

УДК 624.07

МЕТОД РАСЧЕТА ПЛАСТИН НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ИНЕРЦИОННОЙ НАГРУЗКОЙ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ© 2022 г. И. И. Иванченко^{1,*}¹ *Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия***e-mail: ivaii011@mtu-net.ru*

Поступила в редакцию 24.12.2021 г.

После доработки 13.06.2022 г.

Принята к публикации 20.06.2022 г.

Предлагается метод расчета пластин при действии инерционной нагрузки и ее движении с переменной скоростью. Рассмотрены тестовые задачи об ударном воздействии и движении с переменной скоростью по свободно опертой прямоугольной пластине груза при моделировании нелинейного контактного сближения его с пластиной. Рассмотрена задача о взаимодействии транспортной системы, при движении ее в режиме торможения после приземления на протяженную пластину, лежащую на упругом основании.

Ключевые слова: переменная скорость, шаговые процедуры, метод узловых ускорений, пластина, подвижная инерционная нагрузка

DOI: 10.31857/S0032823522050101

1. Введение. При решении задачи о действии на пластины простейших подвижных нагрузок – сосредоточенных и распределенных сил, при постоянных и переменных скоростях движения, применяются интегральные преобразования Фурье и Лапласа [1–4], для грузов находят применения численные решения интегральных уравнений относительно динамических реакций при построении рекуррентных соотношений [5, 6]. В случае действия равномерно распределенной инерционной нагрузки, при переменной скорости движения, путем изменения ее ступенями в работе [7] используется специальное разделение переменных. Методы расчета на действие простейшей инерционной подвижной нагрузки на прямоугольные пластины, как и для стержней, распадаются на два основных подхода. В первом случае используются обобщенные координаты при разложении прогиба по собственным формам балки или пластины и задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [8, 9]. Во втором случае, после расчленения системы “балка–груз” или “пластина–груз”, задача сводится к решению интегрального уравнения относительно динамической реакции груза [5, 6]. В [8, 9] увеличение числа удерживаемых форм приводит к увеличению порядка системы уравнений, в [5, 6] возникают трудности при решении интегральных уравнений, связанные с условной устойчивостью шаговых процедур. В статье для прямоугольных пластин на упругом основании предлагается метод – “узловых ускорений”, объединяющий между собой указанные подходы и ликвидирующий указанные у них недостатки, так как доступно учитывает любое необходимое число форм в разложении прогиба, и имеет, как и в методе интегральных уравнений [5, 6], разрешающую систему уравнений с минимальным числом неизвестных, при использовании безусловно-устойчивой схемы интегри-

рования, предложенной в [10]. Отметим, что метод “узловых ускорений” применяется и для стержневых систем [11–14]. Колебания пластин при действии подвижной инерционной нагрузки исследуются, привлекая метод конечных элементов (МКЭ) в [15–18], как для простейшей силовой нагрузки при косоугольных пластинах [15], так и с привлечением комплексов, например, ABAQUS и LS-DYNA [16–18]. Используя конечно-элементную базу этих комплексов, в [16–18] реализуется, в том числе, аналог первого подхода к решению задачи на подвижную нагрузку, с привлечением набора собственных форм конструкции. В [17] решение задачи “груз–балка” или “груз–плита”, путем введения линейного элемента между движущимся грузом и проезжей частью, сводится к решению системы линейных уравнений с привлечением результатов вычисления форм колебаний конструкции, используя при этом метод Ньюмарка. Другой подход, с привлечением LS-DYNA, реализуемый в [18], сводится к изучению действия сложной подвижной инерционной нагрузки на конструкцию при применении метода динамической релаксации (DYNAMIC RELAXATION). Заметим, что метод “узловых ускорений”, предлагаемый для пластин, реализуется и в случае движения инерционной нагрузки в [14] при конечноэлементной дискретизации коробчатой конструкции пролетного строения моста.

1. Числовая процедура, используемая для решения задачи. Применяемый метод для решения задачи о действии подвижной нагрузки на пластину использует шаговую процедуру [10]. Рассмотрим предварительно решение задачи для осциллятора. Рассмотрим шаговую процедуру для решения уравнения (1.1)

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu\omega^2\dot{x} + \omega^2x &= \tilde{P}(t); & \omega^2 &= c/m, & \tilde{P}(t) &= r(t)/m \\ x_0 &= x(0), & v_0 &= \dot{x}(0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Проведем временную дискретизацию с шагом, где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, ($j = 0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{j+1} + \mu\omega^2\dot{x}_{j+1} + \omega^2x_{j+1} &= \tilde{P}_{j+1} \\ \dot{x}_{j+1} &= \dot{x}_j + \ddot{x}_{j+1/2}\Delta t_j \\ x_{j+1} &= x_j + \dot{x}_j\Delta t_j + \frac{1}{2}\ddot{x}_{j+1/2}\Delta t_j^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Преобразуем первое уравнение (1.2), используя замену

$$\ddot{x}_{j+1} = 2\ddot{x}_{j+1/2} - \ddot{x}_j, \quad \tilde{P}_{j+1} = 2\tilde{P}_{j+1/2} - \tilde{P}_j \quad (1.3)$$

и выражения \dot{x}_{j+1} и x_{j+1} из второго и третьего уравнений (1.2). В итоге получаем шаговую процедуру

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{j+1/2} &= \tilde{a}_j \left(-\omega^2x_j - \omega^2((\Delta t_j/\alpha_1) + \mu)\dot{x}_j + \tilde{P}_{j+1/2} \right) \\ \dot{x}_{j+1} &= \dot{x}_j + \ddot{x}_{j+1/2}\Delta t_j, & x_{j+1} &= x_j + \dot{x}_j\Delta t_j + \ddot{x}_{j+1/2}\Delta t_j^2/2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\tilde{a}_j = \left\{ 1 + \left(\omega^2/\alpha_2 \right) \left(\mu\Delta t_j + \Delta t_j^2/\alpha_3 \right) \right\}^{-1}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$

Схема (1.4), при обозначении $\beta = -\omega^2\tilde{a}_j$, имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{j+1/2} \\ \dot{x}_{j+1} \\ x_{j+1} \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{j-1/2} \\ \dot{x}_j \\ x_j \end{bmatrix} + \mathbf{L}\tilde{P}_{j+1/2} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & \beta(\mu + \Delta t_j)/2 & \beta \\ 0 & 1 + \beta\Delta t_j(\mu + \Delta t_j/2) & \beta\Delta t_j \\ 0 & \beta\Delta t_j^2(\mu + \Delta t_j/2)/2 + \Delta t_j & 1 + \beta\Delta t_j^2/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для безусловно-устойчивой процедуры требуется выполнение условия $\rho(\mathbf{A}) = \max |\lambda_i| \leq 1$, $i = 1, 2, 3$, при любом Δt_j , где ρ – спектральный радиус оператора аппроксимации \mathbf{A} и λ_i – корни характеристического уравнения $\|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}\| = 0$ [19]. Для процедуры (1.4), раскрывая определитель по первой строке и делая замену $Z = 1 - \lambda + \beta \Delta t^2 / 2$, имеем уравнение $-\lambda [Z^2 - \mu \Delta t^2 \omega^2 \tilde{a}_j Z + \Delta t^2 \omega^2 \tilde{a}_j^2] = 0$. Решая квадратное уравнение относительно переменной Z , определяем $\lambda_{1,2}$ и $|\lambda_{1,2}|$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - \frac{1}{4} \Delta t_j^2 \omega^2 \mp \Delta t_j \omega \sqrt{\frac{1}{4} \mu^2 \omega^2 - 1}}{1 + \frac{1}{4} \Delta t_j^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \Delta t_j}, \quad |\lambda_{1,2}| = \left[\frac{1 + \frac{1}{4} \Delta t_j^2 \omega^2 - \frac{1}{2} \mu \Delta t_j \omega^2}{1 + \frac{1}{4} \Delta t_j^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \Delta t_j} \right]^{1/2} < 1 \quad (1.6)$$

