

УДК 504.35

**ОБ ОЦЕНКЕ ВКЛАДА ВТОРИЧНЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В ПЕРЕНОС
АЭРОЗОЛЕЙ В АТМОСФЕРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ****© 2022 г. М. А. Давыдова^{1,*}, О. Г. Чхетиани^{2,**},
Н. Т. Левашова^{1,***}, А. Л. Нечаева^{1,****}**¹ *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*² *Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва, Россия***e-mail: m.davydova@physics.msu.ru****e-mail: ochkheti@ifaran.ru*****e-mail: levashovant@physics.msu.ru******e-mail: nechaeva.al15@physics.msu.ru*

Поступила в редакцию 30.05.2022 г.

После доработки 20.07.2022 г.

Принята к публикации 20.07.2022 г.

В настоящей работе рассматриваются два обоснованных подхода к задаче численного моделирования распределения концентрации мелкодисперсного аэрозоля в спиралевидных вихревых структурах (роллах) в атмосферном пограничном слое с целью оценивания вклада вихревых структур в перенос аэрозолей через пограничный слой. С использованием методов теории возмущений получено приближенное решение стационарной пространственно-периодической сингулярно возмущенной задачи типа реакция–диффузия–адвекция, моделирующей распределение аэрозоля в вихрях, оценен остаточный член и предложен метод численного решения задачи нулевого приближения. В качестве альтернативного подхода к задаче численного моделирования поля концентраций аэрозоля в роллах рассмотрена реализация метода эволюционной факторизации. С использованием модельных данных получена оценка количества аэрозоля, переносимого вихревыми структурами.

Ключевые слова: атмосферный пограничный слой, мезомасштабная циркуляция, транспорт аэрозоля, сингулярные возмущения, асимптотические методы и их приложения, задачи типа реакция–диффузия–адвекция, математическое моделирование полей концентраций малых примесей в атмосферном пограничном слое

DOI: 10.31857/S0032823522050071

1. Введение. Во второй половине XX века было обнаружено, что большая часть турбулентного атмосферного пограничного слоя (АПС) занята роллами – упорядоченными спиралевидными вихрями (валами) с горизонтальной осью, по направлению близкой к среднему направлению геострофического ветра (см., например, [1]). На спутниковых снимках пограничного слоя роллы выглядят, как “облачные улицы” – вытянувшиеся на сотни километров параллельные ряды с периодом в несколько километров, сохраняющиеся в течение нескольких суток. Облака в таком случае формируются в области восходящих движений между роллами при соответствующих термодинамических условиях (см. рис. 1). Возникновение роллов, как правило, является следствием развития гидродинамических неустойчивостей в АПС [1, 2], в том числе и конвективной неустойчивости при умеренных ветрах (2–3.5 м/с), развивающейся как в умеренных и южных широтах, так и в высоких при холодных вторжениях [3–7].



Рис. 1. Роллы над Каспийским морем, 6 октября 2019 г.

