

УДК 533.6.011.8

**СТЕПЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ТЕЛА МИНИМАЛЬНОГО  
СОПРОТИВЛЕНИЯ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ**© 2023 г. В. Л. Нгуен<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>Московский физико-технический институт (НИУ), Долгопрудный, Россия

\*e-mail: lamvqtc1990@gmail.com

Поступила в редакцию 15.03.2023 г.

После доработки 13.04.2023 г.

Принята к публикации 24.04.2023 г.

Для степенного эллиптического тела вычисляется сила сопротивления в высокоскоростном потоке разреженного газа на основе нескольких локальных моделей. Решением вариационной задачи определяется показатель степени в образующей тела минимального сопротивления разного удлинения в зависимости от коэффициента эллиптичности.

*Ключевые слова:* эллиптические тела, гипергеометрическая функция, коэффициент сопротивления, коэффициент эллиптичности

DOI: 10.31857/S0032823523030104, EDN: ZTTJJR

**1. Введение.** Проблема оптимального сопротивления в высокоскоростном потоке разреженного газа летательного аппарата до сих пор остается одним из самых важных вопросов в авиационно-космической промышленности и ракетной технике. Существует несколько подходов к решению таких задач. Для оценочных расчетов сил, действующих на тело при его высокоскоростном движении в газе, широкое распространение получили формулы, найденные из локальных моделей. В основе этих моделей лежит предположение, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела и сила, действующая на него, зависит лишь от ориентации элемента относительно направления движения. Классическая задача построения тела минимального сопротивления с использованием формулы Ньютона решалась во многих работах [1–3]. В связи с развитием космической техники появился интерес к оптимальным задачам высокоскоростной аэродинамики на больших высотах в разреженном газе [4]. Дальнейшее упрощение таких задач связано с использованием целевых функций разного вида зависящих от некоторого количества параметров, по которым и осуществляется оптимизация [5, 6]. В частности, широкое распространение получила степенная целевая функция [7, 8].

В настоящей работе строится форма эллиптического тела минимального сопротивления со степенной образующей в высокоскоростном потоке разреженного газа на основе модели Ньютона и свободномолекулярной модели газа.

**2. Уравнение эллиптического тела со степенной функцией.** С использованием коэффициента эллиптичности уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.1)$$

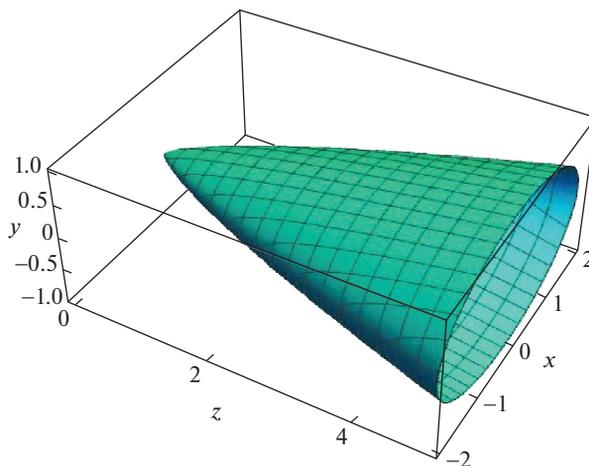


Рис. 1. Геометрия тела ( $k = 2, \alpha = 3/4, \lambda = 5$ ).

имеет вид ( $a = kb, k$  – коэффициент эллиптичности):

$$\frac{x^2}{k^2} + y^2 = b^2 \tag{2.2}$$

Пусть  $b$  – степенная функция  $b = R(z/L)^\alpha$ ,  $R$  – размер посадочного узла,  $L$  – длина тела,  $\alpha$  – показатель степени. Уравнение такого эллиптического тела будет (рис. 1)

$$\frac{x^2}{k^2} + y^2 = \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2\alpha}, \tag{2.3}$$

где  $\lambda = L/R$  – удлинение эллиптического тела.

