

УДК 517.956.3

**ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОУПРУГОГО
ПО МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА СТЕРЖНЯ**© 2023 г. В. И. Корзюк^{1,2,*}, Я. В. Рудько^{1,**}, В. В. Колячко^{2,***}¹Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь²Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

*e-mail: korzyuk@bsu.by

**e-mail: janyucz@yahoo.com by

***e-mail: vlad.kolyachko@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.11.2022 г.

После доработки 20.04.2023 г.

Принята к публикации 25.04.2023 г.

В настоящей работе исследуется корректность по Адамару задачи Коши для одномерной гиперболической системы уравнений с частными производными, описывающей продольные колебания вязкоупругого по модели Максвелла стержня постоянного поперечного сечения. Также обсуждаются некоторые свойства системы и ее решений: закон сохранения модифицированной “энергии”, конечная скорость распространения волн, дисперсия и диссипация решений.

Ключевые слова: продольные колебания, модель Максвелла, задача Коши, корректно поставленная задача

DOI: 10.31857/S0032823523030086, EDN: ZTPLMI

1. Введение. В строительстве различных сооружений очень часто приходится иметь дело с колебаниями сплошных сред. Поэтому изучение математических моделей таких явлений представляется целесообразным. В данной работе мы исследуем одну из таких моделей, представляющую систему двух дифференциальных уравнений с частными производными, исследуем задачу Коши для нее и обсуждаем качественные свойства решений.

В разд. 2, исходя из соображений механики сплошных сред, выписываются уравнения для описания состояния стержня. В разд. 3 формулируется задача Коши для определения свободных и/или вынужденных колебаний стержня. В разд. 4 система записывается в матричной форме, исследуется гиперболичность системы и непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных. В разд. 5 отыскиваются решения в виде плоских волн и экспоненциальных волн, устанавливаются дисперсионные и диссипативные свойства. В разд. 6 устанавливается закон сохранения модифицированной “энергии” и единственность решения задачи Коши. В разд. 7 доказывается, что решения обладают конечной скоростью распространения. В разд. 8 и 9 в явном аналитическом виде отыскивается решение задачи Коши о свободных и вынужденных колебаниях стержня соответственно. В разд. 10 подводится заключение данной работы.

2. Физическая модель. Рассмотрим в одномерном случае вязкоупругий по модели Максвелла стержень постоянного поперечного сечения, свойства материала которого не зависят от времени и координаты. Для него верно уравнение движения [1]

$$\rho \partial_t^2 u = \partial_x \sigma + f, \quad (2.1)$$

где f – внешняя объемная сила, $\rho > 0$ – плотность материала стержня, u – дилатации (смещения) стержня, σ – напряжения стержня. А связь между деформацией ε и напряжением σ подчиняется закону [2, 3]

$$\sigma + \beta \partial_t \sigma = \gamma \partial_t \varepsilon, \quad (2.2)$$

где $\beta > 0$ – время релаксации, $\gamma \beta^{-1} > 0$ – мгновенный модуль упругости. Подставив определения деформации $\varepsilon = \partial_x u$ в уравнение (2.2), получим

$$\sigma + \beta \partial_t \sigma = \gamma \partial_t \partial_x u \quad (2.3)$$

Из связи между деформацией ε и напряжением σ стержня следует интегральное уравнение Вольтерры второго рода

$$\varepsilon(t) = \frac{\beta \sigma(t)}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

В формуле (2.4) мы пренебрегаем начальной деформацией в силу отдаления начального момента времени в минус бесконечность [3].

3. Постановка задачи Коши. Таким образом, для определения свободных колебаний стержня, требуется найти решение системы уравнений

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial w}{\partial x}(t, x), \quad \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t, x) = \beta \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) + w(t, x); \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

при начальных условиях

$$w(0, x) = \mu(x), \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x); \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

в предположении достаточной гладкости функций μ , φ , ψ . В уравнении (3.1) для удобства буквой w обозначено напряжения стержня.

