

УДК 533.6

**ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТИПОЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ
ДЛЯ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВОГО УДАРА**© 2023 г. А. А. Корняков¹, В. Г. Судаков^{1,*}, А. С. Щеглов¹¹Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

*e-mail: vit_soudakov@tsagi.ru

Поступила в редакцию 18.05.2023 г.

После доработки 30.07.2023 г.

Принята к публикации 30.07.2023 г.

В настоящей работе разработана модификация метода мультипольного разложения, которая позволяет связать распределение избыточного давления в ближнем поле сверхзвукового пассажирского самолета (СПС) с распределением в дальнем поле, которое необходимо для решения задачи распространения звукового удара от СПС. Выполнено обобщение способа решения интегральных уравнений, возникающих при мультипольном разложении. Разработан алгоритм для мультипольной коррекции сигнатур звукового удара, получаемых в численных расчетах ближнего возмущенного поля, проведено тестирование.

Ключевые слова: звуковой удар, мультипольное разложение, сверхзвуковой пассажирский самолет, ближнее поле, дальнее поле

DOI: 10.31857/S0032823523050089, EDN: VCJLNO

1. Введение. Проектирование гражданского сверхзвукового самолета требует оценки громкости звукового удара у поверхности земли, т.е. на большом расстоянии от самолета [1]. Для расчета характеристик звукового удара необходимо определять сигнатуры избыточного давления, генерируемые летательным аппаратом. Наиболее предпочтительным сценарием их получения является прямой расчет с использованием методов вычислительной аэродинамики от самолета до поверхности земли, т.к. он имеет наименьшее количество дополнительных предположений. Например, в [2] проведен расчет звукового удара от простого осесимметричного тела в рамках уравнений Эйлера, с последовательным разбиением пространства от самолета до земли на относительно небольшие полосы по высоте. Однако такой подход является чрезвычайно затратным, поэтому его заменяют упрощенными постановками [3].

В настоящее время одним из наиболее часто употребляемых подходов является проведение численного моделирования в ближнем возмущенном поле в рамках уравнений Эйлера или Рейнольдса, а затем использование полученных распределений избыточного давления для моделирования распространения волны звукового удара в атмосфере на основе классической квазилинейной теории и подходов геометрической акустики [4, 5] или с использованием дополненного уравнения Бюргерса [6]. Такую процедуру иногда называют двухслойной. Для корректного расчета распространения звукового удара начальное распределение следует брать на таком удалении от обтекаемого тела, где азимутальные возмущения малы относительно продольных [3, 7], т.е. начальное распределение должно быть локально осесимметричным с пренебрежимо малым поперечным течением.

Для реальных компоновок самолетов с крылом, воздухозаборниками и другими особенностями [6], способными порождать поперечное течение на значительных удалениях от тела, эти условия могут быть обычно удовлетворены на расстояниях больше пяти длин самолета L . Однако, параметрические расчеты полной трехмерной компоновки в рамках уравнений Рейнольдса с определением возмущений давления, которые малы по сравнению с величинами в набегающем потоке, на расстоянии $5-10L$ также является процедурой, требующей большой точности и очень существенных вычислительных ресурсов. Это связано с тем, что при удалении от летательного аппарата диссипативные свойства численной схемы приводят к увеличению погрешности расчета. Поэтому на практике часто берут избыточное давление на относительно близком расстоянии порядка $1-3L$, что ведет к погрешностям в определении сигналов звукового удара около земли из-за неучета существенного поперечного течения.

Чтобы уменьшить погрешность расчета и уменьшить расстояние, на котором необходимо определить начальное избыточное давление для задачи распространения звукового удара, можно применить трехслойную процедуру [8]. В этом случае избыточное давление можно брать на более близких расстояниях от летательного аппарата, потом применить процедуру коррекции этой эпюры для учета поперечного течения, а затем скорректированные возмущения использовать для задачи распространения звукового удара до земли. В настоящей работе для этой цели используется метод мультипольного разложения.

2. Метод мультипольного разложения. Метод мультипольного разложения [9] основан на точном решении линеаризованного уравнения для потенциала возмущенной скорости ϕ от сверхзвукового пассажирского самолета:

$$-\beta^2 \phi_{xx} + \phi_{rr} + \frac{1}{r} \phi_r + \frac{1}{r^2} \phi_{\theta\theta} = 0, \quad (2.1)$$

где в цилиндрической системе координат x — продольная координата, r — радиальная координата, θ — азимутальная; $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$, M — число Маха набегающего потока. Следует отметить, что данное уравнение предполагает малость возмущений скорости относительно скорости набегающего потока, и в нем оставлено только линейное приближение.

Решение уравнения (2.1) можно записать, разместив так называемые мультиполи с плотностью $A_n(x)$, $B_n(x)$ непрерывным образом вдоль оси x [9]:

$$\phi(x, r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{x-\beta r} (A_n(\xi) \cos(n\theta) + B_n(\xi) \sin(n\theta)) g_n(x - \xi, r) d\xi, \quad (2.2)$$

где ξ — переменная интегрирования, n — номер мультиполя, а функция интенсивности мультиполя g_n :

$$g_n(x, r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cosh(n \cosh^{-1}(x/\beta r))}{\sqrt{x^2 - \beta^2 r^2}} \quad (2.3)$$

В характеристических переменных ($\eta = x - \beta r$)

$$g_n(\eta, r) = g_{\infty}(\eta, r) G_n(\eta, r); \quad g_{\infty}(\eta, r) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{2\beta r\eta}}$$

$$G_n(\eta, r) = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta/(2\beta r)}} \cosh\left(n \cosh^{-1}\left(1 + \frac{\eta}{\beta r}\right)\right)$$

F -функцию Уитема [3] можно определить из линеаризованного соотношения для малых возмущений давления Δp :

$$\frac{\Delta p}{p_\infty} = \frac{\gamma M^2}{\sqrt{2\beta}r} F(r, \eta, \theta), \quad (2.4)$$

где p_∞ – давление окружающего воздуха, γ – отношение удельных теплоемкостей. Тогда

$$F(r, \eta, \theta) = \frac{1}{2\pi u_\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\eta} \frac{(A_n(\xi) \cos(n\theta) + B_n(\xi) \sin(n\theta)) G_n(\eta - \xi, r)}{\sqrt{\eta - \xi}} d\xi, \quad (2.5)$$

где u_∞ – скорость набегающего потока.