Уравнение (2.3) можно переписать в виде

$$z = \lambda \left(\frac{x^2}{k^2} + y^2\right)^{\frac{1}{2\alpha}}; \quad -k \leq x \leq k, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad 0 < z \leq \lambda \tag{2.4}$$

Ставится задача: найти такую величину  $\alpha$  при которой достигается минимальное сопротивление эллиптического тела (2.4) при заданном значении удлинения  $\lambda$  и фиксированном коэффициенте эллиптичности  $k$  в случае “редкого” газа Ньютона и в свободномолекулярном случае.

**3. Степенные эллиптические тела минимального сопротивления. Формула Ньютона.**

Эллиптическое тело обтекается газом плотностью  $\rho$  и скоростью  $V$ . Коэффициент лобового сопротивления, действующий на степенные эллиптические тела (2.4) вдоль оси  $Oz$ , запишется [8]

$$c_z = \iint_{(S)} (c_p \cos \theta + c_\tau \sin \theta) \frac{dS}{S_b}, \tag{3.1}$$

где  $c_p, c_\tau$  – нормальная и касательная силы действующие на элемент поверхности  $dS$ , деленные на площадь этого элемента и величину скоростного напора  $\rho V^2/2$ ,  $\theta$  – угол между внутренней нормалью к поверхности и вектором скорости газа,  $S_b = \pi R^2$  – площадь посадочного узла.

Таблица 1.

$\lambda$	$k = 1$		$k = 1.5$		$k = 2$		$k = 2.5$		$k = 3$	
	$\alpha$	$c_z$	$\alpha$	$c_z$	$\alpha$	$c_z$	$\alpha$	$c_z$	$\alpha$	$c_z$
1	0.462427	0.802824	0.4021	1.41773	0.371661	2.05021	0.355773	2.68638	0.34745	3.32169
2	0.649528	0.330489	0.60852	0.66124	0.577199	1.03863	0.555555	1.43864	0.54125	1.84922
3	0.701653	0.166968	0.678587	0.352722	0.656538	0.581961	0.637858	0.839475	0.623089	1.11469
4	0.72157	0.0986344	0.707131	0.213577	0.691684	0.361847	0.676932	0.535341	0.663828	0.727205
5	0.731228	0.0646288	0.721355	0.141747	0.710103	0.243783	0.698557	0.366374	0.687499	0.505357
6	0.736651	0.04547	0.729465	0.100466	0.720948	0.174367	0.711801	0.264703	0.702591	0.368927
7	0.74000	0.0336733	0.734536	0.074745	0.727877	0.130491	0.720503	0.199433	0.712819	0.27997
8	0.742233	0.0259156	0.737923	0.057702	0.732577	0.101139	0.726528	0.155298	0.720068	0.219138
9	0.743786	0.02055	0.7403	0.045853	0.735915	0.080598	0.730872	0.124174	0.72539	0.175883
10	0.744913	0.016688	0.742035	0.037295	0.738372	0.065689	0.734109	0.101458	0.729409	0.144114
15	0.747661	0.0074628	0.746298	0.01674	0.744506	0.029634	0.742346	0.046055	0.739876	0.065894

Для формулы Ньютона:

$$c_p = 2 \cos^2 \theta, \quad c_\tau = 0 \quad (3.2)$$

Коэффициент лобового сопротивления равен

$$c_z = \frac{1}{\pi} \iint_{(S)} 2 \cos^3 \theta \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} + 1 dx dy, \quad (3.3)$$

$S$  – площадь поверхности тела.

Отметим, что

$$\cos \theta = \left( \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 \right)^{-1/2} \quad (3.4)$$

Тогда

$$c_z = \frac{2}{\pi} \iint_{(S)} \left[ \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \left( \frac{x^2}{k^2} + y^2 \right)^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}} \left( \frac{x^2}{k^4} + y^2 \right) + 1 \right]^{-1} dx dy \quad (3.5)$$

Переходя в (3.5) к полярной системе координат вида

$$\begin{aligned} x &= kr \cos \varphi; & y &= r \sin \varphi; & dx dy &= k r dr d\varphi \\ r &\in [0, 1], & \varphi &\in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Запишем коэффициент лобового сопротивления в виде интеграла от гипергеометрической функции  $F[a, b, c, d]$

$$c_z = \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} F \left( 1, \frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}, -\frac{\lambda^2}{k^2 \alpha^2} \left( 1 + (k^2 - 1) \sin^2 \varphi \right) \right) d\varphi \quad (3.7)$$

В табл. 1 показаны значения величины  $\alpha$  и  $c_z$  в зависимости от удлинения  $\lambda$  при фиксированном значении коэффициента эллиптичности  $k$ , а на рис. 2 – зависимость коэффициента минимального сопротивления семейства степенных эллиптических тел от удлинения  $\lambda$  для разных значений коэффициента эллиптичности  $k$ .