Если же требуется определить колебания стержня, происходящие под действием внешней силы, то вместо уравнений (3.1) надо взять уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial w}{\partial x}(t, x) + f(t, x), \quad \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t, x) = \beta \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) + w(t, x); \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \quad (3.3)$$

4. Матричное представление системы уравнений. Введем в систему уравнений (3.1) функцию $v := \partial_t u$. Тогда имеет место матричное представление

$$\mathbf{u}_t = A \mathbf{u}_x + B \mathbf{u}, \quad (4.1)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} \partial_t u \\ \partial_t v \\ \partial_t w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_x = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_x v \\ \partial_x w \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & \gamma \beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^{-1} \end{pmatrix}$$

Заметим, что собственными значениями матрицы $-A$ являются числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{\gamma \beta^{-1} \rho^{-1}}$ и $\lambda_3 = \sqrt{\gamma \beta^{-1} \rho^{-1}}$. При условии $\gamma \beta^{-1} \rho^{-1} > 0$ это будут три различных действительных числа. Значит, что если $\gamma \beta^{-1} \rho^{-1} > 0$, то система (3.1) является гиперболической по [4], и строго гиперболической по классификации [5].

Применим к (4.1) преобразование Фурье по переменной x в виде

$$\mathcal{F}[\cdot](t, \omega) = \hat{\cdot}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot(t, x) \exp(-i\omega x) dx; \quad (t, \omega) \in [0, \infty) \times \mathbb{R},$$

и запишем Фурье-образ системы (4.1)

$$\hat{\mathbf{u}}_i(t, \omega) = Q(\omega)\hat{\mathbf{u}}(t, \omega), \tag{4.2}$$

где разрешающая матрица $Q(\omega) = i\omega A + B$. Рассмотрим матрицу

$$\exp(Q(\omega)t) = \begin{pmatrix} 1 & \exp(t) & 1 \\ 1 & 1 & \exp(-it\omega\rho^{-1}) \\ 1 & \exp(it\gamma\omega\beta^{-1}) & \exp(-t\beta^{-1}) \end{pmatrix},$$

ее норма оценивается как

$$\|\exp(Q(\omega)t)\|_\infty \leq \max \left\{ 3, 2 + \exp(t), 2 + \exp\left(-\frac{t}{\beta}\right) \right\} \leq C_t = 2 + \exp(t) \tag{4.3}$$

Так как норма матрицы $\exp(Q(\omega)t)$ ограничена независимо от ω , то решение задачи Коши (3.1)–(3.2) непрерывно зависит от начальных данных [4].

Этими методами аналогично доказывается гиперболичность системы (3.3) при условии $\gamma\beta^{-1}\rho^{-1} > 0$ и непрерывная зависимость решения задачи Коши (3.2)–(3.3) от начальных данных.

5. Волновые решения. Исследуем систему (3.1) на наличие решений в виде плоских волн. Такие решения имеют вид

$$u(t, x) = U(kx - \omega t + \phi), \quad w(t, x) = W(kx - \omega t + \phi), \tag{5.1}$$

где k – волновое число, ω – циклическая частота, ϕ – фаза. Если при этом $(U, W)^T \neq (0, 0)^T$ и $U, U', U'', W, W', W'' \rightarrow 0$ при $kx - \omega t + \phi = z \rightarrow \pm\infty$, то скажем, что такое имеет вид уединенной волны.

Подставляя (5.1) в (3.1) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций U и W

$$\begin{cases} \rho\omega^2 U''(z) - kW'(z) = 0 \\ \beta\omega W'(z) - W(z) - k\gamma\omega U''(z) = 0 \end{cases}$$

Ее решение может быть представлено в виде

$$U(z) = \sum_{i=1}^3 c_i U_i(z), \quad W(z) = \sum_{i=1}^3 c_i W_i(z), \tag{5.2}$$

где

$$U_1(z) = 1, \quad U_2(z) = z, \quad W_1(z) = W_2(z) = 0, \quad W_3(z) = \exp\left(\frac{z\rho\omega}{\beta\rho\omega^2 - k^2\gamma}\right),$$

$$U_3(z) = \frac{1}{\rho^2\omega^3} \left[k^3\gamma - k\rho\omega(z + \beta\omega) + \exp\left(\frac{z\rho\omega}{\beta\rho\omega^2 - k^2\gamma}\right) k(\beta\rho\omega^2 - k^2\gamma) \right],$$

и c_1, c_2 и c_3 – произвольные константы.