Следует отметить, что похожие формулы указаны, например, в [10, 11], однако там дифференцирование и интегрирование по η проводилось иначе, что ведет к некоторым различиям.

Пусть из CFD-расчета известно поле возмущений давления $\Delta p(x, R, \theta)$ на некоторой цилиндрической поверхности радиуса R вокруг летательного аппарата, на которой течение еще не является локально осесимметричным, но возмущения можно считать малыми. Из соотношения (2.4) можно найти F -функцию Уитема на цилиндре R . Раскладывая ее в ряд Фурье

$$F(\eta, \theta, R) = F_{c,n}(\eta, R) \cos(n\theta) + F_{s,n}(\eta, R) \sin(n\theta) \quad (2.6)$$

и вычислив интегралы, отвечающие за симметричную и несимметричную части,

$$H_{c,n} = \int_0^{\eta} F_{c,n}(\xi, R) d\xi, \quad H_{s,n} = \int_0^{\eta} F_{s,n}(\xi, R) d\xi, \quad (2.7)$$

можно получить интегральные уравнения для A_n, B_n :

$$\begin{aligned} H_{c,n}(\eta, R) &= \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_0^{\eta} A_n(\xi) \frac{G_n(\eta - \xi, R)}{\sqrt{\eta - \xi}} d\xi \\ H_{s,n}(\eta, R) &= \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_0^{\eta} B_n(\xi) \frac{G_n(\eta - \xi, R)}{\sqrt{\eta - \xi}} d\xi \end{aligned} \quad (2.8)$$

Несколько отличающиеся интегральные уравнения указаны в [10, 11], где дальнейшее их решение основано на разложении функции G_n в ряд Тэйлора

$$G_n(\eta, r) = \sum_{j=0}^J f_j \left(\frac{\eta}{\beta r} \right)^j; \quad f_0(n) = 1, \quad f_j(n) = \frac{n^2 - (j - 1/2)^2}{j(2j - 1)} f_{j-1}(n)$$

Такое разложение становится некорректным по мере уменьшения радиуса цилиндра R , т.к. при приближении к поверхности летательного аппарата ряд начинает расходиться. Кроме того, чем больше порядок мультиполя, тем больше требуется членов ряда Тэйлора. В результате расчетов авторы [11] получили расходимость решения при уменьшении R , по мере увеличения n и J .

В настоящей работе интегральные уравнения (2.8) решаются прямым численно-аналитическим методом второго порядка точности без дополнительных упрощений и асимптотических разложений, что позволяет избежать расходимости метода [10, 11]. Для этого в интегральных уравнениях относительно неизвестной функции $A(\xi)$ (2.8) вида

$$\int_0^{\eta} A(\xi) \frac{G(\eta - \xi)}{\sqrt{\eta - \xi}} d\xi = H(\eta)$$

производится переинтерполяция известных функций на равномерное разбиение $[\eta_1, \dots, \eta_K]$ с шагом $\Delta\eta$ (обычно производится разбиение не менее, чем на 500 отрезков). При этом функции предполагаются кусочно-линейными на каждом из отрезков. Тогда в каждой из точек η_k , $k = 2, \dots, K$:

$$H_k = \sum_{z=2}^k \int_{\eta_{z-1}}^{\eta_z} A(\xi) \frac{G(\eta_k - \xi)}{\sqrt{\eta_k - \xi}} d\xi = \\ = \sum_{z=2}^k \int_{\eta_{z-1}}^{\eta_z} \left(A_{z-1} + \frac{A_z - A_{z-1}}{\Delta\eta} (\xi - \eta_{z-1}) \right) \left(\frac{G_{k-z+2} - G_{k-z+1}}{\Delta\eta} (\eta_z - \xi) + G_{k-z+1} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{\eta_k - \xi}},$$

где $A_z = A(\eta_z)$, $H_k = H(\eta_k)$, $G_{k-z+1} = G(\eta_{k-z+1}) = G(\eta_k - \eta_z)$. Обозначим

$$\frac{G_{k-z+2} - G_{k-z+1}}{\Delta\eta} = P_{k,z}, \quad H_k = \sum_{z=2}^k (A_{z-1} D_{k,z-1} + A_z M_{k,z}); \quad k = 2, \dots, K,$$

где

$$D_{k,z-1} = - \int_{\eta_{z-1}}^{\eta_z} \frac{\xi - \eta_z}{\Delta\eta} (P_{k,z} (\eta_z - \xi) + G_{k-z+1}) \frac{d\xi}{\sqrt{\eta_k - \xi}} \\ M_{k,z} = \int_{\eta_{z-1}}^{\eta_z} \frac{\xi - \eta_{z-1}}{\Delta\eta} (P_{k,z} (\eta_z - \xi) + G_{k-z+1}) \frac{d\xi}{\sqrt{\eta_k - \xi}}$$

Интегралы $M_{k,z}$ вычисляются аналитически:

$$M_{k,z} = \frac{1}{15\Delta\eta} \left[4(\eta_k - \eta_{z-1})^{3/2} (5G_{k-z+1} - 4\eta_k P_{k,z} + 5\eta_z P_{k,z} - \eta_{z-1} P_{k,z}) - \right. \\ \left. - 2(\eta_k - \eta_z)^{1/2} (10\eta_k G_{k-z+1} + 5G_{k-z+1} \eta_z - 15\eta_{z-1} G_{k-z+1} - \right. \\ \left. - 8\eta_k^2 P_{k,z} + 2\eta_z^2 P_{k,z} + 6\eta_k \eta_z P_{k,z} + 10\eta_{z-1} \eta_k P_{k,z} - 10\eta_{z-1} \eta_z P_{k,z}) \right]$$

Интегралы $D_{k,z}$ вычисляются аналогично. В результате получается система алгебраических уравнений, которая решается стандартным методом.

Найдя A_n, B_n можно получить асимптотику при $r \rightarrow \infty$, которая соответствует локально осесимметричному полю и нужна для решения задачи распространения звукового удара:

$$F^\infty(\eta, \theta) = \frac{1}{2\pi u_\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^\eta \frac{A_n(\xi) \cos(n\theta) + B_n(\xi) \sin(n\theta)}{\sqrt{\eta - \xi}} d\xi \right) \quad (2.9)$$

Следует отметить, что возмущение давления, соответствующее этой F -функции, приписывается обратно цилиндру радиуса R . Это связано с тем, что возмущения в ближнем поле ищутся обычно при однородном набегающем потоке, и асимптотика соответствует именно такой постановке. Но в реальности при удалении от самолета играет роль изменение атмосферы с высотой и нелинейность, которые не учитываются данной асимптотикой.