Для проверки условия $\max |\lambda_i| \leq 1$ рассматривается выполнение при $h = (\mu \omega / 2) > 1$ и $h = (\mu \omega / 2) < 1$, когда корни $\lambda_{1,2}$ действительные и, соответственно, комплексные. Из простейшей оценки неравенств, следует, что $\rho(\mathbf{A}) < 1$ при $\mu \neq 0$ и $\rho(\mathbf{A}) = 1$ при $\mu = 0$ для любых значений Δt_j . Отметим, что если положить в (1.4) $\mu = 0$, $\dot{x}_j = x_j = 0$ и $\tilde{P}(t) = P = \text{const}$, то при $\Delta t_j \rightarrow \infty$, $\ddot{x}_{j+1/2} \rightarrow 0$, $\dot{x}_{j+1} \rightarrow 0$, $x_{j+1} = 2x_C$, где x_C – статический прогиб осциллятора под действием силы P .

Применяемая процедура (1.4) совпадает с методом постоянного среднего ускорения, но с измененным начальным ускорением. Метод Ньюмарка [20], при $\delta = 0.5$, $\beta = 0.25$, совпадает с предложенным С.П. Тимошенко в [21] методом постоянного среднего ускорения. Процедура (1.4) имеет характеристики погрешности интегрирования такие же, как у метода Ньюмарка, при $\delta = 0.5$, $\beta = 0.25$, при этом, она приводит только к минимальному увеличению периода численного решения без снижения амплитуды [19].

Процедура (1.4), сохраняя указанные характеристики, находит применение к решению методом прямого интегрирования систем уравнений

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}, \quad (1.7)$$

где \mathbf{M} , \mathbf{C} и \mathbf{K} – матрицы масс, демпфирования и жесткости, соответственно; \mathbf{R} – вектор внешних узловых нагрузок; $\ddot{\mathbf{U}}$, $\dot{\mathbf{U}}$, \mathbf{U} – векторы узловых ускорений, скоростей и перемещений узловых точек транспортной системы или узловых смещений ансамбля конечных элементов. Для решения (1.7) имеем процедуру

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{U}}_{j+1/2} &= \tilde{\mathbf{B}}_j^{-1} \{ -(\mathbf{C} + \mathbf{K}\Delta t_j / \alpha_1) \dot{\mathbf{U}}_j - \mathbf{K}\mathbf{U}_j + \mathbf{R}_{j+1/2} \} \\ \dot{\mathbf{U}}_{j+1} &= \dot{\mathbf{U}}_j + \ddot{\mathbf{U}}_{j+1/2} \Delta t_j \\ \mathbf{U}_{j+1} &= \mathbf{U}_j + \dot{\mathbf{U}}_j \Delta t_j + \ddot{\mathbf{U}}_{j+1/2} \Delta t_j^2 / 2, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\tilde{\mathbf{B}}_j = \mathbf{M} + \mathbf{C}(\Delta t_j / \alpha_2) + \mathbf{K}\Delta t_j^2 / \tilde{\beta}$, при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$, $\tilde{\beta} = \alpha_2 \alpha_3 = 4$.

2. Общие формулы и тестовые примеры. Обратимся с начала к решению классической задачи о движении груза по пластине с переменной скоростью, а затем перейдем к случаю более сложной нагрузки. Используем, далее, безусловно-устойчивую шаговую процедуру по времени (1.8) и метод учета действия безмассовой и инерционной подвижной нагрузки, применяемый для расчета стержневых систем, и предложенных ранее в [10, 11]. Будем рассматривать случаи равнопеременного движения подвижной нагрузки по конструкциям.

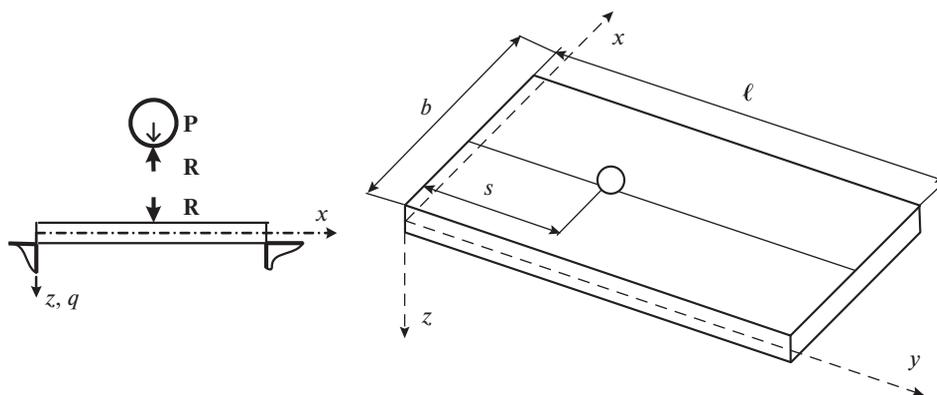


Рис. 1. Взаимодействие движущегося груза с пластиной.

Дифференциальное уравнение колебаний прямоугольной пластины при движении по ней груза весом P и массой M имеет вид

$$L_1 q^*(x, y, t) = \delta(x - 0.5b) \delta(y - s(t)) \times R_{o1}(s(t), t) \quad (2.1)$$

$$L_1 = D\Delta\Delta + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \tilde{\mu}_1 \frac{\partial}{\partial t} + k^*$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\tilde{\mu}_1$ – коэффициент, учитывающий диссипацию энергии, $q^*(x, y, t)$ – прогиб пластины, $R_{o1}(s(t), t)$ – давление груза на пластину, x и y – координаты по ширине и длине пластины (рис. 1), $\delta(y - s(t))$ – дельта-функция, $s(t) = s_0 + v_0 t + wt^2/2$ – закон движения груза по пластине, s_0 и v_0 – начальное положение и скорость груза при приземлении на плиту, $v = v_0 + wt$ и w – скорость и ускорение движения груза, m – погонная масса пластины, b и l – ширина и длина пластины, k^* – коэффициент постели.