Теорема 1. Система уравнений (3.1), допускает решения в виде плоских волн, которые представляются в виде (5.1)–(5.2).

Доказательство следует из рассуждений выше.

Из формул (5.1) и (5.2) также следует

Утверждение 1. Система уравнений (3.1) не имеет решений в виде уединенных волн (солитонов).

Доказательство. Достаточно показать, что условие $U, U', W \rightarrow 0$ при $kx - \omega t + \phi = z \rightarrow \pm\infty$ влечет $U = W = 0$. Обозначим $\alpha = \frac{\rho\omega}{\beta\rho\omega^2 - k^2\gamma}$. Тогда, в силу формулы $W(z) = c_3 W_3(z) = c_3 \exp(\alpha z)$, имеют место представления

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} W(z) = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \wedge c_3 > 0 \\ -\infty, & \alpha > 0 \wedge c_3 < 0 \\ c_3, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases} \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} W(z) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 0 \wedge c_3 > 0 \\ -\infty, & \alpha < 0 \wedge c_3 < 0 \\ c_3, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha > 0 \end{cases}$$

из которых следует, что $\lim_{z \rightarrow +\infty} W(z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} W(z) = 0$ если и только если $c_3 = 0$. В таком случае $U(z) = c_1 + c_2 z$ и $U'(z) = c_2$. А в силу $c_2 = \lim_{z \rightarrow +\infty} U'(z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} U'(z) = 0$ имеем $U(z) = c_1$ и аналогично получаем $c_1 = \lim_{z \rightarrow +\infty} U(z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} U(z) = 0$. Значит, $U(z) = W(z) = 0$.

Теперь исследуем систему (3.1) на наличие решений в виде экспоненциальных волн. Это комплексно-значные функции вида

$$u(t, x) = U_0 \exp(i(kx - \omega t)), \quad w(t, x) = W_0 \exp(i(kx - \omega t)), \quad (5.3)$$

где $U_0 \in \mathbb{C}$, $W_0 \in \mathbb{C}$ – комплексные амплитуды, $k \in \mathbb{R}$ – волновое число, $\omega \in \mathbb{C}$ – временная частота. Поскольку такие решения представляют собой бесконечно-дифференцируемые функции, то дифференцируя первое уравнение системы (3.1) по x , а второе по t и выражая $\partial_t^2 \partial_x u$ из обеих уравнений, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\rho\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

Подставляя в последнее уравнение представление (5.3), мы находим

$$(k^2\gamma - \rho\omega(\beta\omega + i))w(t, x) = 0$$

Отсюда

$$\omega = \frac{-i \pm \sqrt{4k^2\beta\gamma\rho^{-1} - 1}}{2\beta} \quad (5.4)$$

Можно видеть, что скорость распространения волн $\omega/|k|$ нелинейно зависит от частоты. То, что волны, описываемые системой уравнений (3.1), обладают дисперсией. Интегрируя первое уравнение из (3.1) относительно u , получаем

$$u(t, x) = -\frac{ikW_0}{\rho\omega^2} \exp(i(kx - \omega t)), \quad (5.5)$$

т.е. $U_0 = -\frac{ikW_0}{\rho\omega^2}$.

