

УДК 531.36

О ГИБКОСТИ СКОЛЬЗЯЩЕЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОПОРЫ ПЛОСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

© 2023 г. М. З. Досаев^{1,*}¹НИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: dosayev@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 05.04.2023 г.

После доработки 15.06.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

Рассмотрено плоское тело на шарнирных опорах. Одна из опор соединена с телом с помощью скользящей заделки. Гибкость опорных стержней моделируется шарниром со спиральной пружиной достаточно большой жесткости, препятствующей относительному повороту. Показано, что линеаризация уравнений равновесия не дает возможности оценить положение равновесия. Положение равновесия ищется в виде ряда по величине обратной коэффициенту жесткости спиральной пружины. Показано, что при стремлении коэффициента жесткости спиральной пружины к бесконечности величина момента спиральной пружины, моделирующей внутренние усилия в стержнях на изгиб, стремится к бесконечности. Для случая вертикального равновесия дана оценка тангенциальной реакции в опорном шарнире, возникающей при введении дополнительных нагрузок и в случае возникновения малых колебаний. Во всех рассмотренных случаях реакция, которая возникает в опорах, намного превышает вес тела.

Ключевые слова: скользящая заделка, упругая пружина, положение равновесия, реакция в опоре

DOI: 10.31857/S0032823523040045, EDN: WHZHG Y

1. Введение. В некоторых строительных конструкциях [1–4] применяются скользящие сочленения, например для защиты здания от сейсмических разрушений. Исследование таких типов соединений может представлять практический интерес.

Для борьбы с температурными расширениями креплений металлической кровли применяются скользящие сочленения. Перспективная модель такого скользящего соединения с увеличенным перемещением опоры предложена в [5].

Возможность применения гибридной скользящей качающейся колонны в качестве поддерживающей системы приподнятого резервуара исследована в работе [6]. Результаты показывают, что гибридные скользящие качающиеся колонны более эффективны, чем другие решения, в снижении сдвига основания конструкции при землетрясениях.

В работе [7, 8] описаны проблемы, связанные с определением силы скользящих опорных систем. Представлены метод идентификации силы на основе конечных элементов и процедура выбора точки измерения деформации для идентификации сил скольжения без какой-либо информации об их начальных положениях и величинах. Задача квадратичного программирования с линейными ограничениями и, в некоторых случаях, нелинейный метод наименьших квадратов используются для идентифи-

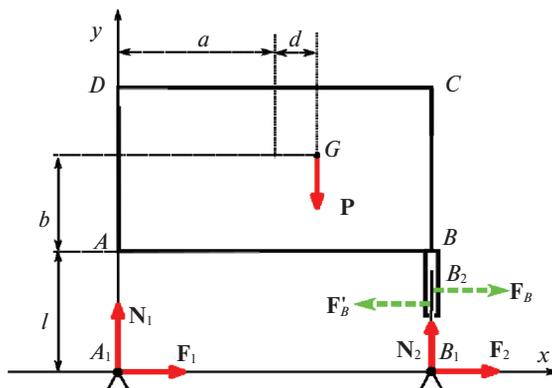


Рис. 1. Плоская механическая система с жесткими фиксированной и скользящей опорами.

кации либо сосредоточенных сил скольжения, либо равномерно распределенных скользящих нагрузок.

Инновационное скользящее угловое соединение “косынка” было предложено в [9, 10] для решения проблем в соединениях раскосов с элементами каркаса. По сравнению со сварным косыночным соединением, скользящее косыночное соединение уменьшило пластическую деформацию элементов рамы при сейсмических нагрузках.

В [11] рассмотрена задача о равновесии тела, опирающегося жесткими и телескопическими опорами на неподвижные шарниры. Показано, что добавление такого, казалось бы, потенциально скользящего сочленения может не придать подвижности в конструкции. При этом величина реакций опор может оказаться критически большой.

Постановка, предложенная в [11] предусматривает абсолютную жесткость опорных стержней системы. В реальной практике, конечно, эти опорные элементы допускают некоторый изгиб. Представляет интерес рассмотреть задачу влияния гибкости элементов конструкции на поведение таких типов соединений.

Рассматривается плоская механическая система (рис. 1), опирающаяся на два цилиндрических шарнира A_1 и B_1 , расположенных на одной высоте.

Система состоит из тяжелого прямоугольного тела $ABCD$ ($AB = 2a$, $AD = 2b$) массой m , жестко связанных с ним невесомых стержня AA_1 длиной l и направляющих, параллельных AA_1 , по которым может скользить без трения невесомый телескопический стержень B_1B_2 . Таким образом, стержень B_1B_2 соединен с телом $ABCD$ посредством вертикальной скользящей заделки. Центр масс прямоугольника G смещен от его геометрического центра вдоль стороны AB на расстояние d .

Опишем внешние силы, действующие на систему. Кроме силы тяжести $mg = P$, на систему действуют реакции в шарнирах, которые мы разложим на нормальные N_1 , N_2 и тангенциальные F_1 , F_2 реакции. Среди внутренних сил отметим силы между направляющей F_B , F'_B и стержнем B_1B_2 . Эти силы перпендикулярны стержню B_1B_2 . Как показано в [11], механическая система не может сдвинуться из своего вертикального положения (рис. 1), несмотря на наличие потенциально подвижного сочленения.

