{e}) + \sin\theta A(\dot{\mathbf{e}}) + (1 - \cos\theta)(A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}}) - A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}))$$

Из тождества

$$(A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}}) - A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}))\mathbf{R} = \mathbf{e} \times (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{R}) - \dot{\mathbf{e}} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{R}) = (\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}) \times \mathbf{R}$$

следует, что $A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}}) - A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) = (\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}})$ и

$$A(\boldsymbol{\omega}) = A(\dot{\theta}\mathbf{e} + \sin\theta\dot{\mathbf{e}} + (1 - \cos\theta)\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}) \quad (\text{П1.2})$$

что и доказывает формулу (4.4).

П2. Вывод формулы для угловой скорости в подвижных осях.

Закон Эйлера для распределения скоростей в подвижных осях твердого тела (ССК) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_* &= C(-\boldsymbol{\varphi})\mathbf{v} = C(-\boldsymbol{\varphi})A(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R} = C(-\boldsymbol{\varphi})\frac{d}{dt}C(\boldsymbol{\varphi})C(-\boldsymbol{\varphi})\mathbf{R} = C(-\boldsymbol{\varphi})\frac{d}{dt}C(\boldsymbol{\varphi})C(-\boldsymbol{\varphi})C(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{R}_* \Rightarrow \\ \mathbf{v}_* &= A(\boldsymbol{\omega}_*)\mathbf{R}_*, \quad A(\boldsymbol{\omega}_*) = C(-\boldsymbol{\varphi})\left(\frac{d}{dt}C(\boldsymbol{\varphi})\right) \end{aligned} \quad (\text{П2.1})$$

С помощью тождества (4.2) формулу (П1.2) можно записать так

$$-A(\boldsymbol{\omega}) = C(\boldsymbol{\varphi})\left(\frac{d}{dt}C(-\boldsymbol{\varphi})\right) = A(-\dot{\theta}\mathbf{e} - \sin\theta\dot{\mathbf{e}} - (1 - \cos\theta)\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}})$$

Меняя в этой формуле знак у $\boldsymbol{\varphi}$ на противоположный и соответственно знак у $\mathbf{e}$ в правой части, получим формулу для антисимметричной матрицы (П2.1)

$$A(\boldsymbol{\omega}_*) = C(-\boldsymbol{\varphi})\left(\frac{d}{dt}C(\boldsymbol{\varphi})\right) = A(\dot{\theta}\mathbf{e} + \sin\theta\dot{\mathbf{e}} - (1 - \cos\theta)\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}),$$

а из нее вытекает формула (4.5) для угловой скорости в подвижных осях, что и требовалось показать.

Выводы. Выведена система уравнений (6.5) для вектора $\boldsymbol{\varphi}$, соответствующего теореме Эйлера о конечном повороте: вектор $\boldsymbol{\varphi}$ направлен по оси конечного поворота твердого тела и $\theta = |\boldsymbol{\varphi}|$ — угол плоского поворота вокруг этой оси. В уравнение входит функция $\Phi(\boldsymbol{\varphi}^2)$, которая с учетом неравенства (6.11) $\boldsymbol{\varphi}^2 \leq \pi^2$ определяется быстросходящимся рядом (6.10) с любой точностью. Так для вычисления ее с семью знаками достаточно взять восемь членов ряда. Показана эквивалентность системы (6.5) системе уравнений для кватернионов (7.2). Порядок системы (6.5) равен трем, то есть ниже порядка системы для кватернионов (7.2). Приведены формулы (6.9) координат ортов главных осей твердого тела в неподвижных осях. Они выражаются по формулам (6.9) через углы конечного поворота $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Автор благодарит В.Ф. Журавлева за обсуждения результатов и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997. 320 с.
2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука. 1973. 320 с.
3. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. Учебник. 2-е изд., перераб. и дополн. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с.
4. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
5. Jian S. Dai Euler–Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections // Mech.&Machine Theory, 2015. V. 92. P. 144–152.

On the Kinematic Description of the Motion of a Rigid Body

A. G. Petrov^{a, #}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: petrovipmech@gmail.com*

A system of ordinary differential equations is derived for a vector of finite rotation corresponding to Euler's theorem: the vector of finite rotation is directed along the axis of finite rotation of a solid and its length is equal to the angle of plane rotation around this axis. The system of equations is explicitly resolved with respect to the time derivative of the components of the rotation vector. The right part of the system depends on the rotation vector and the angular velocity vector in the main axes. The equivalence of the obtained system of equations to the system of equations for quaternions is shown. The coordinates of the orts of the main axes of a rigid body in fixed axes are expressed in terms of the angles of final rotation and the components of angular velocity according to simple analytical formulas.

Keywords: Euler's theorem on finite rotation, kinematics of a rigid body, quaternion, orientation

REFERENCES

1. Zhuravlev V.F. Fundamentals of Theoretical Mechanics. Moscow: Nauka, 1997. 320 p. (in Russian)
2. Branec V.N., Shmiglevskii I.P. Application of Quaternions in Problems Orientation of the Rigid Body. Moscow: Nauka, 1973. 320 p.
3. Golubev Iu.F. Fundamentals of Theoretical Mechanics. Moscow: Nauka, 1997. 320 p. (in Russian)
4. Chelnokov Iu.N. Application of Quaternions in Problems Orientation of the Rigid Body. Moscow: Nauka, 1973. 320 p.
5. Jian S. Dai Euler—Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections // Mech.&Machine Theory, 2015, vol. 92, pp. 144—152.