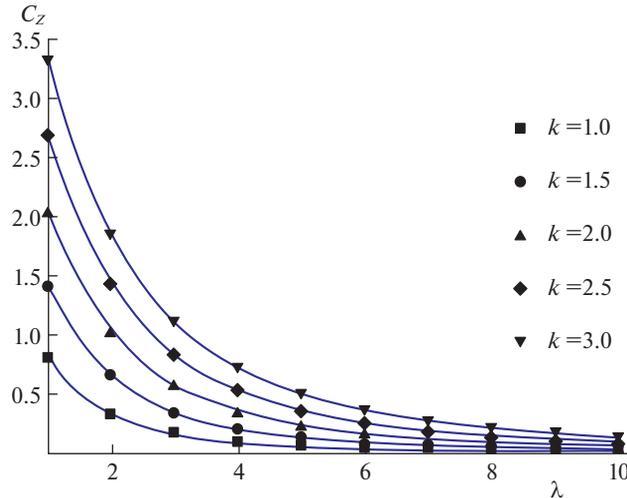


Рис. 2. Зависимость  $c_z$  от удлинения  $\lambda$  для разных значений коэффициента эллиптичности  $k$ .

Видно, что коэффициент минимального сопротивления степенных эллиптических тел уменьшается с удлинением  $\lambda$ , а для данного удлинения  $\lambda$  коэффициент сопротивления  $c_z$  возрастает вместе с коэффициентом эллиптичности  $k$ . Наименьшее сопротивление эллиптического тела реализуется при  $k = 1$ , т.е. когда наибольшее сечение эллиптического тела является кругом. Кроме того, для разных значений коэффициента эллиптичности  $k$  и с ростом удлинения  $\lambda$  показатель степени  $\alpha$  стремится к значению  $\alpha = 0.75$ , что хорошо согласуется с результатами [8].

**4. Степенные эллиптические тела минимального сопротивления. Свободномолекулярная модель.** Для свободномолекулярной модели в гиперзвуковом потоке течения газа можно записать коэффициенты давления и трения следующим образом [9]

$$c_p = 2 \cos^2 \theta + \bar{z} \cos \theta, \quad \bar{z} = \sqrt{\pi t_w (\gamma - 1) / \gamma}, \quad c_\tau = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad (4.1)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты;  $t_w$  – температурный фактор;  $\theta$  – угол между вектором скорости газа и внутренней нормалью к поверхности тела.

Подставляя выражение (4.1) в (3.1), получаем формулу коэффициента сопротивления степенных эллиптических тел:

$$c_z = \frac{1}{\pi} \iint_{(S)} (2 + \bar{z} \cos \theta) dx dy \quad (4.2)$$

Тогда

$$c_z = \frac{1}{\pi} \iint_{(S)} \left( 2 + \frac{\bar{z}}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\alpha^2} \left( \frac{x^2}{k^2} + y^2 \right)^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}} \left( \frac{x^2}{k^4} + y^2 \right) + 1}} \right) dx dy \quad (4.3)$$

Переходя в (4.3) к полярной системе координат (3.6), получим выражение для коэффициента лобового сопротивления тела

$$c_z = 2k + \frac{k\bar{z}}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \left( \frac{1}{2}, \frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}, -\frac{\lambda^2}{\alpha^2 k^2} (\cos^2 \varphi + k \sin^2 \varphi) \right) d\varphi \quad (4.4)$$