Введем для удобства систему координат $A_1x_1y_1$. Ось A_1x_1 направим по горизонтали, а ось A_1y_1 по вертикали.

В реальной практике опорные элементы не являются абсолютно жесткими и допускают некоторый изгиб. В данной работе дана оценка влияния гибкости скользящего упругого сочленения на величины усилий в элементах конструкции и тангенциальной

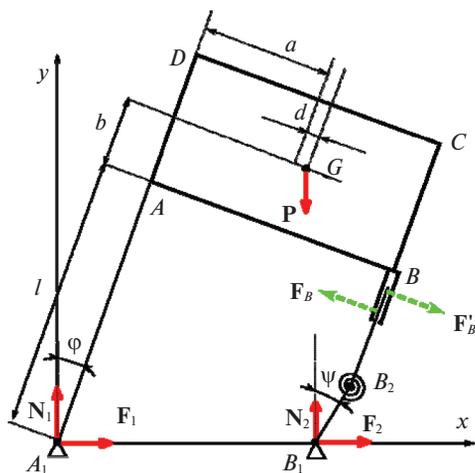


Рис. 2. Имитация гибкости скользящей опоры с помощью спиральной пружины.

реакции в опоре. Будем имитировать гибкость различных опорных элементов конструкции с помощью дополнительных шарниров и упругих пружин.

2. Гибкость скользящей опоры. Внесем в постановку задачи некоторую гибкость скользящей опоры. Для этого добавим в рассмотрение дополнительный шарнир, оснастив его пружиной достаточно большой жесткости, препятствующей повороту этого шарнира.

Разобьем невесомый стержень B_1B_2 на два невесомых стержня: стержень B_1B_3 длиной l_1 и телескопический стержень B_3B_2 (рис. 2). Стержни B_1B_3 и B_3B_2 соединены друг с другом цилиндрическим шарниром B_3 и спиральной пружиной жесткостью c , препятствующей повороту этого шарнира. Пружина находится в равновесии, когда стержни B_1B_3 и B_3B_2 сонаправлены.

К внутренним силам, действующим на систему, добавился момент T от спиральной пружины.

Несмотря на добавление степени подвижности стержня B_1B_2 , у рассматриваемой механической системы есть только одна степень свободы. При необходимости можно рассмотреть динамику системы и найти характеристики колебаний, например, с помощью метода [12] или прямого численного интегрирования [13]. В рамках данной статьи мы ограничимся расчетом положений равновесия, а также дадим оценку усилиям в опорных стержнях на изгиб и величине тангенциальной реакции в опоре без интегрирования уравнений движения.

Положение системы зададим обобщенной координатой: φ – угол между стержнем AA_1 и вертикалью. Для удобства введем дополнительную переменную: угол ψ между вертикалью и прямой B_1B_3 .

Найдем зависимость $\psi = \psi(\varphi)$. Для этого запишем разными способами горизонтальную и вертикальную координаты точки B :

$$\begin{aligned} x_B &= l \sin \varphi + 2a \cos \varphi = 2a + l_1 \sin \psi + |B_3B| \sin \varphi \\ y_B &= l \cos \varphi - 2a \sin \varphi = l_1 \cos \psi + |B_3B| \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из (2.1) получим:

$$\psi = \psi(\varphi) = \varphi + \arcsin [2a(1 - \cos \varphi)/l_1] \quad (2.2)$$

Величина момента T определяется следующим образом: $T = c(\psi - \varphi)$.

2.1. Уравнения для положения равновесия. Дадим оценку величины момента спиральной пружины в положении равновесия. Будем искать равновесие вблизи вертикального положения опоры AA_1 , то есть для малых значений угла φ . Потенциальная энергия системы Π может быть записана следующим образом:

$$\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_T, \quad \Pi_{mg} = mgy_G, \quad \Pi_T = \frac{c}{2}(\psi - \varphi)^2, \quad (2.3)$$

где высота y_G центра масс G системы определяется следующим соотношением: $y_G = (l + b) \cos \varphi - (a + d) \sin \varphi$, а разность углов задается формулой (2.2): $\psi - \varphi = \arcsin(2a(1 - \cos \varphi)/l_1) = a\varphi^2/l_1 + o(\varphi^4)$.

Отметим, что потенциальная энергия спиральной пружины (как и в работе [14]) зависит от угла φ в четвертой степени, поэтому процедура линеаризации уравнений равновесия здесь бесполезна.

Уравнение для положения равновесия системы:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mg(-(l + b) \sin \varphi - (a + d) \cos \varphi) + \frac{2ca \sin \varphi \arcsin\left(2\frac{a}{l_1}(1 - \cos \varphi)\right)}{l_1 \sqrt{1 - 4\left(\frac{a}{l_1}\right)^2 (1 - \cos \varphi)^2}} = 0 \quad (2.4)$$

Разложим уравнение (2.4) в ряд Тейлора по углу φ и отбросим в нем члены выше третьего порядка малости:

$$-mg(a + d) - mg(l + b)\varphi + \frac{1}{2}mg(a + d)\varphi^2 + \frac{1}{6}\left[mg(l + b) + 12c\left(\frac{a}{l_1}\right)^2\right]\varphi^3 = 0 \quad (2.5)$$

Отметим, что в (2.5) параметр c появляется лишь при члене третьего порядка малости по углу φ . Считая параметр c достаточно большой величиной, будем искать решение уравнения (2.5) в следующем виде:

$$\varphi = \frac{a_1}{c^{1/3}} + \frac{a_2}{c^{2/3}} + \frac{a_3}{c}, \quad (2.6)$$

где коэффициенты должны быть определены.