Прогиб свободно опертой пластины на упругом основании в момент t_{j+1} при движении по ней сосредоточенной силы $R = \delta(x - 0.5b) \delta(y - s(t)) \times R_{o1}$, используя шаговую процедуру (1.4), предложенную в [10], можно записать в виде

$$q^*(\eta_1, \eta_2, t_{j+1}) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{i=1}^{n_2} W_k(\eta_1) W_i(\eta_2) q_{kij+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{i=1}^{n_2} W_k(\eta_1) W_i(\eta_2) \left(q_{kij} + \dot{q}_{kij} \Delta t_j + \ddot{q}_{ki+1/2} \frac{\Delta t_j^2}{2} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{i=1}^{n_2} W_k(\eta_1) W_i(\eta_2) \times$$

$$\times \left\{ \left(1 - \vartheta_{kij} \tilde{\omega}_{ki}^2 \right) q_{kij} + \left(\Delta t_j - \vartheta_{kij} \left(2n_{ki} + \frac{\Delta t_j}{2} \tilde{\omega}_{ki}^2 \right) \right) \dot{q}_{kij} + \vartheta_{kij} \int_0^1 \int_0^1 \bar{\eta} R_{j+1/2} d\eta_1 d\eta_2 \right\} \quad (2.2)$$

$$W_k(\eta_l) = \sin(r_k \eta_l), \quad \vartheta_{kij} = \frac{\Delta t_j^2}{2} \left(1 + n_{ki} \Delta t_j + \frac{\Delta t_j^2 \tilde{\omega}_{ki}^2}{4} \right)^{-1} = \frac{\Delta t_j^2}{2} G_{kij}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)}$$

$$\tilde{\omega}_{ki} = \left(\frac{D}{m} \left(\left(\frac{r_k}{b} \right)^2 + \left(\frac{r_i}{\ell} \right)^2 \right) + \frac{k^*}{m} \right)^{1/2}, \quad 2n_{ki} = \tilde{\mu}_1/m, \quad r_k = \pi k, \quad r_i = \pi i, \quad R_{01} = P - M\ddot{q}_2$$

$$\eta_1 = x/b, \quad \eta_2 = y/\ell, \quad \tilde{\eta} = \tilde{b} W_k(\eta_1) W_i(\eta_2), \quad \tilde{b} = \frac{4}{mb\ell}$$

$$k, i = 1, \dots, n_1, n_2, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь q_{kij} – обобщенные координаты пластины, $\tilde{\omega}_{ik}$ – круговая частота колебаний, σ – коэффициент Пуассона, h – толщина пластины, E – модуль упругости.

Полагая $\ddot{q}_{1j+1/2} = d^2 q^*(s(t), t) / dt^2$, при $t = t_{j+1/2}$, запишем полное вертикальное ускорение точки контакта груза [1] при постоянной координате его движения $x_c = \text{const}$ (рис. 1) в виде

$$\ddot{q}_{1j+1/2} = \frac{d^2 q^*(x, s(t), t)}{dt^2} \Big|_{x=\text{const}} \Big|_{t=t_{j+1/2}} = \frac{\partial^2 q^*}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 q^*}{\partial s \partial t} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial^2 q^*}{\partial s^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{\partial q^*}{\partial s} \frac{d^2 s}{dt^2} \Big|_{t=t_{j+1/2}} \quad (2.3)$$

Используя (2.2) и (2.3), имеем на шаге $[t_j, t_{j+1}]$

$$\ddot{q}_{1j+1/2} = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{i=1}^{n_2} \sin\left(r_k \frac{x_c}{b}\right) \left\{ \alpha_{1ij} \ddot{q}_{kij+1/2} + \alpha_{2ij} \dot{q}_{kij} + \alpha_{3ij} q_{kij} \right\} = \tilde{D}_1(P - M\ddot{q}_2) + \tilde{D}_0 \quad (2.4)$$

$$\alpha_{1ij} = \sin(r_i \eta_{2j+1/2}) + \frac{r_i \Delta t_j}{\ell} [v_0 + w t_{j+1/2}] \cos(r_i \eta_{2j+1/2}) + \tilde{d}_{ij} \frac{\Delta t_j^2}{4}$$

$$\alpha_{2ij} = \frac{2r_i}{\ell} [v_0 + w t_{j+1/2}] \cos(r_i \eta_{2j+1/2}) + \tilde{d}_{ij} \frac{\Delta t_j}{2}, \quad \alpha_{3ij} = \tilde{d}_{ij}$$

$$\tilde{d}_{ij} = -\left(v_0^2 + 2w t_{j+1/2} v_0 + w^2 t_{j+1/2}^2 \right) \left(\frac{r_i}{\ell} \right)^2 \sin(r_i \eta_{2j+1/2}) + w \left(\frac{r_i}{\ell} \right) \cos(r_i \eta_{2j+1/2}) \quad (2.5)$$

$$\eta_{2j+1/2} = \left(s_0 + v_0 t_{j+1/2} + w \frac{t_{j+1/2}^2}{2} \right) / \ell, \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j$$

$$\ddot{q}_{kij+1/2} = \left\{ -\tilde{\omega}_{ki}^2 q_{kij} - \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{m} + \frac{\Delta t_j}{2} \tilde{\omega}_{ki}^2 \right) \dot{q}_{kij} + \tilde{b} \sin\left(r_i \frac{x_c}{b}\right) \sin(r_i \eta_{2j+1/2}) R_{01, j+1/2} \right\} \frac{2\vartheta_{kij}}{\Delta t_j^2}$$

Здесь D_1 и D_0 – функции, сгруппированные и выделенные из (2.4).

Обозначим через $\varepsilon(R) = \tilde{\alpha} R^{2/3}$ контактное сближение груза и пластины. Уравнение динамического равновесия груза в момент контакта $t_{j+1/2}$ имеют вид

$$R_{j+1/2} = P - M\ddot{q}_{2j+1/2}; \quad q_2 > q_1 \quad (2.6)$$

$$0 = P - M\ddot{q}_{2j+1/2}; \quad q_2 \leq q_1, \quad (2.7)$$

где q_1 – смещение точки контакта груза на пластине, q_2 – вертикальное смещение центра масс груза.

Представим выражение контактной силы на шаге $[t_j, t_{j+1}]$ в виде

$$R_{j+1/2} = k_1 \varepsilon_{j+1/2}^{3/2}; \quad k_1 = \tilde{\alpha}^{-3/2}, \quad \varepsilon_{j+1/2} = q_{2j+1/2} - q_{1j+1/2} \quad (2.8)$$

Для линеаризации полученного уравнения, учитывая (2.8), используем выражение, для приращения, например, функции $f(x, y)$ двух переменных в точке x_o, y_o в форме

$$df(x, y) = f'(x_o, y_o)dx + f'_y(x_o, y_o)dy$$

Преобразуем выражение (2.6) к виду

$$M\ddot{q}_{2j+1/2} + k_1 (q_{2j+1/2} - q_{1j+1/2})^{3/2} - k_1 (q_{2j} - q_{1j})^{3/2} = -k_1 (q_{2j} - q_{1j})^{3/2} + P_{j+1/2} \quad (2.9)$$

В итоге, имеем на шаге $[t_j, t_{j+1}]$

$$M\ddot{q}_{2j+1/2} + \tilde{k} (q_{2j+1/2} - q_{1j+1/2}) = L_{j+1/2}, \quad (2.10)$$

где $L_{j+1/2} = \tilde{k} (q_{2j} - q_{1j}) - \tilde{k}_1 (q_{2j} - q_{1j})^{3/2} + P_{j+1/2}$.

$$\tilde{k} = \begin{cases} 0 & \text{при } q_2 \leq q_1 \\ \frac{3}{2} k_1 (q_{2j} - q_{1j})^{1/2} & \text{при } q_2 > q_1 \end{cases}, \quad \tilde{k}_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } q_2 \leq q_1 \\ k_1 & \text{при } q_2 > q_1 \end{cases}$$

Объединяя в систему (2.10) и (2.4) на шаге $[t_j, t_{j+1}]$, имеем

$$\ddot{\mathbf{q}}_{j+1/2} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (2.11)$$

Здесь $\bar{\mathbf{q}} = [q_1, q_2]'$, $\mathbf{A} = [a_{ik}]$, $\mathbf{B} = [b_i]$, $i, k = 1, 2$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$a_{11} = -\tilde{k} \Delta t_j^2 / 4, \quad a_{12} = M + \tilde{k} \Delta t_j^2 / 4, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = M \tilde{D}_1$$

$$b_1 = -\tilde{k} \frac{\Delta t_j}{2} (\dot{q}_{2j} - \dot{q}_{1j}) - k_1 (q_{2j} - q_{1j})^{3/2} + P_{j+1/2}, \quad b_2 = D_0 + P \tilde{D}_1$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{j+1} = \bar{\mathbf{q}}_j + \dot{\bar{\mathbf{q}}}_j \Delta t_j + \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2} \frac{\Delta t_j^2}{2}, \quad \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1} = \dot{\bar{\mathbf{q}}}_j + \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2} \Delta t_j$$

На шаге $[t_j, t_{j+1}]$ выражение $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2}$ из (2.11), используя (2.6) и (2.2), позволяет вычислять начальные условия для следующего шага интегрирования, используя, на каждом шаге, условия совместности деформаций в точке контакта груза и пластины.