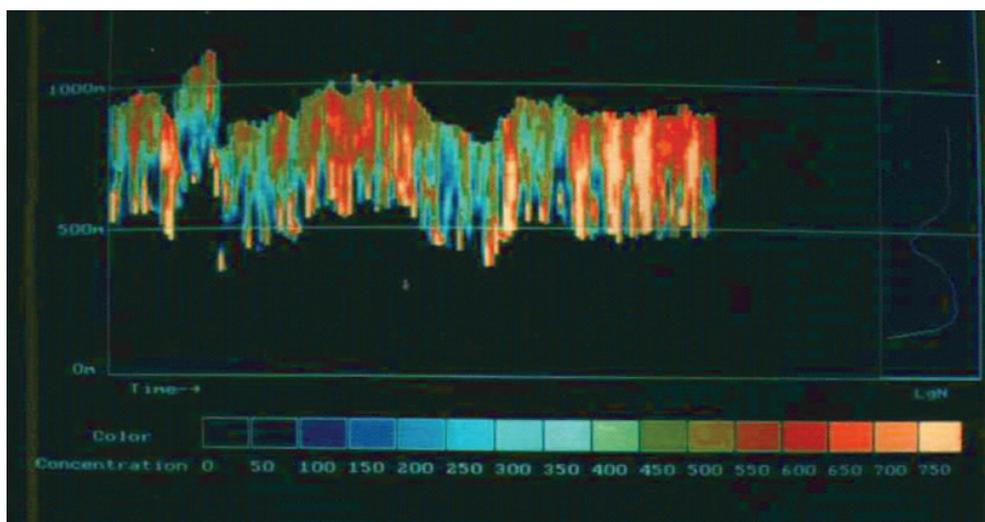


Рис. 2. Пространственная структура распределения аэрозолей в пограничном слое атмосферы—лидарные измерения коэффициента обратного рассеяния с самолета на высоте 1 км, Калмыкия.

В безоблачных условиях спиралевидные вихри также хорошо наблюдаются средствами дистанционного зондирования в других диапазонах волн [3, 4, 8, 9]. На рис. 2 представлено пространственно-периодическое распределение аэрозоля (мелкая фракция), зафиксированное с помощью лидарных измерений коэффициента обратного рассеяния на пыли в пустынях Калмыкии [10], где из-за низкой влажности образование облачности в области локализации вихревых структур не происходит. Пространственный масштаб квазипериодичности зафиксированных аэрозольных слоев составляет 2–5 км, что характерно для валиковой циркуляции, высота роллов — не более 2 км [11]. Периодичность в распределении аэрозоля отмечается на всех высотах лидарного зондирования — от 300 м до 1000 м.

Согласно оценкам, вклад мезомасштабных роллов в тепломассоперенос через АПС составляет от 20 до 60%, причем вклад в вертикальный перенос в высоких широтах превалирует над турбулентным [6, 7, 12]. Роллы играют важную роль в индуцировании формирования новых частиц и, соответственно, образования ядер облачной конденсации [13]. В океаническом пограничном слое наблюдаются схожие движения (ленгмюровская циркуляция) [14]. Совокупность этих факторов и того, что оценки мощно-

сти антропогенных выбросов аэрозолей в атмосферу составляют порядка 10^7 – 10^8 т. в год [15, 16], делают задачу моделирования распределений концентраций мелкодисперсных аэрозолей в роллах существенной для моделирования процессов переноса и химической трансформации антропогенных примесей в АПС в целом.

Особый интерес представляет задача переноса аэрозолей в случае, когда тяжелый аэрозоль вступает в реакцию с внешней средой или распадается. Распространяясь в атмосфере, он диффундирует и под действием силы тяжести опускается на землю с постоянной скоростью, которая предвычисляется из задачи Стокса [17, 18].

В настоящей работе предлагаются два обоснованных метода расчета полей концентраций мелкодисперсных аэрозолей в вихревых структурах, использующих результаты моделирования поля скоростей в вихрях [19]. На основе методов теории возмущений [20] получено приближенное решение стационарной пространственно-периодической сингулярно возмущенной задачи реакция–диффузия–адвекция, моделирующей распределений аэрозоля, оценен остаточный член и предложен метод численного решения задачи нулевого приближения. В качестве альтернативного подхода к задаче численного моделирования поля концентраций рассмотрена реализация метода эволюционной факторизации, на основе которого исследован вопрос о влиянии величин скоростей распада и оседания аэрозоля на распределение концентрации этой примеси в роллах. Использование этих двух подходов строго обосновано с привлечением методов и результатов [20–23]. Таким образом, описано единственное устойчивое стационарное состояние системы путем описания распределения концентрации аэрозоля, отвечающего этому состоянию. С использованием модельных данных получена оценка количества переносимого аэрозоля.

В заключение этого параграфа отметим другие примеры эффективного использования методов асимптотического анализа при решении прямых и обратных задачах атмосферной диффузии малых примесей [24–26], связанных с получением оценок эмиссий локальных и распределенных источников загрязняющих примесей и параметров турбулентной диффузии для устойчивого или нейтрального АПС, а также при решении обратных задач по восстановлению параметров моделей реакция–диффузия–адвекция других приложений [27–32].