Подставим решение (2.6) в уравнение (2.5) и отбросим члены разложения уравнения порядка меньше, чем $1/c$. На неизвестные коэффициенты разложения a_1, a_2, a_3 получим три уравнения:

$$\begin{aligned} a_1^3 &= \frac{1}{2}mg(a + d)\left(\frac{l_1}{a}\right)^2 \\ a_2 &= mg\frac{l + b}{6a_1}\left(\frac{l_1}{a}\right)^2 \\ a_3 &= \frac{1}{a_1}\left[mg\frac{2(l + b)a_2 - (a + d)a_1^2}{12a_1}\left(\frac{l_1}{a}\right)^2 - a_2^2\right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отметим, что разложение величины момента T в ряд Тейлора приводит к следующему соотношению:

$$T = \frac{ac}{l_1}\varphi^2 + o(\varphi^4) \quad (2.8)$$

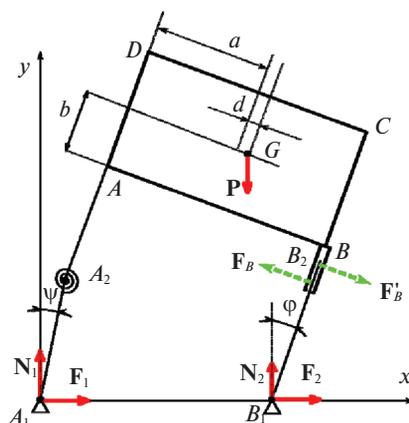


Рис. 3. Имитация гибкости фиксированной опоры с помощью спиральной пружины.

Подставим в (2.8) решение (2.6)–(2.7):

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{2l_1}{a} \right)^{1/3} \left[(mg)^2 \frac{(a+d)^2}{c} \right]^{1/3} + \frac{mg}{3a} ll_1 + o(c^{-1/3}) \quad (2.9)$$

Очевидно, при устремлении c к бесконечности величина момента T также стремится к бесконечности. Таким образом, с ростом жесткости скользящего стержня нагрузка на его изгиб также растет. На практике это означает, что при условии жесткости остальных связей достаточно жесткая скользящая опора просто переломится при установке!

3. Гибкость фиксированной опоры. Смоделируем теперь гибкость левой фиксированной опоры A_1A . Пусть правая телескопическая опора представляет собой жесткий невесомый стержень B_1B_2 , скользящий по направляющим. Стержень A_1A разделим на два одинаковых (для простоты) стержня AA_2 и A_1A_2 , соединенных цилиндрическим шарниром A_2 и спиральной пружиной жесткостью c , препятствующей повороту этого шарнира (рис. 3). Пружина находится в равновесии, когда стержни AA_2 и A_1A_2 сонаправлены.

У системы, по-прежнему, одна степень свободы. Положение системы зададим углом φ между стержнем B_1B_2 и вертикалью. Для удобства введем дополнительную переменную: угол ψ между вертикалью и прямой A_1A_2 . В этом случае, величина момента T вновь пропорциональна разности углов φ и ψ : $T = c(\psi - \varphi)$, и потенциальная энергия системы задается формулой (2.3).

Найдем зависимость $\psi = \psi(\varphi)$. Получим разными способами горизонтальную и вертикальную координаты точки B :

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{l}{2} (\sin \varphi + \sin \psi) + 2a \cos \varphi = 2a + |B_1B| \sin \varphi \\ y_B &= \frac{l}{2} (\cos \varphi + \cos \psi) - 2a \sin \varphi = |B_1B| \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из (3.1) получим:

$$\psi = \psi(\varphi) = \varphi + \arcsin \left[4 \frac{a}{l} (\cos \varphi - 1) \right] = \varphi + o(\varphi^2) \quad (3.2)$$

Потенциальная энергия системы Π выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi = mgl \cos \left(\varphi + \frac{1}{2} \arcsin \left[4 \frac{a}{l} (\cos \varphi - 1) \right] + \left(\frac{l}{2} + b \right) \cos \varphi - (a + d) \sin \varphi \right) + \\ + \frac{a}{2} \arcsin^2 \left[4 \frac{a}{l} (\cos \varphi - 1) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Левая часть уравнения для определения положения равновесия системы, получаемая как частная производная от (3.3) по углу φ , достаточно громоздкая, и это уравнение здесь не приводится. Однако, разложив это уравнение в ряд Тейлора по углу φ и отбросив в нем члены выше третьего порядка малости, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} -mg(a + d) - mg(l + b)\varphi + \frac{1}{2} mg(7a + d)\varphi^2 + \\ + \frac{48ca^2 - 24a^2lmg + (l + b)l^2mg}{6l^2} \varphi^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отметим, что в (3.4), как и в (2.5), коэффициент жесткости пружины c появляется лишь при члене третьего порядка малости по углу φ . Найдем решение уравнения (3.4) в виде ряда (2.6).