На первом этапе проведем тестирование алгоритма для учета нелинейной упругости при сближении груза и пластины при ударе, будем для тестирования использовать пример, представленный в [5]. Рассмотрим удар при падении с высоты $h_0 = 0.26$ м груза весом $P = 14.7 \times 9.8$ Н в центр квадратной, стальной, свободно опертой пластины при $b = 0.6$ м, $h = 0.012$ м. Процедура (2.3)–(2.11) реализовывалась, полагая при $t = 0$, $s = s_0 = 0.3$ м, $v_0 = w = 0$ и $q_1 = \dot{q}_1 = q_2 = 0$, $\dot{q}_2 = \sqrt{2gh_0}$. Коэффициент k_1 определялся по формуле (для случая одинакового материала у соударяющихся тел) $k_1 = 2E\sqrt{r}/(3(1 - \sigma^2))$ [5], где $r = 0.07141$ м. На рис. 2а представлены изменения контактной силы R [кН] и смещение пластины под грузом $q_1 = Y \times 10^{-4}$ [м] в зависимости от времени $t = N \times \Delta t_j$, где N – число шагов при интегрировании системы (2.11), при $\Delta t_j = 0.1057 \times 10^{-4}$ с. Следует отметить, что результаты, представленные на рис. 2а, практически совпадают с результатами из ([5], с. 715, рис. 19.13). Вторая тестовая зада-

ча связана с равнопеременным движением груза по свободно опертой по контуру пластине с параметрами [6]

$$\beta = \frac{M\mu_1}{\rho h \ell^2}, \quad \alpha = \frac{v_c l}{\pi(1 + \mu_1^2)\sqrt{D/m}}, \quad w = \frac{v_0^2}{2\ell} \left(\left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 - 1 \right), \quad (2.12)$$

где $\mu_1 = \ell/b$, $v_c = (v_0 + v_1)/2$, v_0 и v_1 – скорости, соответственно, въезда и схода груза с плиты. Шаговая процедура (2.3)–(2.11) реализована при $\beta = 1$, $\alpha = 1/2$, $v_1/v_0 = 2/3$, $x_c = b/2$ и параметрах для пластины из [6] $\ell = 2$ м, $b = 1$ м, $h = 0.02$ м, $E = 2.06 \times 10^8$ кН/м², $\sigma = 0.3$, $\rho = 7.85$ кг/м³ и для груза при $E = 8.83 \times 10^3$ кН/м², $\sigma = 0.42$, вычисляя k_1 , для случая вдавливания шара с радиусом $r = 0.5$ м в пластину. На рис. 26 представлен характер изменения динамических коэффициентов при замедленном движении груза: $R = P_D/P$, P_D – давление под грузом; $Z_1 = Z_D/Z_0$, Z_D – динамический прогиб пластины при $y = \ell/2$ и $Z_0 = \alpha_1 P b^2/D$ – статический прогиб пластины при действии в том же месте силы P [6]; $Z_2 = Z_D/Z_0$, Z_D – динамический прогиб под грузом при $y = S(t)$. Следует отметить, что результаты, представленные на рис. 26, для изменения динамического коэффициента для прогиба в середине пластины – Z_1 близки к результатам из [6], с. 105, рис. 57), где для указанной пластины и въезжающего груза контакт по Герцу моделируется через распределенную по эллиптической поверхности нагрузку с использованием численного интегрирования и построения рекуррентных соотношений для определения динамического взаимодействия. Отметим, что динамические коэффициенты для давления в [6] не представлены.

3. Метод решения уравнений для системы “самолет–посадочная полоса”. Алгоритм (2.3)–(2.11) легко реализуется в случае движения системы грузов по плите. Выражения вида (2.5) при движении N грузов формируют систему N линейных, алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_{ok \ j+1/2} + \mathbf{E} \ddot{\mathbf{q}}_K \ j+1/2 = \mathbf{B} \quad (3.1)$$

Здесь \mathbf{A} , \mathbf{B} – матрица и вектор (порядок равен числу грузов), \mathbf{E} – единичная матрица, $\mathbf{R}_{ok} = [R_{oi}]$ ($i = 1, \dots, N$) – вектор динамических давлений грузов на плиту, $\ddot{\mathbf{q}}_K$ – вектор вертикальных ускорений точек контактов движущихся грузов.

Рассмотрим механическую систему в виде пластины на упругом основании, свободно опертой по контуру, и самолета в момент пробега (заключительного этапа посадки самолета). Движение самолета на пробеге считается равнозамедленным с некоторым средним ускорением $-w$. На этапе пробега самолет кроме непрерывно уменьшающихся аэродинамических сил Y и F (рис. 3), т.е. подъемной силы $-Y$ и силы лобового сопротивления $-F$, включающей составляющую от тормозных парашютов, действует сила трения колес об аэродромное покрытие $F_{Tp} = \sum_{i=1}^3 F_{i,Tp} = \sum_{i=1}^3 f \times R_i$. Уравнение движения самолета при пробеге можно записать в виде [22, 23] $(G/g)w = F + F_m$, где G – вес самолета при посадке; f – коэффициент трения. При математическом моделировании посадки следует учесть этапы посадки, предшествующие пробегу, т.е. этап выдерживания, при котором $Y = G$ (снижение происходит до высоты 0.25–0.3 м) и этап парашютирования, малый по времени, при $Y < G$ [22, 23], путем ввода подвижной системы координат, в которой рассматриваются вертикальные смещения самолета в момент пробега.

Будем далее обозначать модель самолета через $\{e_h\}$ $h = 1, \dots, 4$, представляя ее, как систему жестких тел e_h , состоящую из корпуса и трех связанных с ним линейными упруго-вязкими связями колес шасси, имеющих нелинейные связи с пластиной (рис. 3). Будем считать, что начальные условия у $\{e_h\}$ нулевые, а параметры, определяющие по-