Таким образом, алгоритм использования мультиполюсного разложения для коррекции эпюр избыточного давления следующий:

- 1) из соотношения (2.4) определить $F(\eta, \theta, R)$ на цилиндре радиуса R по результатам численного моделирования в рамках уравнений Эйлера или Рейнольдса;
- 2) разложить F в ряд Фурье на цилиндре по формуле (2.6);
- 3) вычислить интегралы (2.7);

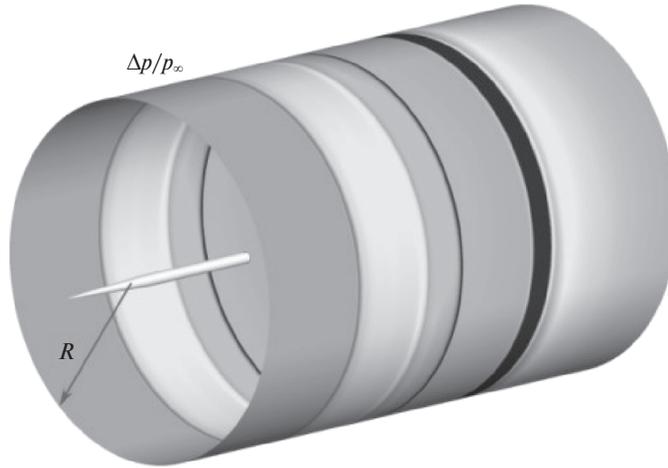


Рис. 1. Распределение избыточного давления на цилиндрической поверхности радиуса R для простого осесимметричного тела SEEB-ALR на расстоянии $R/L = 1.2$.

- 4) найти A_n, B_n из интегральных уравнений (2.8);
- 5) определить асимптотику $F^\infty(\eta, \theta)$ в дальнем поле по формуле (2.9);
- 6) найти скорректированное значение избыточного давления по формуле (2.4) и приписать его цилиндру радиуса R .

Далее скорректированную сигнатуру избыточного давления можно использовать в программах распространения звукового удара до земли, т.к. она будет соответствовать асимптотике дальнего поля, где течение локально осесимметрично (отсутствует азимутальное перетекание) и будет выполняться закон затухания $\sim r^{-1/2}$.

По данным результатам была разработана программа MPDtool для коррекции эпюр избыточного давления с помощью метода мультипольного разложения. Ниже представлены результаты ее использования для расчета звукового удара простых тел, которые рассматривались в First Sonic Boom Prediction Workshop (SBPW) в качестве тестовых случаев [12]: SEEB-ALR – простое осесимметричное тело и DWB-69 – компоновка фюзеляж–треугольное крыло с углом стреловидности 69° .

3. Расчетные исследования обтекания осесимметричного тела. Проведены исследования звукового удара от простого осесимметричного тела SEEB-ALR [12] (рис. 1), которое моделирует носовую часть СПС. Сначала предполагалось, что модель длиной $L = 0.4491$ м расположена в аэродинамической трубе [12] с нулевым углом атаки при параметрах набегающего потока $M = 1.6, T_\infty = 198.43$ К (температура набегающего потока), $p_\infty = 16148.93$ Па, что соответствует числу Рейнольдса по длине модели $Re = 4.36 \times 10^6$. Данные параметры выбраны для валидации ближнего поля возмущений модели, которое было измерено в аэродинамической трубе [12].

Проводился расчет ближнего поля в рамках уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью модели турбулентности Спалара–Аллмараса [13]. В расчетной области использовалась многоблочная структурированная сетка с семью миллионами ячеек, которая позволяет хорошо разрешить течение около поверхности тела. Размеры пристенных ячеек задавались так, чтобы Y^+ первой ячейки по нормали к поверхности был меньше 1. Численная задача решалась стандартной программой с помощью неяв-

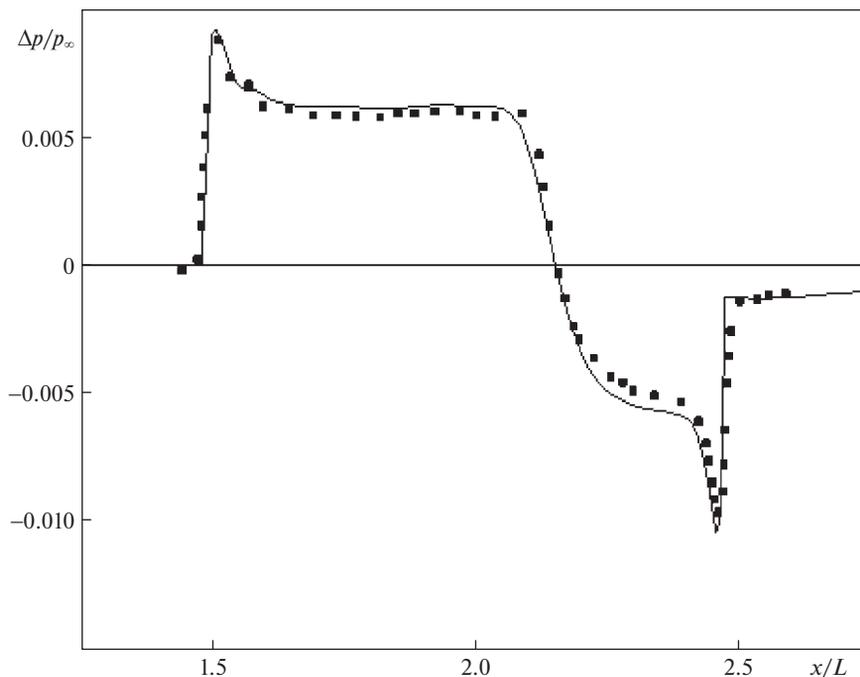


Рис. 2. Сравнение избыточного давления в ближнем поле на расстоянии $R/L = 1.2$ для простого осесимметричного тела SEEB-ALR; сплошная кривая — расчет, маркеры — эксперимент [12].

ного метода конечного объема сквозного счета. Схема имеет второй порядок точности по пространству. Численный алгоритм аналогичен используемому в [14].