Подставим получившийся ряд в уравнение (3.4) и отбросим члены разложения уравнения порядка меньше, чем $1/c$. Коэффициенты разложения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1^3 &= \frac{mg}{8} (a + d) \left(\frac{l}{a} \right)^2 \\ a_2 &= \frac{mg}{24} \frac{l + b}{a_1} \left(\frac{l}{a} \right)^2 \\ a_3 &= \frac{1}{a_1} \left\{ \frac{mg}{48a_1} \left(\frac{l}{a} \right)^2 [2la_2 - (7a + d)a_1^2 + 2ba_2] - a_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Разложение величины момента T в ряд Тейлора по углу φ приводит к следующему соотношению:

$$T = -\frac{2ca}{l} \varphi^2 + o(\varphi^4) \quad (3.6)$$

Подставим в (3.6) решение (2.6) с коэффициентами (3.5):

$$T = -\frac{1}{2} \left(\frac{l}{a} \right)^{1/3} [mg(a + d)]^{2/3} c^{1/3} - mg \frac{l + b}{6a} l + o(c^{-1/3}) \quad (3.7)$$

Вновь, как и в предыдущем случае (для (2.9)), формула (3.7) содержит член, зависящий от $c^{1/3}$. При устремлении коэффициента c к бесконечности модуль величины момента T также стремится к бесконечности. Таким образом, при абсолютной жесткости скользящей опоры, в фиксированной опоре большой жесткости возникают нагрузки, намного превышающие вес тела, которые также как и в предыдущем рассмотренном случае, скорее всего, приведут к поломке конструкции.

4. Упругое соединение скользящей опоры. Обычно на практике для лучшего крепления скользящей опоры ее соединяют с телом дополнительной пружиной. Добавим пружину жесткости k в соединение стержня B_3B_2 с концом направляющей (рис. 4). Для определенности выберем, что пружина находится в равновесии при выполнении следующего условия: $|B_3B| = l - l_1$.

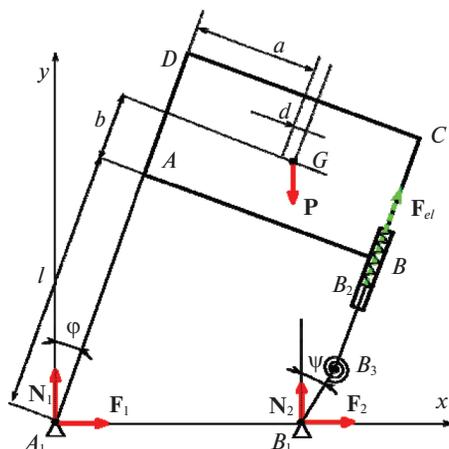


Рис. 4. Упругое закрепление гибкой скользящей опоры с помощью спиральной пружины.

Величина упругой силы F_{el} , действующей между стержнем и телом, зависит от удлинения пружины: $F_{el} = k(l - l_1 - BB_3)$, где длина отрезка BB_3 может быть получена из формул (2.1):

$$BB_3 = l - 2a \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{2a}{l_1} \cos \varphi \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} - l_1 \sqrt{1 - \left[\frac{2a}{l_1} (1 - \cos \varphi) \right]^2} \quad (4.1)$$

Потенциальная энергия системы Π по сравнению с пунктом 2 увеличилась на одно слагаемое и может быть записана следующим образом: $\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_T + \Pi_{F_{el}}$, $\Pi_{F_{el}} = k(l - l_1 - |BB_3|)^2$.

Уравнение для определения положения равновесия системы, как и в предыдущем случае, достаточно громоздко. Разложим это уравнение в ряд Тейлора по углу φ и отбросив в нем члены выше третьего порядка малости, получим следующее уравнение:

$$-mg(a + d) + \left[2ka^2 - mg(l + b) + 4 \frac{ka^2}{l_1} + 2 \frac{ka^2}{l_1^2} \right] \varphi + \frac{mg}{2} (a + d) \varphi^2 + \frac{1}{6} \left[4ka^2 + mg(l + b) - 16ka \frac{a}{l_1} + 4(3c - 5k) \left(\frac{a}{l_1} \right)^2 \right] \varphi^3 = 0 \quad (4.2)$$

В (4.2), как в (2.5) и в (3.4), коэффициент жесткости пружины c появляется лишь при члене третьего порядка малости по углу φ . Найдем решение уравнения (4.2) в виде ряда (2.6).

Подставим получившийся ряд в уравнение (4.2) и отбросим члены разложения уравнения порядка меньше, чем $1/c$. Коэффициенты разложения определяются следующим образом:

$$a_1^3 = mg \frac{(a + d)^2}{2} \left(\frac{l_1}{a} \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{3a_1} \left[mg \frac{(l + b)}{2} \left(\frac{l_1}{a} \right)^2 - k(l_1 + 1)^2 \right] \quad (4.3)$$

$$a_3 = \frac{1}{12a_1^2} \left[mg \left(\frac{l_1}{a} \right)^2 \left(2(l + b)a_2 - (a + d)a_1^2 \right) - 4ka_2(l_1^2 + 1) - 8ka_2l_1 - 12a_1a_2^2 \right]$$

Разложим величину момента T в ряд Тейлора по углу φ и подставим в него решение (2.6, 4.3):

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{2lc}{a} \right)^{1/3} (mg(a+d))^{2/3} + \frac{1}{3al_1} (mgl_1^2 - 2k(l_1+1)^2 a^2) + o(c^{-1/3}) \quad (4.4)$$

По-прежнему, как и в (2.9) и (3.7), формула (4.4) содержит член, зависящий от $c^{1/3}$. Жесткость пружины крепления k входит только в слагаемое, не зависящее от жесткости c спиральной пружины, моделирующей гибкость опорного стержня. С увеличением коэффициента c растет и величина момента T независимо от величины параметра k . Соединяющая линейная пружина не может предотвратить поломку скользящей опоры!