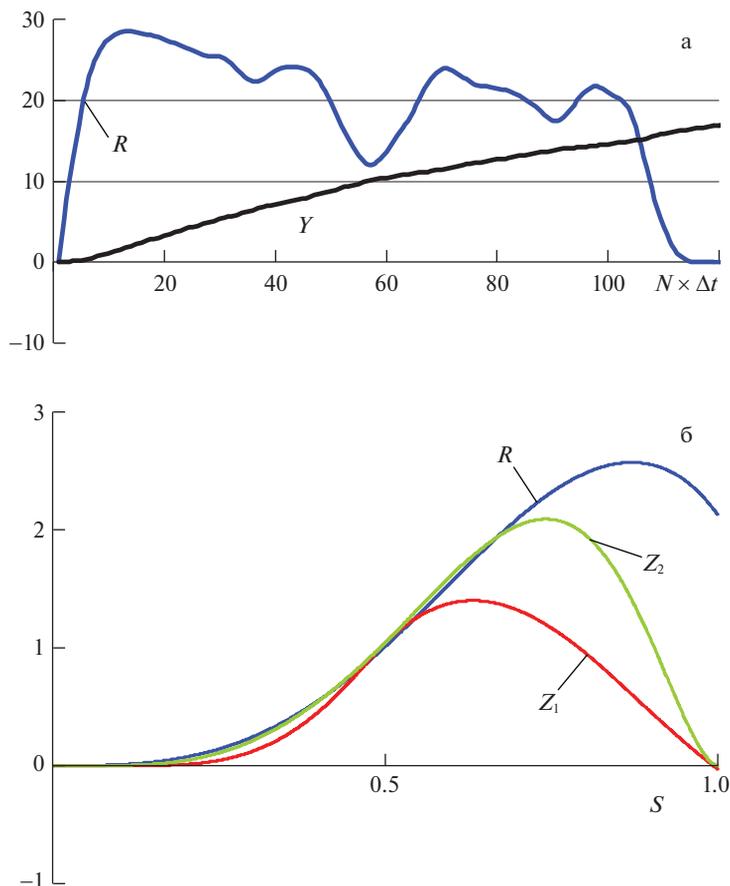


Рис. 2. Изменение динамических давлений и прогибов при взаимодействии груза и пластины.

ложение $\{e_h\}$ в системе $O_*X_*Y_*Z_*$, движущейся вдоль плиты поступательно, со скоростью v , имеют нулевые значения до момента касания колес самолета плиты, при этом в момент контакта $\{e_h\}$ с плитой считается, что подъемная сила $Y = 0$ (рис. 3). Положение в пространстве корпуса подвижной нагрузки на этапе пробега $\{e_h\}$ определяется параметрами: q_C – вертикальным смещением центра масс корпуса и малыми поворотами φ_x и φ_y относительно горизонтальных осей ox и oy (рис. 3). В качестве обобщенных координат q_i ($i = 1, \dots, 9$) будем рассматривать вертикальные смещения узловых точек, соединяющих элементы $\{e_h\}$ через связи (рис. 3).

Для составления системы дифференциальных уравнений движения $\{e_h\}$ применяется метод кинестатики. Используя метод расчленения для $\{e_h\}$, имеем

$$\begin{aligned}
 k_i \alpha_i^{3/2} &= R_i \\
 m_i \ddot{q}_{i+3} &= R_i - T_i - \mu \dot{T}_i + P_i \\
 m_4 \ddot{q}_C &= P_4 + \sum_{k=1}^3 (T_k + \mu \dot{T}_k)
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

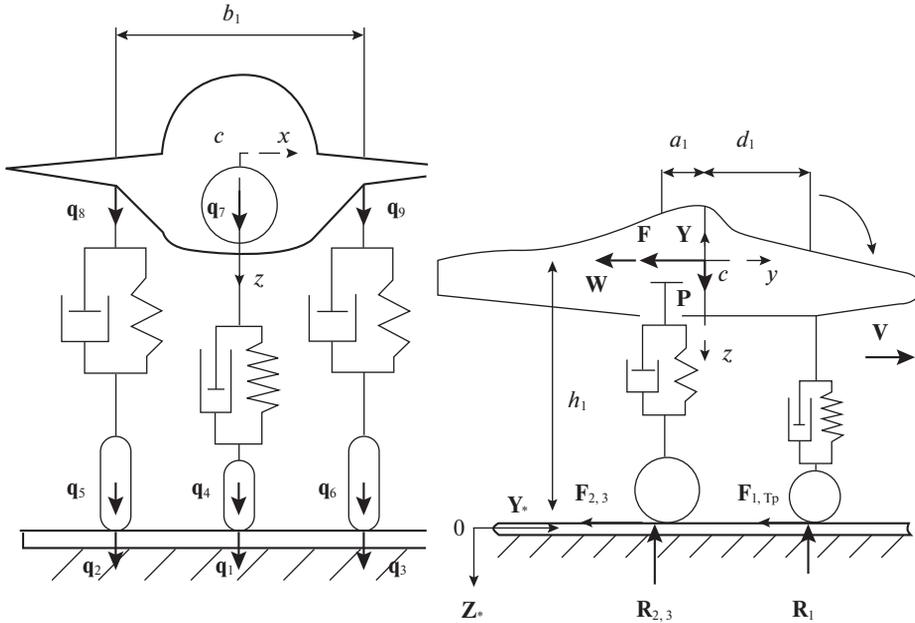


Рис. 3. Система $\{e_h\}$, моделирующая самолет и схема сил действующих на него при пробеге.

$$J_{Cj} \ddot{\varphi}_j = m_{Cj} \ddot{c}_j; \quad \tilde{j} = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\alpha_i = q_i - q_{i+3}$, $T_i = c_{i+3}(q_{i+3} - q_{i+6})$, $q_C = \left(\frac{1}{2} a_1(q_8 + q_9) + d_1 q_7\right) / (a_1 + d_1)$.

$$\varphi_1 = \varphi_x = \left(q_7 - \frac{1}{2}(q_8 + q_9)\right) / (a_1 + d_1), \quad \varphi_2 = \varphi_y = (q_8 - q_9) / b_1$$

$$J_{C1} = J_x, \quad J_{C2} = J_y$$

$$m_{C1} = T_4 b_1 - (T_5 + T_6) d_1 + M^{(ин)}, \quad m_{C2} = (T_5 - T_6) b_1 / 2$$

Здесь m_i – массы колес шасси при $i = 1, 2, 3$ и кузова $m_4 = M^{(куз)}$, c_{i+3} – жесткости линейных связей, моделирующих упругость шасси, μ – коэффициенты, учитывающие затухания в линейных связях, J_x, J_y – моменты инерции относительно осей, проходящих через центр масс кузова, $M^{(ин)} = F_{Tp} \times h_1 = (M^{(куз)} w - F) \times h_1$ – инерционный момент (рис. 3), a_1, b_1, c_1, d_1, h_1 – конструктивные размеры $\{e_h\}$, k_i – коэффициент характеризующий нелинейные связи, в соответствии с (2.8).

После дискретизации по времени системы уравнений (3.2), используя шаговую процедуру (1.8) из [10] и линеаризацию уравнений в соответствии с (2.8)–(2.11), имеем на шаге $[t_j, t_{j+1}]$ систему линейных уравнений

$$M_* \ddot{\bar{q}}_{cj+1} + C_* \dot{\bar{q}}_{cj+1} + K_* \bar{q}_{cj+1} = P_1 + R_*; \quad R_* = \Pi_* \bar{R}_{*j+1} \tag{3.3}$$

Здесь $\bar{q}_c = [q_1, \dots, q_9]^T = [\bar{q}_1^0, \bar{q}_2^0]^T$ – вектор независимых обобщенных координат, определяющих $\{e_h\}$ в системе $O_* X_* Y_* Z_*$ (рис. 3), где $\bar{q}_1^0 = [q_1, q_2, q_3]^T$ – вертикальные смещения

точек контакта колес с пластиной на упругом основании, при движении $\{e_h\}$ в режиме торможения, \mathbf{M}_* , \mathbf{C}_* , \mathbf{K}_* матрицы масс, демпфирования и жесткости для $\{e_h\}$, \mathbf{P}_1 – вектор, учитывающий весовые характеристики, инерционный момент и элементы дискретизации при линеаризации системы (3.1) на шаге $[t_j, t_{j+1}]$, $\mathbf{\Pi}_*$ – матрица соединения векторов $\bar{\mathbf{R}}_*$ и \mathbf{R}_* , где $\bar{\mathbf{R}}_* = [R_1, R_2, R_3]'$ – вектор реакций $\{e_h\}$ в точках контакта с проезжей частью.