2. Постановка задачи. Изменение концентрации $C(x_1, x_2, x_3, t)$ аэрозоля при миграции через АПС описывается уравнением типа реакция–диффузия–адвекция [17]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \langle k \rangle \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k_3(x) \frac{\partial C}{\partial x_3} \right) - \sum_{i=1}^2 u_i(x) \frac{\partial C}{\partial x_i} - (u_3(x) - v_g) \frac{\partial C}{\partial x_3} + F(C, x) \quad (2.1)$$

$$x \in \mathbb{R}^2 \times (a, b), \quad t > 0,$$

где $\langle k \rangle$ – среднее значение горизонтального коэффициента турбулентной диффузии, $k_3(x)$ – вертикальный коэффициент турбулентной диффузии [17], $u_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$ – составляющие средней скорости переноса примеси вдоль соответствующих осей, v_g – абсолютная величина скорости оседания частиц примеси, $F(C, x)$ – мощность стока вещества.

В качестве масштабов длины, скорости и времени выберем толщину экмановского слоя $L = (K/f)^{1/2} \sim 1000$ м, скорость геострофического ветра $G \sim 10$ м/с [2] и $1/f$, где $f = \Omega \sin \theta$, Ω – угловая скорость вращения Земли, θ – широта, K – характерная вертикальная турбулентная вязкость (подробнее см. [1, 2, 33, 34]). Поскольку характерные горизонтальные масштабы развивающихся структур кратны высоте экмановского слоя, то в качестве характерного пространственного масштаба по трем измерениям используется высота слоя Экмана (см., например, [2, 11, 19]).

Заметим, что детальный анализ данных позволяет говорить о сосуществовании в АПС наряду со структурами, горизонтальный масштаб λ которых в несколько раз пре-

восходит вертикальный h , где $\lambda/h \geq 2$, структур, вертикальный масштаб которых равен и меньше горизонтального $\lambda/h \leq 1$ [6, 35].

Определим безразмерные переменные посредством соотношений: $x' = \frac{x}{L}$, $t' = \frac{t}{T}$, $C' = \frac{C}{\tilde{C}}$, где T – характерное время существования валиковых структур (несколько суток), \tilde{C} – характерная концентрация, например, фоновое значение концентрации (или ее среднее на некоторой высоте). Тогда в безразмерных переменных уравнение (2.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{L}{TG} \frac{\partial C'}{\partial t'} = & \frac{\langle k \rangle}{LG} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 C'}{\partial x_i'^2} + \frac{k_3(x)}{LG} \frac{\partial^2 C'}{\partial x_3'^2} - \sum_{i=1}^2 \frac{u_i(x)}{G} \frac{\partial C'}{\partial x_i'} + \\ & + \left(\frac{1}{G} \frac{\partial k_3}{\partial x_3} - \frac{u_3(x) - v_g}{G} \right) \frac{\partial C'}{\partial x_3'} + \frac{F(C, x)L}{G\tilde{C}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Согласно [18] на высоте более 100 м над поверхностью Земли изменчивостью коэффициента обмена можно пренебречь. Следовательно

$$\frac{k_3(x)}{LG} \approx \frac{\langle k \rangle}{LG} = (\text{Pr}_D \text{Re})^{-1} \sim 10^{-3},$$

где Pr_D – турбулентное диффузионное число Прандтля, Re – число Рейнольдса. В левой части уравнения (2.2) при производной от концентрации по времени в качестве множителя содержится отношение характерного временного масштаба LG^{-1} к характерному времени существования валиковых структур. Этот масштаб соответствует времени установления экмановского профиля при изменении внешних условий (напр., при изменении направления и скорости ветра), а также характерному времени развития субмезомасштабных структур вследствие сдвиговых неустойчивостей [36], обеспечивающих основной первичный вынос аэрозоля с поверхности. Поскольку $T \gg LG^{-1}$, то влиянием нестационарности можно пренебречь и рассматривать процесс как стационарный. Сохранив прежние обозначения для безразмерных концентраций, скорости переноса и оседания примеси приходим к уравнению в безразмерных переменных:

$$(\text{Pr}_D \text{Re})^{-1} \Delta C - (\mathbf{u}(x), \nabla C) + v_g \frac{\partial C}{\partial x_3} + \frac{F(C, x)L}{G\tilde{C}} = 0 \quad (2.3)$$