5. Оценка тангенциальной реакции упругой скользящей опоры. До этого мы рассматривали достаточно произвольное положение равновесия. Пусть теперь положению равновесия системы соответствует вертикальное положение опорных стержней. Отметим, что в случае вертикального равновесия возникает уникальная ситуация для исследуемой задачи: в положении равновесия тангенциальная реакция F_2 равна нулю. Оценим величину тангенциальной силы в случае небольших возмущений этой механической системы, а также в случае малых колебаний около положения равновесия.

Для упрощения демонстрации динамики системы заменим невесомый стержень B_2B_3 на однородный стержень массой m_1 с центром масс G_1 и длиной l_2 .

Запишем горизонтальную и вертикальную координаты центра масс G_1 стержня B_2B_3 в зависимости от угла наклона тела:

$$\begin{aligned} x_{G_1} &= l \sin \varphi + 2a \cos \varphi - BB_3 \sin \varphi + \frac{1}{2} l_2 \sin \varphi \\ y_{G_1} &= l_1 \cos \varphi + \frac{1}{2} l_2 \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.1)$$

Величина упругой силы F_{el} , действующей между стержнем и телом, в положении вертикального равновесия определяется из равновесия моментов сил, действующих на тело, относительно точки A_1 : $F_{el} = mg(a+d)/(2a)$. Удлинение линейной пружины в положении равновесия: $\Delta l|_{\varphi=0} = mg(a+d)/(2ak)$. Отсюда получим зависимость упругой силы в наклонном положении системы: $F_{el} = k(\Delta l|_{\varphi=0} + l - l_1 - BB_3)$, где длина отрезка BB_3 определена формулой (4.1).

5.1. Введение дополнительной нагрузки. Введем в такую постановку задачи некоторое возмущение, например, увеличим массу тела, добавив дополнительную массу Δm , считая эту величину малой по сравнению с массой тела. В этом случае конструкция немного просядет, перейдя в новое положение равновесия. В опорах появятся тангенциальные нагрузки. Проследим, как нагрузка F_2 зависит от величины Δm возмущения.

В отличие от предыдущего параграфа потенциальная энергия системы Π состоит из энергии силы тяжести тела, двух пружин и силы тяжести стержня B_2B_3 : $\Pi = \Pi_{(m+\Delta m)g} + \Pi_{m_1g} + \Pi_T + \Pi_{F_{el}}$, где $\Pi_{m_1g} = m_1 y_{G_1}$.

Считая φ малой величиной, а параметр c достаточно большим, выпишем уравнение равновесия с точностью до главных членов:

$$\Delta mg(a+d) = - \left[\Delta mg(b+l) + mg(b+l) + m_1 g \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) - 4ka^2 \right] \varphi + 2 \left(\frac{a}{l_1} \right)^2 c \varphi^3 \dots \quad (5.2)$$

Определим величину нормальной реакции из уравнения равновесия системы:

$$N_2 = \frac{(m + \Delta m)gx_G + m_1gx_{G_1}}{2a}$$

Получим величину тангенциальной силы F_2 из уравнения равновесия стержня:

$$F_2 = \frac{N_2(x_{G_1} - 2a) - T}{y_{G_1}} = \frac{g((m + \Delta m)(a + d) + 2am_1)}{2a} \varphi - 2 \frac{c}{2l_1 + l_2} \frac{a}{l_1} \varphi^2 + \dots \quad (5.3)$$

Проведем анализ полученных результатов. Правая часть уравнения равновесия (5.2) содержит два слагаемых: одно линейно по φ , другое зависит от φ^3 . Допустим, что решение этого уравнения имеет порядок $1/c$. В этом случае в правой части уравнения (5.2) определяющим является член при φ , и такой же порядок будет у левой части уравнения (и соответственно у величины Δm). В этом случае величина F_2 (5.3) тоже будет порядка $1/c$.

Теперь рассмотрим случай, когда порядок решения уравнения (5.2) составляет $c^{-0.5}$. Такой же будет и порядок величины Δm . Порядок F_2 определится слагаемым при φ^2 , F_2 является конечной величиной.

Наконец, предположим, что порядок решения уравнения (5.2) составляет $c^{-0.4}$. Порядок правой части уравнения (5.2), а значит и порядок Δm , определяет член при φ^3 . В этом случае $\Delta m \sim c^{-0.2}$. А величина F_2 оказывается порядка $c^{0.2}$.

В результате получаем следующий вывод: с ростом Δm величина тангенциальной силы растет. Причем даже для малой дополнительной нагрузки, например для $\Delta m \sim c^{-0.2}$, величина тангенциальной силы F_2 становится достаточно большой (гораздо больше веса всей конструкции).