Представим систему (3.3), в соответствии с (1.8), на шаге $[t_j, t_{j+1}]$ в виде

$$\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\ j+1/2} = \tilde{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{q}}_{c\ j} + \tilde{\mathbf{G}}_2 \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\ j} + \mathbf{A}^* (\mathbf{P}_1 + \mathbf{\Pi}_* \bar{\mathbf{R}}_{*j+1/2}) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A}^* = \left[\mathbf{M}_* + \mathbf{C}_* \frac{\Delta t_j}{2} + \mathbf{K}_* \frac{\Delta t_j^2}{4} \right]^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{G}}_1 = -\mathbf{A}^* \mathbf{K}_*, \quad \tilde{\mathbf{G}}_2 = -\mathbf{A}^* \left[\mathbf{C}_* + \mathbf{K}_* \frac{\Delta t_j}{2} \right] \quad (3.5)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{c\ j+1} = \bar{\mathbf{q}}_{c\ j} + \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\ j} \Delta t_j + \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\ j+1/2} \frac{\Delta t_j^2}{2}, \quad \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\ j+1} = \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\ j} + \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{c\ j+1/2} \Delta t_j$$

Будем считать, что посадка $\{e_h\}$, при решении задачи происходит на три колеса одновременно (аварийный, но один из возможных вариантов), хотя методика, имея в основе шаговую процедуру, не накладывает ограничений на вид посадки, при этом торможение $\{e_h\}$ происходит при усредненном постоянном значении сил F и $Y = 0$ (рис. 3). При движении $\{e_h\}$ по пластине требуем выполнение условий неразрывности перемещений и скоростей $\bar{\mathbf{q}}_{ok} = \bar{\mathbf{q}}_1^o$, $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_K = \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1^o$ и условий равновесия в движущихся узлах (в точках контакта колес с пластиной)

$$\bar{\mathbf{R}}_{ok} + \bar{\mathbf{R}}_* = 0 \quad (3.6)$$

Выделим из (3.4) подсистему уравнений, отвечающих в левой части подвектору $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{1j+1/2}^o$, и выразим далее эту подсистему относительно вектора динамических давлений, представив ее в виде

$$\bar{\mathbf{R}}_{*j+1/2} = \mathbf{W}^o \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{1j+1/2}^o + \mathbf{L}^o \quad (3.7)$$

Подставим в (3.6) векторы $\bar{\mathbf{R}}_{ok}$ и $\bar{\mathbf{R}}_*$, соответственно, из (3.1) и (3.7), в итоге имеем разрешающую систему уравнений на шаге $[t_j, t_{j+1}]$

$$\mathbf{D} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{K\ j+1/2} = \mathbf{D}^o \quad (3.8)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{W}^o, \quad \mathbf{D}^o = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{L}^o,$$

где \mathbf{D} , \mathbf{D}^o – матрица и вектор, характеризующие на шаге $[t_j, t_{j+1}]$ движение самолета по посадочной полосе.

Проследим ход решения всей задачи при $j = 0, 1, 2, \dots$ На шаге $[t_j, t_{j+1}]$ при начальных условиях задачи в момент t_j определяется, применяя (3.8), вектор $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{K\ j+1/2}$, далее, используя (3.4), (3.5) и (2.2), вычисляются поля смещений, давлений, скоростей и ускорений для системы $\{e_h\}$ в момент t_{j+1} . Далее процесс повторяется.

4. Результаты численного моделирования. Шаговая процедура (3.8) реализована для $\{e_h\}$ и пластины с параметрами $\ell = 130$ м, $b = 40$ м, $E_1 = 0.23 \times 10^8$ кН/м², $h = 0.18$ м, $m = 0.36$ т/м², $\sigma_1 = 0.18$, $k^* = 120 \times 10^3$ кН/м³, $n_1 = 240$ и $n_2 = 640$. Для системы $\{e_h\}$ (рис. 3) условно выбраны параметры: $b_1 = 3$ м, $a_1 + d_1 = 7$ м, $h_1 = 2.5$ м, $J_x = 397$ т м², $J_y = 53.5$ т м²,

$m_1 = 0.15$ т, $m_2 = m_3 = 0.25$ т, $m_4 = 22.0$ т, $c_i = 800$ кН/м, $\mu = 6$ кНс/м, $P_1 = 63.6$ кН, $P_2 = P_3 = 71.65$ кН, $\tilde{\alpha} = [9(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2/256r]^{1/3}$, где $\vartheta_i = 4(1 - \sigma_i^2)/E_i$ ($i = 1, 2$), $E_2 = 8.83 \times 10^3$ кН/м², $\sigma_2 = 0.42$, $r = 0.5$ м [6, 22, 23].

Посадка самолета происходит со скоростью $v_o = 63$ м/с, а торможение с ускорением $w = -21$ м/с², при этом время движения $t_{дв} = 3$ с, с использованием тормозных парашютов. Интегрирование системы дифференциальных уравнений (3.8) происходит при $\Delta t_j = 0.00025$ с и числе шагов $N = 12000$. При посадке $\{e_h\}$ считается, что касание носового колеса пластины происходит при нулевой вертикальной скорости на расстоянии $s_o = 17$ м от края пластины, при $x_c = 20$ м (рис. 2). Тормозной путь системы $\{e_h\}$ до остановки составляет 94.5 м. На рис. 4(а, б, в), в режиме торможения $\{e_h\}$, представлены в зависимости от $s[\text{м}] = s_o + v_o t + wt^2/2$, при тестовом соответствии между графиками: 1) вертикальное смещение $y\{e_h\}$ носового (первого) колеса $Y = q_4$ [м] (рис. 4, а), при движении его с отскоком в зоне $s = 50-52$ м; 2) вертикальное смещение плиты $Y = q_1$ [м] (рис. 4, б) под первым колесом; 3) динамическое давление $\{e_h\}$ на плиту под первым колесом $R = R_1$ [кН] (рис. 4, в). Отметим, что при реализации шаговой процедуры $R = R_1 = 0$ в момент отскоков колеса. На рис. 5 представлены, в зависимости от времени t [с] вертикальные смещения узлов корпуса самолета $Y(\text{м}) = q_7$ и $Y(\text{м}) = q_8$ (рис. 3) при его движении с торможением по пластине на упругом основании. Следует отметить, что изменения динамических давлений R_1 и R_2 происходят, соответственно, относительно значений статических давлений P_1 и P_2 колес на пластину.