Пользуясь данными представлениями, можно найти фазовый сдвиг между волнами смещений и напряжений:

$$\arg(U_0) - \arg(W_0) = \frac{3\pi}{2} + \arg\left(\frac{k}{\omega^2}\right) = \frac{3\pi}{2} + \arg(k) - 2\arg\left(-i \pm \sqrt{4k^2\beta\gamma\rho^{-1} - 1}\right)$$

Рассмотрим теперь случай, что ω это чисто мнимое число (такое произойдет, если будет верно неравенство $4k^2\beta\gamma\rho^{-1} - 1 < 0$). В таком случае

$$w(t, x) = W_0 \exp \left(ikx + \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right) t \right)$$

$$u(t, x) = \frac{ik W_0}{\rho} \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right)^{-2} \exp \left(ikx + \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right) t \right)$$

Полагая $W_0 = |W_0| \exp(i\phi)$ ($|W_0| \in [0, \infty)$ и $\phi \in [0, 2\pi)$) и беря вещественную и мнимую части от решений u и w , находим что

$$w(t, x) = |W_0| \exp \left(\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right) t \right) \cos(kx + \phi)$$

$$u(t, x) = \frac{k |W_0|}{\rho} \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right)^{-2} \exp \left(\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right) t \right) \cos \left(kx + \phi + \frac{\pi}{2} \right)$$

и

$$w(t, x) = |W_0| \exp \left(\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right) t \right) \sin(kx + \phi)$$

$$u(t, x) = \frac{k |W_0|}{\rho} \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right)^{-2} \exp \left(\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}}}{2\beta} \right) t \right) \sin \left(kx + \phi + \frac{\pi}{2} \right)$$

также являются решениями системы (3.1). В последних формулах присутствует отрицательный экспоненциальный член вида $\exp \left(-(2\beta)^{-1} \left(1 + \sqrt{1 - 4k^2 \beta \gamma \rho^{-1}} \right) t \right)$, который соответствует затуханию или диссипации.

Таким образом, при распространении колебаний в вязкоупругих по модели Максвелла стержнях присутствуют эффекты затухания и дисперсии.

6. Сохранение модифицированной энергии. Определим модифицированную “энергию” системы (3.1) как

$$\tilde{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\beta}{\gamma} w^2 \right) (t, x) dx + \frac{1}{\gamma_0} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} w^2(\tau, x) dx$$

Замечание 1. Величину \tilde{E} не совсем корректно называть энергией, ведь она имеет размерность $[\tilde{E}] = MT^{-2}$, вместо требуемого $L^2 MT^{-2}$.

Замечание 2. Как известно [1], полная механическая энергия стержня в отсутствии внешних сил и теплового расширения может быть найдена по формуле

$$E = T + \Pi, \quad T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\partial_t u)^2 dV, \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma \partial_x u dV, \quad (6.1)$$

где T – кинетическая энергия стержня, Π – потенциальная энергия стержня, V – объем стержня, $dV = dx dy dz$ – элемент объема.

Справедливо утверждение о том, что модифицированная “энергия” сохраняется.

Теорема 2. Пусть пара функций u , w есть классическое решение уравнения (3.1) и функции $u(t, \cdot)$ и $w(t, \cdot)$ имеют компактный носитель в пространстве для любого $t \in \mathbb{R}$. Тогда функция $t \mapsto \tilde{E}(t)$ есть константа.

Доказательство. В самом деле, легко рассчитать

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\beta}{\gamma} w \frac{\partial w}{\partial t} \right) (t, x) dx + \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2(t, x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\gamma} w \left(\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - w \right) + \frac{1}{\gamma} w^2 \right) (t, x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) (t, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) (t, x) dx = 0 \end{aligned}$$

Интегрирование по частям в этом доказательстве корректно, поскольку функции u и w имеют компактный носитель в пространстве для любой временной координаты.

Замечание 3. В теореме 2 требование компактного носителя можно ослабить, например, $u \in C^2(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}))$ и $w \in C^1(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R})) \cap L^2([0, T] \times \mathbb{R})$ для любого $T > 0$.

Из сохранения модифицированной энергии следует, что задача (3.1), (3.2) не может иметь двух и более различных классических решений.