5.2. Колебания около вертикального равновесия. Зададимся теперь целью оценить величину тангенциальной силы F_2 в условиях малых колебаний системы. Вначале мысленно освободимся от связи: заменим правый опорный шарнир соответствующими силами реакции N_2 и F_2 и предоставим возможность точке B_1 скользить по опорной поверхности (рис. 5). Система в общем случае обладает двумя степенями свободы. В качестве обобщенных координат возьмем угол φ между стержнем AA_1 и вертикалью и угол ψ между вертикалью и прямой B_1B_3 . Когда опорная точка B_1 телескопической (правой) ноги останавливается, у системы остается одна степень свободы. Если точка B_1 останавливается на расстоянии $2a$ от точки A_1 , то между углами φ и ψ сохраняется зависимость (2.2).

Определим величину BB_3 в зависимости от двух обобщенных координат. Для этого воспользуемся условием постоянства вертикальной координаты точки B_1 : $y_{B_1} = -2a \sin \varphi + l \cos \varphi - BB_3 \cos \varphi - l_1 \cos \psi = 0$. Отсюда получим величину BB_3 в наклонном положении: $BB_3 = (l \cos \varphi - 2a \sin \varphi - l_1 \cos \psi) / \cos \varphi$.

Когда правая нога скользит по опорной плоскости, скорость точки опоры может быть определена в следующем виде:

$$\dot{x}_{B_1} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} [(2a \sin \varphi + l_1 \cos \psi) \dot{\varphi} - l_1 \cos \varphi \cos(\varphi - \psi) \dot{\psi}] \quad (5.4)$$

Запишем кинетическую энергию системы:

$$K = \frac{J \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_{G_1}^2 + \dot{y}_{G_1}^2 + \frac{l_2^2}{12} \dot{\varphi}^2 \right), \quad (5.5)$$

где J – момент инерции тела относительно неподвижной точки A_1 , $\dot{x}_{G_1}, \dot{y}_{G_1}$ – горизонтальная и вертикальная скорости точки G_1 .

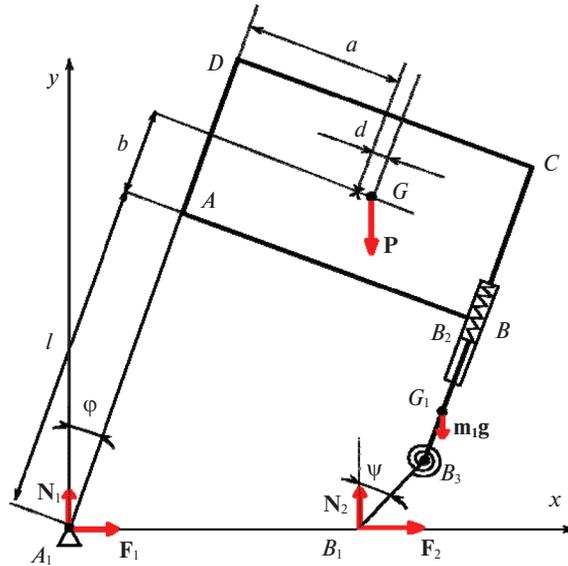


Рис. 5. Плоское тело на одном шарнире и гибкой телескопической опоре.

Кроме потенциальных сил необходимо в качестве активной силы учитывать тангенциальную реакцию F_2 . Элементарная работа этой реакции:

$$dA_{F_2} = F_2 dx_{B_1} = F_2 \left[\frac{2a \sin \varphi + l_1 \cos \psi}{\cos^2 \varphi} d\varphi - l_1 \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\cos \varphi} d\psi \right] = Q_\varphi d\varphi + Q_\psi d\psi,$$

где Q_φ, Q_ψ – соответствующие обобщенные силы. Уравнения движения системы получим с помощью Лагранжева формализма. Они достаточно громоздки, и здесь не приводятся.

Вспомним теперь, что точка B_1 неподвижна по условию задачи.

Из (5.4) имеем следующее соотношение:

$$\dot{\psi} = \frac{2a \sin \varphi + l_1 \cos \psi}{l_1 \cos \varphi \cos(\varphi - \psi)} \dot{\varphi} \quad (5.6)$$

Продифференцировав (5.6) по времени и подставив в полученное соотношение (5.6) получим зависимость между угловыми ускорениями:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} = & \ddot{\varphi} (2a \sin \varphi + l_1 \cos \psi) / (l_1 \cos \varphi \cos(\varphi - \psi)) + \\ & + \dot{\varphi} (2a \dot{\varphi} \cos \varphi - l_1 \dot{\psi} \sin \psi) / (l_1 \cos \varphi \cos(\varphi - \psi)) + \\ & + \dot{\varphi}^2 (2a \sin \varphi + l_1 \cos \psi) \sin \varphi / (l_1 \cos^2 \varphi \cos(\varphi - \psi)) + \\ & + \dot{\varphi} (2a \sin \varphi + l_1 \cos \psi) \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin(\varphi - \psi) / (l_1 \cos \varphi \cos(\varphi - \psi)^2) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Наконец, подставив соотношения (2.2), (5.6) и (5.7) в уравнения Лагранжа получим систему двух уравнений на две неизвестные: угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ и величину опорной реакции F_2 .

Решив эту систему, получим одно дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее движение консервативной системы и зависимость реакции F_2 от фазо-

вых переменных $\varphi, \dot{\varphi}$ в процессе этого движения. В случае малых отклонений от положения равновесия консервативная система совершает относительно него малые колебания.