Сравнение результатов численного моделирования в ближнем поле на расстоянии $R/L = 1.2$ вниз от модели с результатами эксперимента [12] приведено на рис. 2. Видно, что результаты расчета возмущений в ближнем поле лежат близко к экспериментальным данным.

Для задачи распространения звукового удара были сделаны предположения [12], что данное оживальное тело имеет длину $L = 74.8$ м и летит на высоте $H = 16764$ м с тем же числом Маха 1.6. Ближнее поле считалось аналогично, в результате чего были получены возмущения давления на цилиндрах радиуса $R/L = 0.25, 0.5, 1, 1.2, 2.38$.

Затем избыточное давление на этих цилиндрах корректировалось с помощью программы MPDtool на основе мультипольного разложения. Дискретизация по азимутальному углу составляла 2° . После этого полученная эпюра задавалась в качестве исходных данных для задачи распространения звукового удара до земли, которая решалась в рамках классического подхода [4, 5] с помощью собственной программы sbProp.

Результаты расчетов сигнатуры звукового удара на земле от осесимметричного тела SEEB-ALR представлены на рис. 3 для наибольшего и наименьшего из рассмотренных цилиндров $R/L = 2.38$ и 0.25 . Видно, что если не использовать мультипольное разложение, то эпюры на земле заметно отличаются для случаев расчета от ближнего поля на $R/L = 2.38$ (кривая 3 на рис. 3) и $R/L = 0.25$ (кривая 1 на рис. 3). Кривая 1 лежит заметно ниже под плато и отличается перед задним скачком. С увеличением R/L результаты сходятся к корректному решению, которое не зависит от R/L .

Использование мультипольной коррекции с $R/L = 2.38$ (кривая 4 на рис. 3) ведет к практически такой же сигнатуре на земле, как и без мультипольной коррекции (кри-

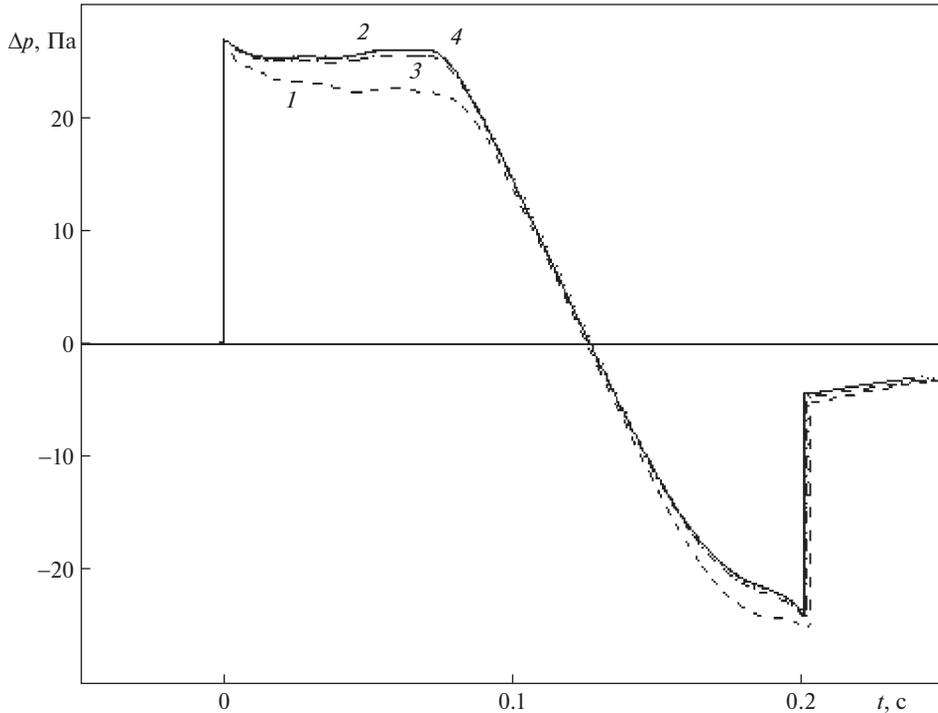


Рис. 3. Сигнатура звукового удара от SЕЕВ-ALR на земле с использованием и без использования мультипольного разложения.

вая 3). Это говорит о том, что кривая 3 практически совпадает с корректным (предельным) решением, т.к. толщина рассматриваемого тела мала, крыла нет и возмущения осесимметричны. Поэтому сигнатура с $R/L = 2.38$ без мультипольной коррекции и с ней практически сливаются.

Применение мультипольной коррекции для эпюры избыточного давления с $R/L = 0.25$ и последующее решение задачи распространения звукового удара до земли приводят к кривой 2, которая ложится на кривую 4 с $R/L = 2.38$. Это говорит о возможности считать ближнее поле возмущений от этого тела до $R/L = 0.25$ и применять его для задачи распространения звукового удара.

Следует отметить, что данное тело является практически осесимметричным (с точностью до изготовления [12]). Поэтому ближнее поле осесимметрично и мультипольное разложение по азимутальному углу не дает коррекции. Однако коррекция происходит из-за разложения по r , т.к. ближнее поле еще не соответствует асимптотике $\sim r^{-1/2}$, которая используется при решении задачи распространения звукового удара до земли.

4. Расчетные исследования компоновки крыло–фюзеляж. Проведены исследования звукового удара от компоновки DWB-69 фюзеляж–треугольное крыло с углом стреловидности 69° [12] (рис. 4). Крыло имеет ромбовидную форму с толщиной 5%. Сначала предполагалось, что модель длиной $L = 0.1752$ м расположена в аэродинамической трубе [12] с нулевым углом атаки при параметрах набегающего потока $M = 1.7$, $T_0 = 308.2$ К (полная температура набегающего потока), $p_0 = 110235$ Па (полное давление). Как и в случае оживального тела, проведена валидация ближнего поля моде-

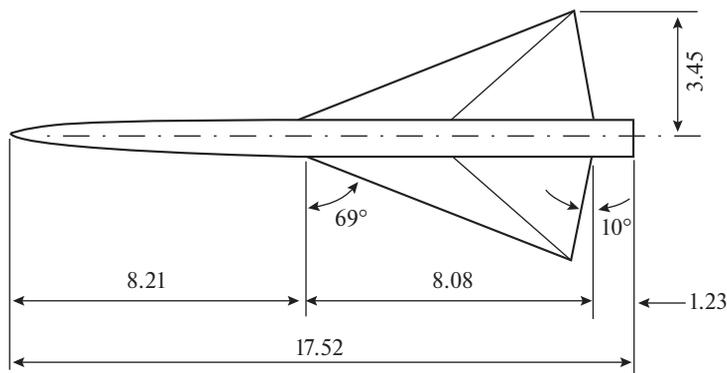


Рис. 4. Модель DWB-69 [12], размеры в сантиметрах.