Остановимся еще на одном этапе исследования колебаний пластин при пробеге летательного аппарата по аэродромной полосе. К этому этапу относятся задачи, связанные с распространением волн деформаций в аэродромном покрытии. При решении волновых задач для протяженных пластин и стержней на упругом основании используются как интегральные преобразования при движении силовой нагрузки [1, 4], так и, для конструктивной конечных размеров, наборы собственных форм сооружения. Применение численных методов позволяет, при этом, отслеживать процесс движения, в частности, сдвиговых волн от внезапной нагрузки, например, для балки Тимошенко на дискретных упруго-инерционных опорах в [24]. В пластинах и стержнях на упругом основании с учетом затуханий распространяются волны с сильной дисперсией [25]. Отметим, что высокоскоростные режимы движения могут вызывать дополнительные эффекты, что требует определенных оценок. Используем комбинированный подход. Для оценки появления резонансных решений приведем решение задачи о движении сосредоточенной силы P по пластине на упругом основании, в виде бесконечной полосы свободно опертой по краям. Решение уравнения (2.1) при правой части $P\delta(x - x_c)\delta(\zeta)$ и $\tilde{\mu}_1 = 0$ ищется в виде $q^*(x, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta) \sin(\omega_n x)$, ($\zeta = y - vt$, $\omega_n = \pi n/b$, $x_c = b/2$). Прогиб $q^*(x, y - vt)$ части бегущей волны у пластины перед силой, при $\zeta = y - vt \geq 0$, имеет вид

$$q^*(x, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha\zeta} P \sin \omega_n x \sin \omega_n x_c}{2Db\beta\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} (\alpha \sin \beta\zeta + \beta \cos \beta\zeta), \quad (4.1)$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{\tilde{b} - \tilde{a}v^2}{2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{\tilde{b} + \tilde{a}v^2}{2}}$, $\tilde{a} = -\frac{\omega_n^2}{v^2} + \frac{m}{2D}$, $\tilde{b} = \sqrt{\omega_n^4 + \frac{k^*}{D}}$, здесь ζ – абсцисса текущего сечения пластины отсчитываемого от подвижного начала координат, совмещенного с движущейся силой P .

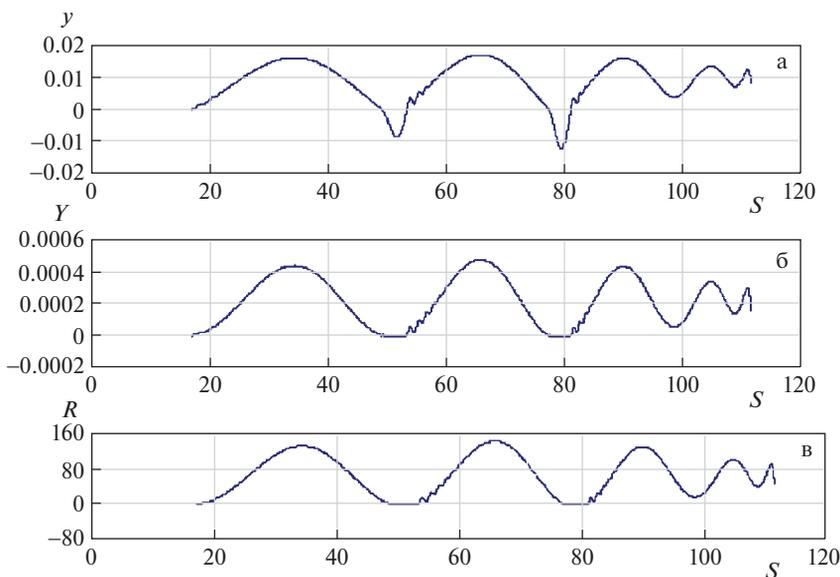


Рис. 4. Перемещения и динамические реакции y колес шасси системы $\{e_h\}$ в момент торможения при посадке.

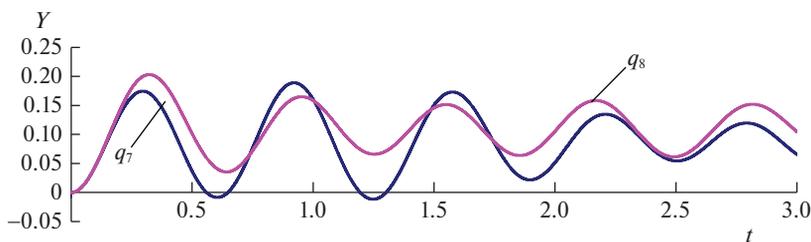


Рис. 5. Перемещения узлов корпуса $\{e_h\}$ в момент торможения при посадке.

В знаменателе (4.1), при $x = x_c$ и $\zeta = 0$, находится выражение $\tilde{b} - \tilde{a}v^2$, определяющее серию критических скоростей движения силы по бесконечной полосе, моделируемой пластиной на упругом винклеровском основании.

В итоге при $n = 1, 3, 5$

$$v_{n, KP} = \sqrt{\frac{2D}{m} \left[\sqrt{\omega_n^4 + \frac{k^*}{D}} + \omega_n^2 \right]} > 62 \text{ м/с} \quad (4.2)$$

Отметим, что в соответствии с (4.2) можно оценить диапазон появления критических скоростей при движении нагрузки в зависимости от параметров плиты и основания. В статье, при выбранных параметрах D , m , k^* , b , посадочная скорость самолета лежит вне зоны появления критических скоростей.

Заключение. Предложенный метод позволяет исследовать, используя шаговую процедуру, предложенную в [10] и метод узловых ускорений из [11], действие подвижной

инерционной нагрузки при движении с переменной скоростью, по пластинам при различных граничных условиях, используя соответствующие фундаментальные функции [5]. В задачах автомобильного и авиационного транспорта метод позволяет исследовать поведение системы “инерционная подвижная нагрузка – техническое покрытие, моделируемое плитой на упругом основании” при различных скоростях движения нагрузки и неровностях поверхности, и определять напряженно-деформируемое состояние пластины и динамические давления колес в режимах торможения или разгона $\{e_h\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fryba L.* Vibration of solids and structures under moving loads. Prague: Academia, 1972. 494 p.
2. *Zheng Lu, Hailin Yao, Yongxiang Zhan, Zhi Hu.* Vibrations of a plate on a two-parameter foundation subjected to moving rectangular loads of varying velocities // JVE Int. LTD. J. Vibroengng. 2014. V. 16. Iss. 3. P. 1543–1554.
3. *Ghafoori E., Kargarnovin M.H., Ghahremani A.R.* Dynamic responses of a rectangular plate under motion of an oscillator using a semi-analytical method // J. Vibr. & Control. 2011. V. 17. № 9. P. 1310–1324.
4. *Блинов А.Н.* Динамическая реакция пластины на действие движущейся нагрузки // Ж. Сиб. фед. унив. Математика и физика. 2009. Т. 2 (1). С. 41–47.
5. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
6. *Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г.* Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 231 с.
7. *Серазутдинов М.И.* Колебания пластины под действием равномерно распределенной нагрузки, движущейся с переменной скоростью // Тр. сем. по теории оболочек. Казан. ФТИ АН СССР. 1975. Вып. 6. С. 163–167.
8. *Inglis C.E.* A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges, Cambridge: Univ. Press, 1934. 203 p.
9. *Моргаевский А.В.* О колебаниях пластины, несущей подвижную нагрузку // Прикл. мех. 1966. Т. 2. Вып. 8. С. 64–74.
10. *Иванченко И.И.* Расчеты на подвижные и импульсивные нагрузки стержневых систем с распределенными параметрами // Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 9. С. 109–118.
11. *Иванченко И.И.* О действии подвижной нагрузки на мосты // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 180–185.
12. *Иванченко И.И.* Метод расчета на подвижную нагрузку стержневых систем, моделирующих мосты // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 4. С. 151–165.
13. *Иванченко И.И.* Метод расчета стержней под действием инерционной нагрузки с переменной скоростью движения // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 5–6. С. 808–816.
14. *Иванченко И.И.* Динамика мостов: высокоскоростные подвижные, аэродинамические и сейсмические нагрузки. М.: Наука, 2021. 527 с.
15. *Museros P., Martinez-Castro A.E., Castillo-Linares A.* Semi-analytic solution for Kirchhoff plates traversed by moving loads // Proc. EURO DYN 2005, Struct. Dyn., Paris. 2005. V. 3. P. 1619–1625.
16. *Bonin G., Cantisani G., Loprencipe G., Ranzo A.* Modeling of dynamic phenomena in road and airport pavements // Conf.: 5th Int. CROW. 2004. 14 p.
17. *Jing Yang, Huajiang Ouyang, Dan Stancioiu.* An approach of solving moving load problems by ABAQUS and MATLAB using numerical modes // ICVE2015, Shanghai (China), Sept. 18–20 2015. 8 p.
18. *Klasztorav M., Sziugott P.* Modeling and Simulation of Bridge–Track–Train Systems at High Service Velocities with LS-DYNA // 12th Int. LS-DYNA, Users Conf. 2012. 13 p.
19. *Bate K., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Наука, 1982. 447 с.
20. *Newmark N.* A method of computation for structural dynamics // J. Eng. Mech. Div. ASCE. 1959. V. 85. № EM3. P. 67–94.
21. *Timoshenko S.* Vibration Problems in Engineering. New York: Van Nostrand Co., 1928. P. 79–81.