Запишем главные члены разложения полученной реакции F_2 по малым величинам $\varphi, \dot{\varphi}$:

$$F_2 = \frac{1}{2a} [(m + 2m_1)a + md]g\varphi - \frac{ca}{I_1^2}\varphi^2 + \dots \quad (5.8)$$

Формула (5.8) дает оценку величине тангенциальной силы при малых колебаниях системы. Напомним, что величина c достаточно большая, и проведем анализ этой формулы. Если амплитуда малых колебаний будет порядка $1/c$, то тангенциальная составляющая реакции будет того же порядка малости. Рассмотрим ситуацию, когда амплитуда колебаний достигнет величины $c^{-0.5}$. В этом случае для оценки тангенциальной реакции необходимо учитывать второе слагаемое формулы (5.8). Тангенциальная реакция становится конечной величиной. Наконец, если амплитуда еще увеличится, например, достигнет величины $c^{-0.4}$, оставаясь при этом малой величиной. Порядок тангенциальной реакции будет $c^{0.2}$, то есть F_2 может стать критически большой в практическом смысле.

Даже относительно малые амплитуды колебаний конструкций, содержащих скользящее сочленение, могут привести к разрушению опоры!

Заключение. Рассмотрены различные варианты имитации гибкости опорных стержней, входящих в конструкцию, содержащую скользящее сочленение. Во всех рассмотренных случаях усилие в стержнях в положениях равновесия близких к вертикали растет с увеличением жесткости опорных стержней. В частности, это усилие зависит от геометрических параметров конструкции, в том числе растет с увеличением параметра d (с увеличением асимметрии распределения массы конструкции).

Во всех рассмотренных случаях усилия, которые возникают в опорах, намного превышают вес тела.

Для вертикального равновесия конструкции с упругой скользящей опорой показано, что тангенциальная опорная реакция быстро и критически растет с возникновением колебаний конструкции и в случае появления дополнительных массовых нагрузок.

Таким образом, если конструкция с подвижным сочленением может выдержать расчетные нагрузки в обычных условиях, то возникновение дополнительных (даже малых) нагрузок может привести к поломке конструкции!

Например, при покрытии крыши здания мокрым снегом вес крыши может увеличиться в два раза. При этом нагрузка на опоры возрастает кратно, и это может привести к разрушению здания. Поэтому нельзя производить расчеты прочности конструкции, содержащей скользящее соединение, используя традиционные подходы (например, [15]) к оценкам опорных реакций и изгибающих моментов, основанные на расчете опорного давления.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда № 22-21-00303.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu Y.Q., Liang F., Au Francis T.K. Experimental study of durable low-friction concrete contacts for precast segmental columns with resettable sliding joints // Construction and Building Materials. 2022. V. 318. 126192.
<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.126192>
2. Jiang Yu.-F., Guo Z.-X., Basha S.H., Chai Z.-L. Sliding bed joint for seismic response control of ashlar stone masonry structures // Engng. Struct. 2021. V. 244. P. 112734.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112734>

3. *Di Trapani F., Bolis V., Basone F., Cavaleri L., Preti M.* Traditional vs. sliding-joint masonry infilled frames: Seismic reliability and EAL // Proc. Struct. Integrity. 2020. V. 26. P. 383–392.
<https://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.06.049>
4. *Morandi P., Milanesi R.R., Magenes G.* Innovative solution for seismic-resistant masonry infills with sliding joints: in-plane experimental performance // Engng. Struct. 2018. V. 176. P. 719–733.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.09.018>
5. *Min Q., Li N., Zhang Y., Lu Q., Liu X.* A novel wind resistance sliding support with large sliding displacement and high tensile strength for metal roof system // Engng. Struct. 2021. V. 243. P. 112670.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112670>
6. *Atashfaraz B., Taiyari F., Hayati Raad H., Formisano A.* Efficiency investigation of hybrid sliding rocking columns as elevated reservoirs supporting systems // Soil Dyn.&Earthquake Engng. 2020. V. 136. P. 106222.
<https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2020.106222>
7. *Zhao X., Xu Y.L.* Finite element-based force identification of sliding support systems: Part I – Theory // Finite Elements in Analysis and Design. 2006. V. 42 (4). P. 229–248.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2005.06.004>
8. *Xu Y.L., Zhao X.* Finite element-based force identification of sliding support systems: Part II – Numerical investigation // Finite Elements in Analysis and Design. 2006. V. 42 (4). P. 249–282.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2005.06.006>
9. *Zhao J., Chen R., Wang Z., Pan Y.* Sliding corner gusset connections for improved buckling-restrained braced steel frame seismic performance: Subassembly tests // Engng. Struct. 2018. V. 172. P. 644–662.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.031>
10. *Zhao J., Li Y., Wang C., Chen R., Yan L., Gong C.* Sliding corner gusset connections in concentrically braced frames using BRBs: Numerical analysis and practical design. // Engng. Struct. 2021. V. 246. P. 113055. DOI: j.engstruct.2021.113055
11. *Досаев М.З., Самсонов В.А.* Особенности равновесия тела на шарнирных опорах и скользящей заделке // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 4. С. 3–12.
12. *Klimina L.A.* Method for finding periodic trajectories of centrally symmetric dynamical systems on the plane // Diff. Equat. 2019. V. 55. P. 159–168.
<https://doi.org/10.1134/S0012266119020022>
13. *Selyutskiy Y.D.* On dynamics of an aeroelastic system with two degrees of freedom // Appl. Math. Model. 2019. V. 67. P. 449–455.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.010>
14. *Досаев М.З., Самсонов В.А.* Особенности динамики систем с упругими элементами и сухим трением // ПММ. 2021. Т. 85. № 4. С. 426–435.
15. *Труш Л.И., Ломунов А.К.* Расчет элементов каменных конструкций многоэтажного производственного здания. Н. Новгород: ННГАСУ, 2017. 59 с.