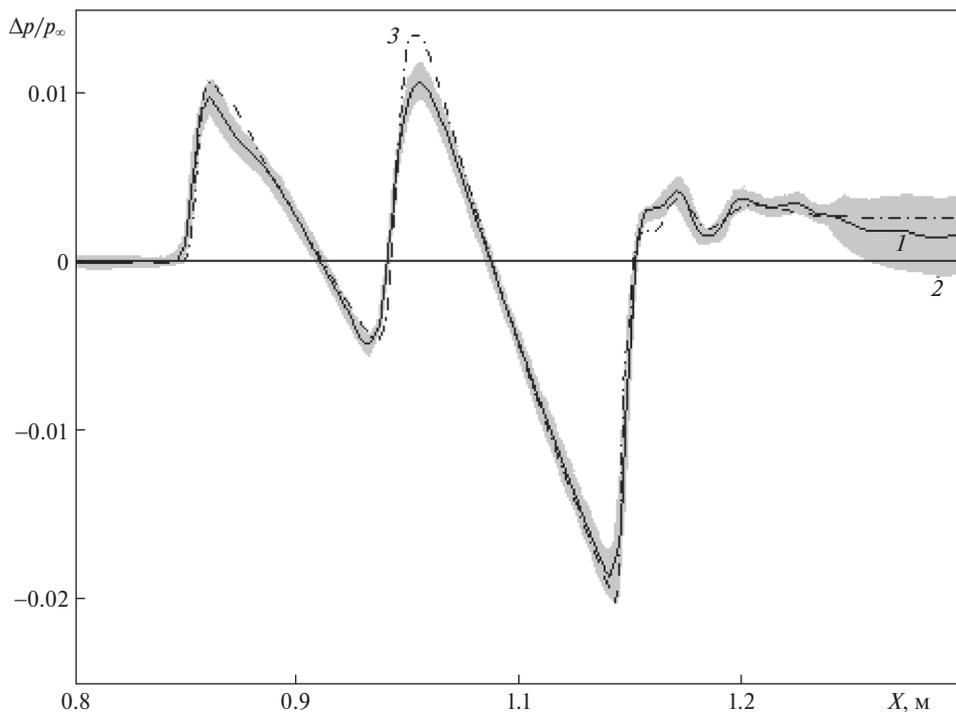


Рис. 5. Сравнение избыточного давления в ближнем поле на расстоянии $R/L = 3.6$ для компоновки крыло–фюзеляж DWB-69; сплошная кривая 1 – эксперимент [12], серая область 2 – разброс экспериментальных данных, 3 – расчет.

ли [12], которое рассчитывалось для половины симметричной модели аналогично предыдущему пункту. Использовалась многоблочная структурированная сетка с пятьюдесятью миллионами ячеек с Y^+ первой ячейки по нормали к поверхности меньше 1.

На рис. 5 представлено сравнение численного решения в рамках уравнений Рейнольдса (кривая 3) на расстоянии $R/L = 3.6$ вниз от модели с результатами эксперимента [12] (сплошная кривая 1 и разброс экспериментальных данных, обозначенный серой областью 2). Результаты расчета (кривая 3) ближнего поля лежат близко к экспериментальным данным и попадают в разброс расчетных значений других авторов [12].

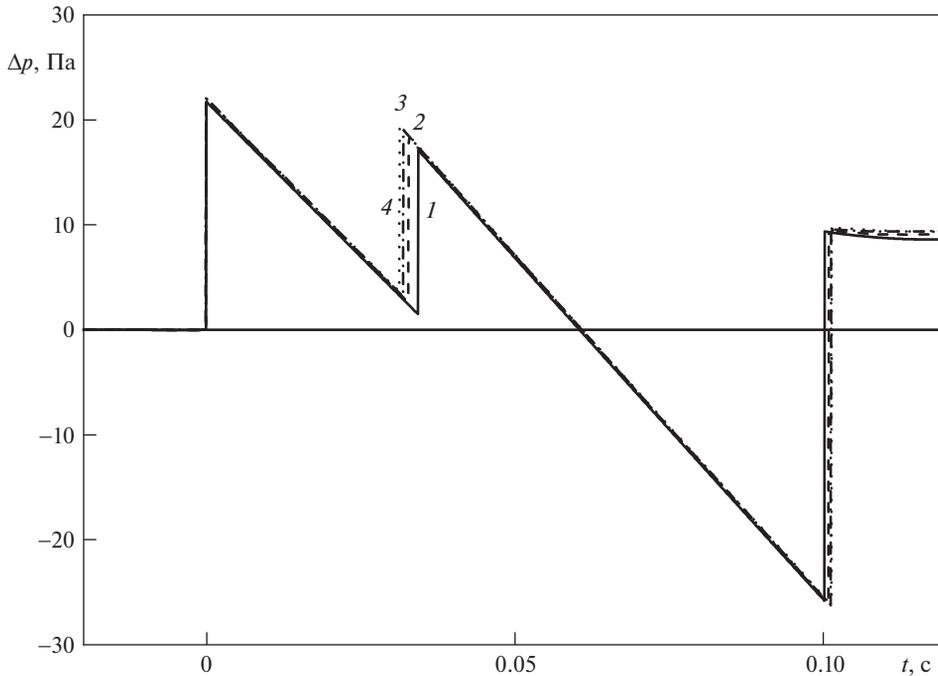


Рис. 6. Сигнатура звукового удара от DWB-69 на земле без использования мультипольного разложения, 1 – от $R/L = 0.5$, 2 – $R/L = 1$, 3 – $R/L = 2$, 4 – $R/L = 3.6$.

Для задачи распространения звукового удара были сделаны предположения [12], что данная компоновка имеет длину $L = 26.95$ м и летит на высоте $H = 16764$ м с тем же числом Маха 1.7. Ближнее поле считалось аналогично, в результате чего были получены возмущения давления на цилиндрах радиуса $R/L = 0.5, 1, 2, 3, 3.6$.