Теорема 3. Задача Коши (3.1)–(3.2) имеет не более одного классического решения, если оно существует.

Доказательство. Пусть существует два решения задачи Коши (3.1) и (3.2): (u_1, w_1) и (u_2, w_2) . Обозначим $u = u_1 - u_2$ и $w = w_1 - w_2$. Тогда пара функций u и w удовлетворяет задаче (3.1) и (3.2), в которой $\mu = \varphi = \psi = 0$. Тогда для любого $t \geq 0$ верно равенство $\tilde{E}(t) = \tilde{E}(0) = 0$. Отсюда следует, что на множестве $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ имеют место равенства $\partial_t u = 0$ и $w = 0$. Из первого из последних равенств следует, что функция u не зависит от t , так как она непрерывна, то в силу условия $u(0, x) = 0$ на всем множестве $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ выполняется $u = 0$. Из последних результатов следует, что $u_1 = u_2$ и $w_1 = w_2$.

7. Конечная скорость распространения волн. Для фиксированных $x_0 \in \mathbb{R}$ и $t > 0$ рассмотрим конус прошлого с вершиной (t_0, x_0)

$$K(t_0, x_0) := \{(t, x) | 0 \leq t \leq t_0 \wedge |x - x_0| \leq \sqrt{\gamma/(\rho\beta)} |t_0 - t|\}$$

Теорема 4. Если $u \equiv \partial_t u \equiv w \equiv 0$ на отрезке $[x_0 - t_0 \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}, x_0 + t_0 \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}]$, то $u \equiv w \equiv 0$ внутри конуса $K(t_0, x_0)$.

Доказательство. Определим локальную модифицированную энергию как

$$\tilde{e}(t) = \frac{1}{2} \int_{x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\beta}{\gamma} w^2 \right) (t, x) dx + \frac{1}{\gamma} \int_0^t d\tau \int_{x_0 - (t_0 - \tau) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0 + (t_0 - \tau) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} w^2(\tau, x) dx; \quad t \in [0, t_0]$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{e}'(t) &= \int_{x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\beta}{\gamma} w \frac{\partial w}{\partial t} \right) (t, x) dx + \frac{1}{\gamma} \int_{x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} w^2(t, x) dx - \\ &- \mathcal{B}(u, w) \left(t, x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) - \mathcal{B}(u, w) \left(t, x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) - \mathcal{W}(w)(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{x_0 - (t_0 - t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0 + (t_0 - t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) (t, x) dx - \\
 &- \mathcal{B}(u, w) \left(t, x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) - \mathcal{B}(u, w) \left(t, x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) - \mathcal{W}(w)(t) = \\
 &= \int_{x_0 - (t_0 - t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x_0 + (t_0 - t)\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) (t, x) dx + \\
 &+ (w \partial_t u) \left(t, x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) - (w \partial_t u) \left(t, x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) - \\
 &- \mathcal{B}(u, w) \left(t, x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) - \mathcal{B}(u, w) \left(t, x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) - \mathcal{W}(w)(t); \quad t \in [0, t_0],
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(u, w) &= \sqrt{\frac{\gamma\rho}{\beta}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \sqrt{\frac{\beta}{\gamma\rho}} w^2 \\
 \mathcal{W}(w)(t) &= \int_0^t \sqrt{\frac{1}{\gamma\beta\rho}} \left(w^2 \left(\tau, x_0 - (t_0 - \tau) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) + w^2 \left(\tau, x_0 + (t_0 - \tau) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) \right) d\tau
 \end{aligned}$$

В силу неравенства Коши–Шварца имеем

$$\pm w \partial_t u \leq \sqrt{\frac{\beta}{\gamma\rho}} w^2 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\gamma\rho}{\beta}} (\partial_t u)^2 \tag{7.2}$$

Подставляя (7.2) в (7.1), получаем

$$\tilde{e}'(t) \leq -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{\gamma\rho}{\beta}} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(t, x_0 - (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(t, x_0 + (t_0 - t) \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}} \right) \right) - \mathcal{W}(w)(t) \leq 0$$