Таблица 2

$\lambda$	$k = 1$		$k = 1.5$		$k = 2$		$k = 2.5$		$k = 3$	
	$\alpha$	$c_z$	$\alpha$	$c_z$	$\alpha$	$c_z$	$\alpha$	$c_z$	$\alpha$	$c_z$
1	0.34872	2.18155	0.30149	3.29559	0.297104	4.4104	0.267613	5.52516	0.261547	6.63966
2	0.529225	2.11683	0.48669	3.20106	0.459546	4.28877	0.442651	5.37776	0.432184	6.46716
3	0.59469	2.08334	0.56736	3.14706	0.546076	4.21541	0.530454	5.38607	0.519314	6.35788
4	0.62238	2.06417	0.604217	3.11456	0.58843	4.16959	0.575531	5.22731	0.565368	6.2866
5	0.636492	2.05200	0.62311	3.09339	0.611671	4.13909	0.601213	5.18749	0.592386	6.23762
6	0.644676	2.04364	0.635049	3.07866	0.625747	4.11759	0.61721	5.15908	0.609647	6.20232
7	0.649868	2.03757	0.642379	3.06786	0.634932	4.1017	0.627869	5.13792	0.621389	6.17584
8	0.653381	2.03297	0.647372	3.05964	0.641273	4.08952	0.635345	5.12162	0.629762	6.15532
9	0.655875	2.02936	0.650937	3.05317	0.645844	4.07991	0.640802	5.10869	0.635957	6.13899
10	0.657714	2.02646	0.653577	3.04796	0.649255	4.07213	0.644915	5.09821	0.640678	6.08484
15	0.662337	2.0177	0.660266	3.03214	0.658019	4.04845	0.655665	5.06611	0.653259	6.06391

В табл. 2 для значений параметров  $t_w = 0.1$  и  $\gamma = 1.4$  представлены зависимости показателя степени  $\alpha$  и коэффициента сопротивления  $c_z$  от удлинения  $\lambda$  при фиксированном коэффициенте эллиптичности  $k$ . Приведенные на рис. 3 зависимости величин минимального сопротивления семейства степенных эллиптических тел  $c_z$  от удлинения  $\lambda$ , ясно показывают монотонное уменьшение коэффициента минимального сопротивления степенных эллиптических тел при заданном удлинении и фиксированном коэффициенте эллиптичности  $k$ .

Кроме того, в согласии с [8] при различных значениях коэффициента эллиптичности  $k$  с увеличением удлинения  $\lambda$  показатель степени  $\alpha$  стремится к значению  $\alpha = 0.666$ . Следует отметить, что наименьший коэффициент лобового минимального сопротивления эллиптического тела реализуется при  $k = 1$ , то есть наибольшее сече-

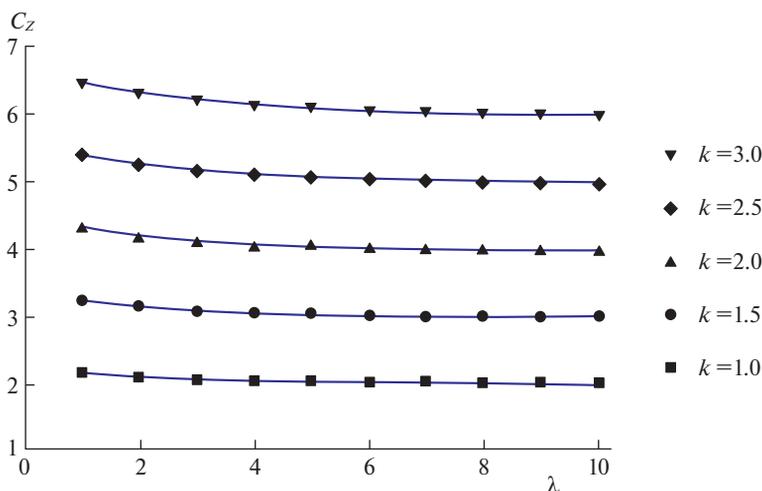


Рис. 3. Зависимость  $c_z$  от удлинения  $\lambda$  для различных значений  $k$  при  $t_w = 0.1$ ,  $\gamma = 1.4$ .

ние степенного эллиптического тела представляет собой круг, а обтекаемые тела — тела вращения (как в случае формулы Ньютона).