Затем, как и ранее, избыточное давление на этих цилиндрах корректировалось с помощью программы MPDtool на основе мультипольного разложения, а полученная эпюра задавалась в качестве исходных данных для задачи распространения звукового удара до земли по программе sbProp. Количество мультиполей в разложении было $n = 10$.

Результаты расчетов сигнатуры звукового удара на земле от компоновки DWB-69 представлены на рис. 6 для расчетов от $R/L = 0.5, 1, 2, 3.6$ без использования мультипольной коррекции. Эпюры сходятся к предельному корректному значению при увеличении R/L , как это хорошо видно на промежуточном и замыкающем скачке (передний скачок для всех эпюр совмещен с началом координат).

Использование мультипольной коррекции (рис. 7) ведет к тому, что на земле все сигнатуры (при расчете от $R/L = 0.5, 1, 2, 3.6$) практически сливаются. Кроме того, эпюра от $R/L = 3.6$ без коррекции (кривая 4 на рис. 6) очень близка к эпюрам после коррекции (все кривые на рис. 7). Это говорит о сходимости метода и возможности использования ближнего поля от $R/L = 0.5$ с применением мультипольного разложения.

5. Применение интеграла Жилина. Ранее в [15] был разработан подход для определения звукового удара на земле от СПС с использованием интеграла Жилина. В этом случае ближнее поле может быть рассчитано в рамках, например, уравнений Эйлера или Рейнольдса. Предполагается, что возмущения, вносимые летательным аппаратом в набегающий поток, малы, и используется линейное приближение.

В [15] проведена контрольная поверхность из плоскостей S_1-S_4 (рис. 8). S_1 отделяет возмущенный поток от невозмущенного (конус Маха). S_2 обычно параллельна плоскости XZ , лежит ниже тела и не пересекает его. Точки A и B лежат на линии пересече-

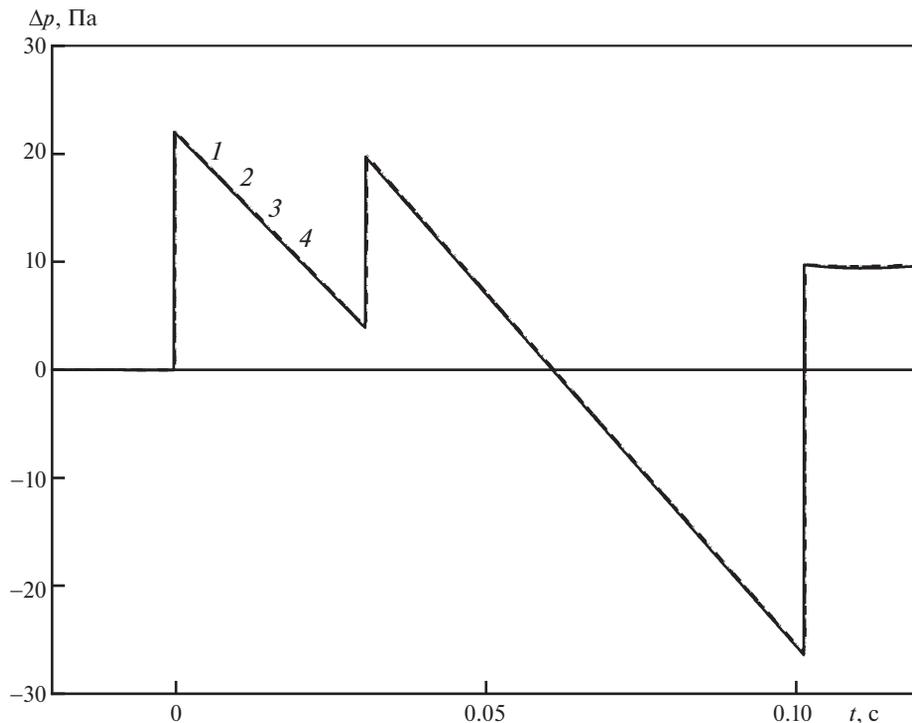


Рис. 7. Сигнатура звукового удара от DWB-69 на земле с использованием мультипольного разложения, 1 – от $R/L = 0.5$, 2 – $R/L = 1$, 3 – $R/L = 2$, 4 – $R/L = 3.6$.

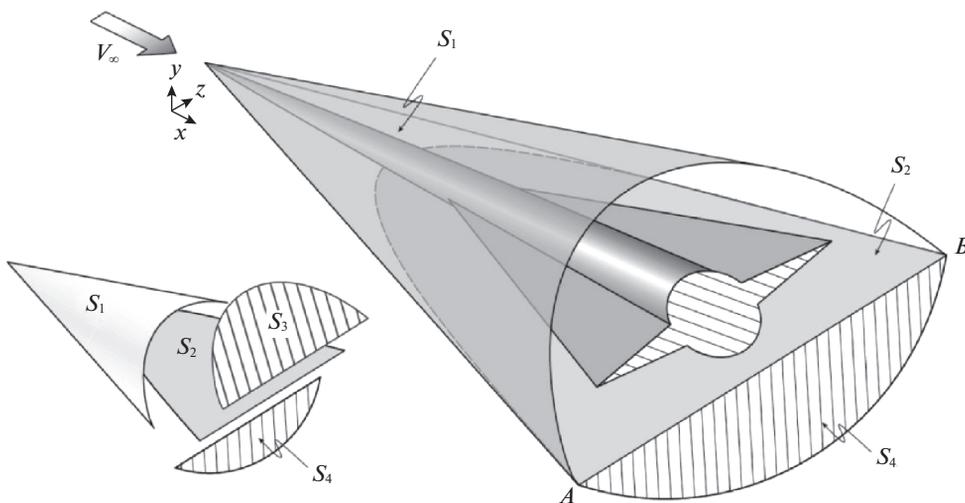


Рис. 8. Плоскости для определения интегралов Жилина [15].

ния плоскости S_2 и поверхности S_1 , S_3 и S_4 – огибающие обратных конусов Маха, проходящие через отрезок AB .