В таком случае, $0 \leq e(t) \leq e(0) = 0$ для всех $t \in [0, t_0]$. Отсюда следует, что на множестве $K(t_0, x_0)$ имеют место равенства $\partial_t u = 0$ и $w = 0$. Из первого из последних равенств следует, что функция u не зависит от t , так как она непрерывна, то в силу условия $u(0, x) = 0$ при $x \in [x_0 - t_0\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}, x_0 + t_0\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}]$, на всем множестве $K(t_0, x_0)$ выполняется $u = 0$.

Таким образом, любое возмущение начальных данных, заданное вне отрезка $[x_0 - t_0\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}, x_0 + t_0\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}]$, не влияет на решение внутри $K(t_0, x_0)$. Следовательно, эффекты ненулевых начальных данных распространяются со скоростью, не превышающей $\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}$.

8. Классическое решение задачи Коши о свободных колебаниях. Формально найдем выражения для решения задачи (3.1)–(3.2). Дифференцируя первое уравнение системы (3.1) по x , а второе по t и выражая $\partial_t^2 \partial_x u$ из обоих уравнений, получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\gamma}{\rho\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) + \frac{1}{\beta} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) &= 0; \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \\
 w(0, x) = \mu(x), \quad \partial_t w(0, x) &= \frac{\gamma}{\beta} \psi'(x) - \frac{1}{\beta} \mu(x); \quad x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Такая задача Коши легко интегрируется, и ее классическое решение существует и единственно [6]. Но для нахождения решения в явном аналитическом виде сделаем замену

$$w(t, x) = w_{KG}(t, x) \exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right), \quad (8.1)$$

и в результате получим задачу Коши для уравнения Клейна–Гордона–Фока в виде

$$\frac{\partial^2 w_{KG}}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\gamma}{\rho\beta} \frac{\partial^2 w_{KG}}{\partial x^2}(t, x) - \frac{w_{KG}}{4\beta^2}(t, x) = 0; \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$$

$$w_{KG}(0, x) = \mu(x), \quad \partial_t w_{KG}(0, x) = \frac{\gamma}{\beta} \psi'(x) - \frac{1}{2\beta} \mu(x); \quad x \in \mathbb{R}$$

Выражение для w_{KG} можно взять из работы [7], а с учетом формулы (8.1) имеем

$$\begin{aligned} w(t, x) = & \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right) \left(\mu\left(x - \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\beta}} t\right) + \mu\left(x + \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\beta}} t\right) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right) \sqrt{\frac{\rho\beta}{\gamma}} \int_{x-t\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x+t\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} I_0\left(\frac{1}{2\beta} \sqrt{t^2 - \frac{\rho\beta(x-\xi)^2}{\gamma}}\right) \left(\frac{\gamma}{\beta} \psi'(\xi) - \frac{1}{2\beta} \mu(\xi)\right) d\xi + \\ & + \frac{t}{4} \exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right) \sqrt{\frac{\rho}{\beta\gamma}} \int_{x-t\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}}^{x+t\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}} \frac{1}{4\beta} {}_0F_1\left(2; \frac{t^2 - \gamma^{-1}\rho\beta(x-\xi)^2}{16\beta^2}\right) \mu(\xi) d\xi; \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \varphi(x) + t\psi(x) + \frac{1}{\rho} \int_0^t d\lambda \int_0^\lambda \frac{\partial w}{\partial x}(\tau, x) d\tau = \\ = & \varphi(x) + t\psi(x) + \frac{1}{\rho} \int_0^t d\lambda \int_0^\lambda (16\beta)^{-1} \exp(-\tau/(2\beta)) \times \\ & \times \left(8\beta \sqrt{\frac{\beta\rho}{\gamma}} \int_{x-t\sqrt{\gamma/(\beta\rho)}}^{x+\tau\sqrt{\gamma/(\beta\rho)}} \frac{\rho(x-\xi)}{64\beta^2\gamma} {}_0F_1\left(2; \frac{\tau^2 - \beta\gamma^{-1}(x-\xi)^2}{16\beta^2}\right) (\mu(\xi) - 2\gamma\psi'(\xi)) d\xi + \right. \\ & + t \sqrt{\frac{\rho}{\beta\gamma}} \left(\mu\left(x + \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - \mu\left(x - \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) \right) + 8\beta \left(\mu'\left(x - \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) + \mu'\left(x + \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) \right) + \\ & + 4 \sqrt{\frac{\beta\rho}{\gamma}} \left(\mu\left(x - \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - \mu\left(x + \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) - 2\gamma\psi'\left(x - \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) + 2\gamma\psi'\left(x + \tau \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\rho}}\right) \right) + \\ & \left. + 4\beta\tau \sqrt{\frac{\rho}{\beta\gamma}} \int_{x-t\sqrt{\gamma/(\beta\rho)}}^{x+\tau\sqrt{\gamma/(\beta\rho)}} \frac{\rho(\xi-x)}{64\beta^2\gamma} {}_0F_1\left(3; \frac{\tau^2 - \beta\gamma^{-1}(x-\xi)^2}{16\beta^2}\right) \mu(\xi) d\xi \right) d\tau; \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \end{aligned} \quad (8.3)$$