**Заключение.** На основе нескольких локальных моделей в определенные параметры семейства степенных эллиптических тел соответствующие минимальной величине силы сопротивления в высокоскоростном потоке разреженного газа. Рассмотрены две модели газа: модель “редкого” газа Ньютона и свободномолекулярная модель. Решением вариационной задачи для тела минимального сопротивления при фиксированном коэффициенте эллиптичности  $k$  рассчитаны зависимости показателя степени образующей эллиптического тела от удлинения  $\lambda$ .

Для обеих моделей наблюдается монотонное уменьшение сопротивления с возрастанием удлинения  $\lambda$ . При этом наименьшим сопротивлением обладает тело с коэффициентом эллиптичности  $k = 1$ , т.е. тело вращения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-08-00790 и стипендии Социалистической Республики Вьетнам.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миеле А. Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. 508 с.
2. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. 688 с.
3. Черный Г.Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
4. Бунимович А.И., Якунина Г.Е. Исследование форм поперечного контура конического пространственного тела минимального сопротивления, движущегося в разреженном газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 112–117.
5. Якунина Г.Е. К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // ПММ. 2000. № 64. Вып. 2. С. 199–310.
6. Таковицкий С.А. Аналитическое решение задачи минимизации волнового сопротивления осесимметричной носовой части в рамках локальной линеаризации // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 6. С. 775–782.
7. Благодослов В.И., Гродзовский Г.Л. Осесимметричное обтекание тел вращения степенной формы при сверхзвуковых скоростях набегающего потока // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. V. № 6. С. 6–22.
8. Горелов С.Л., Нгуен Ван Лам. Тело вращения минимального аэродинамического сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Тр. МАИ. 2020. № 113. <https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-4>
9. Галкин В.С., Ерофеев А.И., Толстых А.И. Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 6–10.

### Power Elliptical Bodies of Minimum Resistance in the Gas Flow

V. L. Nguyen<sup>a,#</sup>

<sup>a</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

<sup>#</sup>e-mail: lamvqtc1990@gmail.com

For power elliptical body, the drag force in the high-speed rarefied gas flow is calculated based on several local models. The solution of the variational problem determines the degree of minimum resistance in the generatrix of the body, depending on coefficient of the ellipticity and different elongation in a wide range of Reynolds numbers.

**Keywords:** elliptical bodies, hypergeometric function, the drag coefficient, coefficient of the ellipticity

## REFERENCES

1. *Miele A.* Theory of Optimal Aerodynamic Forms. Moscow: Mir, 1969. 508 p.
2. *Newton I.* Mathematical Principles of Natural Philosophy. Moscow: Nauka, 1989, 688 p. (in Russian)
3. *Chernyi G.G.* Gas Flow at High Supersonic Speed. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 220 p. (in Russian)
4. *Bunimovich A.I., Yakunina G.E.* Investigation of the forms of the transverse contour of the conical spatial body of the minimum resistance moving in a sparse gas // Fluid Dyn., 1986, no. 5, pp. 112–117.
5. *Yakunina G.Ye.* The construction of optimum three-dimensional shapes within the framework of a model of local interaction // JAMM, 2000, vol. 64, iss. 2, p. 289–298.
6. *Takovitskii S.A.* Analytical solution to the wave-drag minimization problem for an axisymmetric fore-body using local linearization // Fluid Dyn., 2018, vol. 53, suppl. 2, pp. 38–44.  
<https://doi.org/10.1134/S0015462818060095>
7. *Blagosklonov V.I., Grodzovsky G.L.* Axisymmetric flow around bodies of rotation of a power-law shape at supersonic free-stream velocities // Uch. Zap. TsAGI, 1974, vol. V, no. 6, pp. 6–22. (in Russian)
8. *Gorelov S.L., Nguyen V.L.* Rotation body of minimal aerodynamic drag in hypersonic rarefied gas flow // in: Trudy MAI (Net. Sci. Periodic Publ.), 2020, no. 113.  
<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=117962&referer=https%3A%2F%2Fwww.google.com%2F>
9. *Galkin V.S., Erofeev A.I., Tolstykh A.I.* Approximate method for calculating the aerodynamic characteristics of the bodies in the hypersonic stream of sparse gas // Proc. TsAGI, 1977, no. 1833, pp. 6–10. (in Russian)