Из интегральных теорем сохранения массы и импульса в линейном приближении, записанных для данной контрольной поверхности, получены интегралы Жилина, позволяющие найти площадь эквивалентного тела вращения S_e :

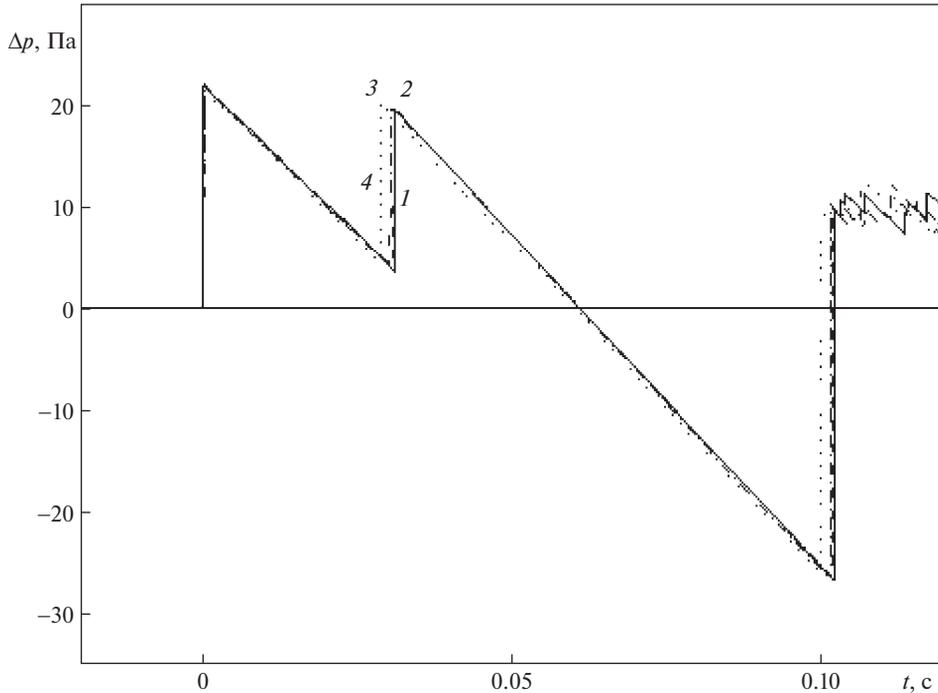


Рис. 9. Сигнатура звукового удара от DWB-69 на земле с использованием интеграла Жилина, 1 – от $R/L = 0.3$, 2 – $R/L = 0.5$, 3 – $R/L = 1$, 4 – $R/L = 3$.

$$S_e(x_0) = -\frac{2\beta}{u_\infty} \iint_{S_2} u dS = -\frac{2}{u_\infty} \iint_{S_2} v dS,$$

где u, v – возмущения продольной и вертикальной компоненты скорости соответственно; x_0 – координата точки пересечения S_3 с осью x . Выписанные формулы верны для направления под самолетом, а для других азимутальных углов они усложняются. Также можно записать:

$$\frac{dS_e(x_0)}{dx_0} = -\frac{2\beta}{u_\infty} \int_A^B u dz = -\frac{2}{u_\infty} \int_A^B v dz, \tag{5.1}$$

где интегралы вычисляются вдоль отрезка AB .

Далее для расчетов будет использоваться второй из этих интегралов относительно v . Тогда F -функцию Уитема можно вычислить по стандартной формуле [3]:

$$F(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{S_e''(\xi)}{\sqrt{\eta - \xi}} d\xi$$

Для сравнения такого подхода с предыдущими проведены расчеты звукового удара от компоновки DWB-69 с длиной $L = 26.95$ м, которая летит на высоте $H = 16764$ м с числом Маха 1.7 (как в разд. 3). Расчет ближнего поля представлен в разд. 3. В результате были получены возмущения давления в плоскостях $H/L = 0.3, 0.5, 1, 2, 3$. Затем при помощи второго интеграла (5.1) находилась F -функция Уитема, которая использовалась для решения задачи распространения звукового удара до земли.

Результаты расчетов сигнатуры звукового удара на земле представлены на рис. 9 для разных вариантов H/L . Эпюры сходятся к предельному значению при увеличении H/L , как это видно на промежуточном скачке (передний скачок для всех эпюр совмещен с

началом координат). Однако, избыточное давление для $H/L = 0.3$ заметно отличается от случая $H/L = 3$.

Таким образом, в [15] были получены интегральные соотношения для возмущенных скоростей, которые можно использовать для задачи распространения звукового удара до земли. Но такой подход, в целом, имеет схожие недостатки, что и двухслойный подход, указанный во введении. Как указано в [15], способом решения задачи может служить прямой расчет пространственного обтекания тела с выходом на асимптотическое решение, где оно развивается в каждой меридиональной плоскости независимо с зависимостью $\sim r^{-1/2}$. Такое поведение для сложных компоновок достигается обычно после 5 длин летательного аппарата.

Другой вариант, указанный, например, в [3] содержит расчет ближнего поля в рамках уравнений Эйлера с определением интеграла Жилина на плоскости $H/L = 0.3-0.5$, затем расчет распространения избыточного давления по закону Келлера [16] до $\sim 5L$. После чего проводится расчет распространения звукового удара до земли в атмосфере по классической теории [4].

Таким образом, для надежного предсказания эпюры избыточного давления на земле исходные данные для задачи распространения звукового удара надо брать на расстоянии больше $5L$ даже в случае использования интеграла Жилина.

Заключение. Разработан метод расчета звукового удара от СПС с использованием мультипольного разложения с численно-аналитическим прямым способом решения возникающих интегральных уравнений второго порядка точности. Метод не имеет расходимости даже на малых расстояниях от летательного аппарата ~ 0.25 его длины.

Проведено сравнение интенсивности звукового удара для простого осесимметричного тела и компоновки крыло-фюзеляж с использованием мультипольного разложения и без него. Показано, что разработанный метод сходится к корректному решению и позволяет применять избыточное давление из ближнего поля с расстояния до 1 длины летательного аппарата для задачи распространения звукового удара до земли.

Авторы благодарят Ю.С. Суворову и К.Г. Хайруллина за помощь при проведении расчетов.