В формулах (8.2) и (8.3) использованы обозначения: I_n – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка n и ${}_0F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Решение было построено формально, поэтому непосредственной проверкой убеждаемся, что функции u и w обладают необходимой степенью гладкости, удовлетворяют уравнениям (3.1) и начальным условиям (3.2), если, например, $\mu \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^2(\mathbb{R})$.

Таким образом, построено в явном аналитическом виде классическое решение задачи Коши (3.1)–(3.2). Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 5. Пусть выполняются условия $\mu \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда задача (3.1)–(3.2) имеет единственное классическое решение, представленное формулами (8.2) и (8.3), которое непрерывно зависит от начальных данных.

Доказательство следует из рассуждений выше.

9. Классическое решение задачи Коши о вынужденных колебаниях. Рассмотрим начальную задачу (3.2)–(3.3). Ее решение можно искать в виде суммы

$$u_{\text{forced}} = u + u_p, \quad w_{\text{forced}} = w + w_p, \tag{9.1}$$

где пара функций (“общее” решение однородной системы) u, w есть решение задачи (3.1)–(3.2), а функции (частное решение неоднородной системы) u_p, w_p удовлетворяют уравнениям (3.3) и однородным граничным условиям

$$w_p(0, x) = u_p(0, x) = \partial_t u_p(0, x) = 0; \quad x \in \mathbb{R}$$

Фактически, при условии $f \in C^{1,4}([0, \infty) \times \mathbb{R})$, функции u_p, w_p построены в работах [6, 8], и они имеют вид [8]

$$\begin{aligned} w_p(t, x) = & \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{t}{2\beta}\right) \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\beta_0}} \int_0^t d\tau \int_{x-\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}(t-\tau)}^{x+\sqrt{\gamma/(\rho\beta)}(t-\tau)} \left(\exp\left(\frac{\tau}{2\beta}\right) \times \right. \\ & \left. \times \partial_x f(\tau, \lambda) I_0\left(\frac{1}{2\beta} \sqrt{(t-\tau)^2 - \rho\beta\gamma^{-1}(x-\lambda)^2}\right) \right) d\lambda \\ u_p(t, x) = & \frac{1}{\rho_0} \int_0^t d\lambda \int_0^\lambda \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} + f \right) (\tau, x) d\tau \end{aligned} \tag{9.2}$$

Они принадлежат классам $C^3([0, \infty) \times \mathbb{R})$ и $C^{2,4}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ соответственно при условии $f \in C^{1,4}([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Кроме того, $\partial_t w_p(0, x) = 0$ и $\partial_t^2 w_p(0, x) = \gamma\rho^{-1}\beta^{-1}\partial_x f(0, x)$.