22. Шумилов И.С. Математическое моделирование системы торможения колес шасси магистрального самолета // Машины и установки: проектирование, разработка и эксплуатация. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. ж. 2016. № 01. С. 24–42.
23. Балакин В.Л., Лазарев Ю.Н. Динамика полета самолета. Расчет траекторий и летных характеристик: электрон. Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С.П. Королева, 2011. 55 с.
24. Иванченко И.И. Численное моделирование волновых процессов в балке Тимошенко, лежащей на множестве упруго-вязких, инерционных опор // Волновая динамика машин и конструкций. Вторая Всерос. научн. конф., Нижний Новгород, 28–31 октября 2007 г. Тезисы, 42 с.
25. Нелинейные волны / Под ред. Лейбовича С., Сибасса А. М.: Мир, 1977. 320 с.

Method to Calculate Plates under an Inertial Load Moving with Variable Speed

I.I. Ivanchenko^{a,#}

^a Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia

[#]e-mail: ivaii011@mtu-net.ru

The method of calculation of plates at action of inertial loading and its movement with variable speed is offered. Test problems about shock influence and movement with variable speed of a cargo on rectangular, freely supported plate is considered. Nonlinear contact of a cargo to a plate is modelled. The problem about interaction of transport system, at its braking after a landing on the extended plate laying on the elastic basis is considered.

Keywords: variable speed, step-by-step procedures, a method “nodal accelerations”, a plate, mobile inertial loading

REFERENCES

1. Fryba L. Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. Prague: Academia, 1972. 494 p.
2. Zheng Lu, Hailin Yao, Yongxiang Zhan, Zhi Hu. Vibrations of a plate on a two-parameter foundation subjected to moving rectangular loads of varying velocities // JVE Int. LTD. J. Vibroengng., 2014, vol. 16. iss. 3, pp. 1543–1554.
3. Ghafouri E., Kargarnovin M.H., Ghahremani A.R. Dynamic responses of a rectangular plate under motion of an oscillator using a semi-analytical method // J. Vibr. & Control, 2011, vol. 17, no. 9, pp. 1310–1324.
4. Blinov A.N. Dynamic response of plates on the effect of a moving load // J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys., 2009, vol. 2 (1), pp. 41–47.
5. Filippov A.P. Vibration of Deformable. Moscow: Mech. Engng., 1970. 734 p. (in Russian)
6. Kokhmanyuk S.S., Yanyutin E.G., Romanenko L.G. Vibrations of Deformable Systems under Pulse and Moving Loads. Kiev: Nauk. Dumka, 1980. 231 p. (in Russian)
7. Serazutdinov M.I. Vibration of a plate under action of in regular intervals distributed loading moving with variable speed // in: Proc. Sem. under the Theory of Shells. Kazan: Kazan Phys.-Techn. Inst. Akad. Nauk. USSR, 1975. no. 6, pp. 163–167. (in Russian)
8. Inglis C.E. A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges, Cambridge: Univ. Press, 1934. 203 p.
9. Morgaevsky A.V. On vibrations of a plate carrying a moving load // Appl. Mech., 1966, vol. 2, no. 8, pp. 64–74. (in Russian)
10. Ivanchenko I.I. Determining moving and impulsive loads of beam systems with distributed parameters // Int. Appl. Mech., 1988, vol. 24, no. 9, pp. 931–938.
11. Ivanchanko I.I. On the action of a movable load on bridges // Mech. Solids, 1997, vol. 32, no. 6, pp. 153–157.
12. Ivanchenko I. 1. Design of framed structures modeling bridges for moving loads // Mech. Solids, 2001, vol. 36, no. 4, pp. 121–132.
13. Ivanchenko I.I. Method to calculate rods under an inertial load moving with variable speed // Mech. Solids, 2020, vol. 55, pp. 1035–1041.

14. *Ivanchenko I.I.* Bridge Dynamics: High-Speed Moving, Aerodynamic and Seismic Loads. Moscow: Nauka, 2021. 527 p. (in Russian)
15. *Museros P., Martinez-Castro A.E., Castillo-Linares A.* Semi-analytic solution for Kirchhoff plates traversed by moving loads // Proc. EUROODYN 2005, Struct. Dyn., Paris, 2005, vol. 3, pp. 1619–1625.
16. *Bonin G., Cantisani G., Loprencipe G., Ranzo A.* Modeling of dynamic phenomena in road and airport pavements // Conf.: 5th Int. CROW, 2004, 14 p.
17. *Jing Yang, Huajiang Ouyang, Dan Stancioiu.* An approach of solving moving load problems by ABAQUS and MATLAB using numerical modes // ICVE2015, Shanghai (China), Sept. 18–20, 2015, 8 p.
18. *Klasztorav M., Sziugott P.* Modeling and simulation of bridge–track–train systems at high service velocities with LS-DYNA // 12th Int. LS-DYNA, Users Conf., 2012, 13 p.
19. *Bathe K., Wilson E.* Numerical Methods in Finite Element Analysis. Moscow: Stroyizdat, 1982. 447 p. (in Russian)
20. *Newmark N.* A method of computation for structural dynamics // J. Eng. Mech. Div. ASCE, 1959, vol. 85, no. EM3. pp. 67–94.
21. *Timoshenko S.* Vibration Problems in Engineering. N.Y.: Van Nostrand Co., pp. 79–81.
22. *Shumilov I.S.* Math modeling of system of braking of wheels the chassis of the main plane // Machines and Installations: Designing, Development and Operation. Bauman Moscow State Techn. Univ., Electronic J., 2016, no. 1, pp. 24–42. (in Russian)
23. *Balakin V.L., Lazarev Y.N.* Aircraft Flight Dynamics. Calculation of Trajectories and Flight Characteristics. Samara: Samara Korolev Aero-Space Univ., 2011. 55 p. (in Russian)
24. *Ivanchenko I.I.* Numerical modelling of wave processes in beam Тимошенко laying on set of elastic–viscous, inertial support // Wave Dyn. of Mach. & Struct. 2nd All-Russia Sci. Conf., Nizhni Novgorod, October 28–31 2007. Abstracts, 42 p. (in Russian)
25. Nonlinear Waves / Ed. by *Leibovich S., Seebass A.* Moscow: Mir, 1977. 320 p. (in Russian)