Публикация подготовлена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня “Сверхзвук” на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение о предоставлении гранта в форме субсидий из федерального бюджета на осуществление государственной поддержки создания и развития научных центров мирового уровня, выполняющих исследования и разработки по приоритетам научно-технологического развития от 17 мая 2022 г. № 075-15-2022-1023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения // ПММ. 1945. Т. 9. № 4. С. 286–292.
2. Yamashita R., Wutschitz L., Nikiforakis N. A full-field simulation methodology for sonic boom modelling on adaptive Cartesian cut-cell meshes // J. Comput. Phys. 2020. V. 408. № 109271. P. 1–19.
3. Чернышев С.Л. Звуковой удар. М.: Наука, 2011. 351 с.
4. Жилин Ю.Л. О звуковом ударе // Уч. зап. ЦАГИ. 1971. Т. 2. № 3. С. 1–11.
5. Thomas C.L. Extrapolation of sonic boom pressure signatures by the waveform parameter method // NASA TN D-6832. 1972. 35 p.
6. Chernyshev S.L., Gorbovskoy V.S., Kazhan A.V., Korunov A.O. Re-entry vehicle sonic boom issue: modelling and calculation results in windy atmosphere based on the augmented Burgers equation // Acta Astron. 2022. V. 194. P. 450–460.
7. Maglieri D.J., Bobbitt P.J., Plotkin K.J., Shepherd K.P., Coen P.G., Richwine D.M. Sonic boom. Six decades of research // NASA-SP-2014-622. 2014. 539 p.

8. *Page J.A., Plotkin K.J.* An efficient method for incorporating computational fluid dynamics into sonic boom prediction // AIAA Paper 1991-3275. 1991.
9. *George A.* Reduction of sonic boom by azimuthal redistribution of overpressure // AIAA J. 1969. V. 7. № 2. P. 291–297.
10. *Rallabhandi S.K., Mavris D.N.* New computational procedure for incorporating computational fluid dynamics into sonic boom prediction // J. Aircraft. 2007. V. 44. № 6. P. 1964–1971.
11. *Kanamori M., Makino Y., Ishikawa H.* Extension of multipole analysis to laterally asymmetric flow-field around supersonic flight vehicle // AIAA J. 2019. V. 56. № 1. P. 191–204.
12. *Park M.A., Morgenstern J.M.* Summary and statistical analysis of the first AIAA sonic boom prediction workshop // J. Aircraft. 2016. V. 53. № 2. P. 578–598.
13. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper 1992-0439. 1992.
14. *Fedorov A.V., Soudakov V.G., Malmuth N.D.* Theoretical modeling of two-body interaction in supersonic flow // AIAA J. 2010. V. 48. № 2. P. 258–266.
15. *Жилин Ю.Л., Коваленко В.В.* О связывании ближнего и дальнего полей в задаче о звуковом ударе // Уч. зап. ЦАГИ. 1998. Т. XXIX. № 3–4. С. 111–122.
16. *Keller J.B.* Geometrical acoustics. I. The theory of weak shock waves // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. № 8. P. 938–947.

Application of Multipole Decomposition for Sonic Boom Propagation Problems

A. A. Korniyakov^{a, #}, V. G. Soudakov^{a, #}, and A. S. Shcheglov^a

^aCentral Aerohydrodynamic Institute named after prof. N.E. Zhukovsky, Zhukovsky, Russia

[#]e-mail: vit_soudakov@tsagi.ru

In the present work a modification of the multipole decomposition method is developed, which makes it possible to relate the overpressure distribution in the near-field of a supersonic transport (SST) with a far-field distribution, which is needed for the solution of sonic boom propagation problem from SST. A generalization of the method for solving the integral equations arising from multipole decomposition is performed. An algorithm for multipole correction of near-field overpressure signatures obtained in numerical simulations has been developed and tested.

Keywords: sonic boom, multipole decomposition, supersonic transport, near field, far field

REFERENCES

1. *Landau L.D.* On shock waves at long distances from their origin // PMM, 1945, vol. 9, no. 4, pp. 286–292. (in Russian)
2. *Yamashita R., Wutschitz L., Nikiforakis N.* A full-field simulation methodology for sonic boom modelling on adaptive Cartesian cut-cell meshes // J. Comput. Phys., 2020, vol. 408, no. 109271, pp. 1–19.
3. *Chernyshev S.L.* Sound Impact. Moscow: Nauka, 2011. 351 p. (in Russian)
4. *Zhilin Yu.L.* On sonic boom // Uch. Zap. TsAGI, 1971, vol. 2, no. 3, pp. 1–11. (in Russian)
5. *Thomas C.L.* Extrapolation of sonic boom pressure signatures by the waveform parameter method // NASA TN D-6832, 1972, 35 p.
6. *Chernyshev S.L., Gorbovskey V.S., Kazhan A.V., Korunov A.O.* Re-entry vehicle sonic boom issue: modelling and calculation results in windy atmosphere based on the augmented Burgers equation // Acta Astron., 2022, vol. 194, pp. 450–460.
7. *Maglieri D.J., Bobbitt P.J., Plotkin K.J., Shepherd K.P., Coen P.G., Richwine D.M.* Sonic boom. Six decades of research // NASA-SP-2014-622, 2014, 539 p.
8. *Page J.A., Plotkin K.J.* An efficient method for incorporating computational fluid dynamics into sonic boom prediction // AIAA Paper 1991-3275, 1991.
9. *George A.* Reduction of sonic boom by azimuthal redistribution of overpressure // AIAA J., 1969, vol. 7, no. 2, pp. 291–297.

10. *Rallabhandi S.K., Mavris D.N.* New computational procedure for incorporating computational fluid dynamics into sonic boom prediction // *J. Aircraft*, 2007, vol. 44, no. 6, pp. 1964–1971.
11. *Kanamori M., Makino Y., Ishikawa H.* Extension of multipole analysis to laterally asymmetric flow field around supersonic flight vehicle // *AIAA J.*, 2019, vol. 56, no. 1, pp. 191–204.
12. *Park M.A., Morgenstern J.M.* Summary and statistical analysis of the first AIAA sonic boom prediction workshop // *J. Aircraft*, 2016, vol. 53, no. 2, pp. 578–598.
13. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // *AIAA Paper* 1992-0439, 1992.
14. *Fedorov A.V., Soudakov V.G., Malmuth N.D.* Theoretical modeling of two-body interaction in supersonic flow // *AIAA J.*, 2010, vol. 48, no. 2, pp. 258–266.
15. *Zhilin Yu.L., Kovalenko V.V.* On the coupling of the near and far fields in the problem of a sonic boom // *Uch. Zap. TsAGI*, 1998, vol. XXIX, no. 3–4, pp. 111–122. (in Russian)
16. *Keller J.B.* Geometrical acoustics. I. The theory of weak shock waves // *J. Appl. Phys.*, 1954, vol. 25, no. 8, pp. 938–947.