Единственность решения задачи устанавливается методом энергий, аналогично теореме 3.

Теорема 6. Пусть выполняются условия $f \in C^{1,4}([0, \infty) \times \mathbb{R})$, $\mu \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда задача (3.2)–(3.3) имеет единственное классическое решение u_{forced} и w_{forced} , представленное формулами (9.1), (9.2), (8.2) и (8.3), которое непрерывно зависит от начальных данных.

Доказательство следует из рассуждений выше.

Заключение. В данной работе показано, что задача Коши для одномерной системы уравнений с частными производными, описывающей продольные колебания вязкоупругого по модели Максвелла стержня, является корректной. Найдено ее решение в явном аналитическом виде. Также указаны некоторые качественные свойства решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 тт. М.: Физматлит, 2003. Т. VII: Теория упругости. 264 с.
2. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 418 с.
3. Ржаницын А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.: ГИТТЛ, 1949. 248 с.
4. Strikwerda J.C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. 2nd ed. Philadelphia: Soc. for Industr.&Appl. Math., 2004. 439 p.
5. Evans L.C. Partial Differential Equations. 2nd ed. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2010. 749 p.

6. Корзюк В.И., Рудько Я.В. Классическое решение задачи Коши для одномерного квазилинейного волнового уравнения // Докл. Нац. АН Беларуси. 2023. Т. 67. № 1. С. 14–19.
7. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
8. Корзюк В.И., Рудько Я.В. Частное решение задачи для системы уравнений из механики с негладкими условиями Коши // Изв. Нац. АН Беларуси. Сер. Физ.-мат. наук. 2022. Т. 58. № 3. С. 300–311.

Problem of Longitudinal Vibrations of a Viscoelastic Rod of Maxwell Type

V. I. Korzyuk^{a,b,#}, J. V. Rudzko^{a,##}, and V. V. Kolyachko^{b,###}

^a*Institute of Mathematics of the NAS of Belarus, Minsk, Belarus*

^b*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

[#]*e-mail: korzyuk@bsu.by*

^{##}*e-mail: janycz@yahoo.com*

^{###}*e-mail: vlad.kolyachko@yandex.ru*

In this paper, we study well-posedness in the sense of Hadamard of the Cauchy problem for a one-dimensional hyperbolic system of partial differential equations describing the longitudinal vibrations of a viscoelastic rod of Maxwell type with constant cross-section. We discuss some properties of the system and its solutions: the conservation of modified “energy”, the finite propagation speed, dispersion, and dissipation of solutions.

Keywords: longitudinal vibrations, Maxwell material, Cauchy problem, well-posed problem

REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics. in 10 vol. Vol. 7. Theory of Elasticity. Moscow: Fizmatlit, 2003. 264 p. (in Russian)
2. Rzhanytsyn A.R. Theory of Creep. Moscow: Stroiizdat, 1968. 418 p. (in Russian)
3. Rzhanytsyn A.R. Some Questions of the Mechanics of Systems Deforming in Time. Moscow: GITTL, 1949. 248 p. (in Russian)
4. Strikwerda J.C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. 2nd ed. Philadelphia: Soc. for Industr.&Appl. Math., 2004. 439 p.
5. Evans L.C. Partial Differential Equations. 2nd ed. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2010. 749 p.
6. Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Classical solution of the initial-value problem for a one-dimensional quasilinear wave equation // Dokl. Nat. Acad. of Sci. Belarus, 2023, vol. 67, no. 1, pp. 14–19.
7. Polyanin A.D. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2002. 800 p.
8. Korzyuk V.I., Rudzko J.V. A particular solution of a problem for a system of equations from mechanics with nonsmooth Cauchy conditions // Proc. of the Nat. Acad. of Sci. Belarus. Ser. Phys.&Math., 2022, vol. 58, no. 3, pp. 300–311. (in Russian)