On Flexibility of a Sliding Vertical Support of a Flat Structure

M. Z. Dosaev^{a,#}

^a*Institute of Mechanics of Lomonosov MSU, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: dosayev@imec.msu.ru*

A flat body on hinged supports is considered. One of the supports is connected to the body by means of a slipping attachment. A flexibility of the support rods is modeled by a hinge with a helical spring of sufficient stiffness to prevent relative rotation. It is shown that the linearization of the equilibrium equations makes it impossible to estimate the equilibrium position. The equilibrium position is sought in the form of a series in terms of the reciprocal of the stiffness coefficient of the helical spring. It is shown that as the coefficient of stiffness of the helical spring tends to infinity, the moment of the helical spring, which models the internal bending forces in the rods, tends to infinity. For the case of vertical equilibrium, an estimate is given for a tangential reaction in the support hinge, which occurs when additional loads are introduced and in the case of small oscillations.

In all the cases considered, the reaction that occurs in the supports is much greater than the weight of the body.

Keywords: slipping attachment, elastic spring, equilibrium position, reaction in the support

REFERENCES

1. *Liu Y.Q., Liang F., Au Francis T.K.* Experimental study of durable low-friction concrete contacts for precast segmental columns with resettable sliding joints // *Constr.&Building Mater.*, 2022, vol. 318, pp. 126192. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2021.126192
2. *Jiang Yu.-F., Guo Z.-X., Basha S.H., Chai Z.-L.* Sliding bed joint for seismic response control of ashlar stone masonry structures // *Engng. Struct.*, 2021, vol. 244, pp. 112734. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.112734
3. *Di Trapani F., Bolis V., Basone F., Cavaleri L., Preti M.* Traditional vs. sliding-joint masonry infilled frames: Seismic reliability and EAL // *Proc. Struct. Integrity*, 2020, vol. 26, pp. 383–392. DOI: 10.1016/j.prostr.2020.06.049
4. *Morandi P., Milanese R.R., Magenes G.* Innovative solution for seismic-resistant masonry infills with sliding joints: in-plane experimental performance // *Engng. Struct.*, 2018, vol. 176, pp. 719–733. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.09.018
5. *Min Q., Li N., Zhang Y., Lu Q., Liu X.* A novel wind resistance sliding support with large sliding displacement and high tensile strength for metal roof system // *Engng. Struct.*, 2021, vol. 243, pp. 112670. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.112670
6. *Atashfaraz B., Taiyari F., Hayati Raad H., Formisano A.* Efficiency investigation of hybrid sliding rocking columns as elevated reservoirs supporting systems // *Soil Dyn.&Earthquake Engng.*, 2020, vol. 136, pp. 06222. DOI: 10.1016/j.soildyn.2020.106222
7. *Zhao X., Xu Y.L.* Finite element-based force identification of sliding support systems: Part I – Theory. // *Finite Elements in Analysis and Design*, 2006, vol. 42 (4), pp. 229–248. DOI: 10.1016/j.finel.2005.06.004
8. *Xu Y.L., Zhao X.* Finite element-based force identification of sliding support systems: Part II – Numerical investigation // *Finite Elements in Analysis and Design*, 2006, vol. 42 (4), pp. 249–282. DOI: 10.1016/j.finel.2005.06.006
9. *Zhao J., Chen R., Wang Z., Pan Y.* Sliding corner gusset connections for improved buckling-restrained braced steel frame seismic performance: Subassembly tests // *Engng. Struct.*, 2018, vol. 172, pp. 644–662. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.06.031
10. *Zhao J., Li Y., Wang C., Chen R., Yan L., Gong C.* Sliding corner gusset connections in concentrically braced frames using BRBs: Numerical analysis and practical design. // *Engng. Struct.*, 2021, vol. 246, pp. 113055. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.113055
11. *Dosaev M.Z., Samsonov V.A.* Peculiarities of body balance on hinged supports and sliding closure // *Mech. Solids*, 2023. (in Press)
12. *Klimina L.A.* Method for finding periodic trajectories of centrally symmetric dynamical systems on the plane // *Diff. Equat.*, 2019, vol. 55, pp. 159–168. DOI: 10.1134/S0012266119020022
13. *Selyutskiy Y.D.* On dynamics of an aeroelastic system with two degrees of freedom // *Appl. Math. Model.*, 2019, vol.67, pp. 449–455. DOI: 10.1016/j.apm.2018.11.010
14. *Dosaev M.Z., Samsonov V.A.* Singularities in dynamic systems involving elastic elements and dry friction // *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1473–1481.
15. *Trush L.I., Lomunov A.K.* Calculation of Elements of Stone Structures of a Multi-Storey Industrial Building. Nizhny Novgorod: NNGASU, 2017. 59 p. (in Russian)