Заметим, что валиковыми структурами переносятся в основном мелкодисперсные аэрозоли, для которых скорость оседания ~ 1 см/с [34]. В таком случае безразмерная скорость оседания $v_g \sim 10^{-3}$.

Пусть в уравнении (2.1) $F(C, x) = -\gamma(C - \tilde{C})$, где $\gamma > 0$ – скорость распада аэрозоля (величина, обратно пропорциональная времени жизни примеси), а слагаемое $F(C, x)$ описывает распад вещества за счет столкновения частиц при миграции аэрозоля. Тогда уравнение (2.3) примет следующий вид:

$$(\text{Pr}_D \text{Re})^{-1} \Delta C - (\bar{\mathbf{u}}(x), \nabla C) - \gamma(C - 1) = 0, \quad (2.4)$$

где под обозначением $\bar{\mathbf{u}}(x)$ понимается вектор с компонентами $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x) - v_g$, v_g и $\gamma := \gamma LG^{-1}$ – безразмерные параметры модели.

Поскольку поле скоростей $\bar{\mathbf{u}}(x)$ в уравнении (2.4) предполагается гладким, то решение краевой задачи для уравнения в ограниченной области с гладкой границей, включающей в себя гряду роллов, и граничным условием смешанного типа [17], которое соответствует заданию концентрации или нулевого потока вещества на различных частях границы, существует и единственно [21, 22], а также глобально устойчиво по Ляпунову [23] как стационарное решение соответствующей начально-краевой задачи для уравнения:

$$\frac{L}{TG} \frac{\partial C}{\partial t} = (\text{Pr}_D \text{Re})^{-1} \Delta C - (\bar{\mathbf{u}}(x), \nabla C) - \gamma(C - 1), \quad (2.5)$$

где $L(TG)^{-1} \sim (\text{Pr}_D \text{Re})^{-1}$. Эти свойства стационарного решения ниже будут использованы для обоснования численного алгоритма расчета распределения концентрации аэрозоля в вихревых структурах.

С целью выбора рациональных средств численного моделирования распределения аэрозоля внутри вихревых структур, перейдем к эквивалентной (в области локализации вихревых структур) пространственно-периодической задаче для уравнения (2.4) в полосе:

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta C - (\bar{\mathbf{u}}(x), \nabla C) - \gamma(C - 1) &= 0; & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, & \quad x_3 \in (a, b) \\ C(x_1 + L_1, x_2, x_3) &= C(x_1, x_2, x_3); & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, & \quad x_3 \in [a, b] \\ C(x_1, x_2 + L_2, x_3) &= C(x_1, x_2, x_3); & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, & \quad x_3 \in [a, b] \\ C|_{x_3=a} &= C^a(x_1, x_2), & (\nabla C, \mathbf{n})|_{x_3=b} &= 0; & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\varepsilon := (\text{Pr}_D \text{Re})^{-1} \sim 10^{-3} > 0$ – малый параметр, L_1, L_2, a, b – некоторые положительные числа (параметры расчетной области), функции $u_i(x) = u_i(x_2, x_3)$, $i = \overline{1, 3}$ – L_2 -периодические по переменной x_2 , непрерывно дифференцируемые в области $\mathbb{R}^1 \times [a, b]$, $C^a(x_1, x_2)$ – непрерывно дифференцируемая L_1 -периодическая по переменной x_1 и L_2 -периодическая по переменной x_2 функция, \mathbf{n} – внутренняя нормаль к границе $x_3 = b$. Ось x_1 ориентирована по оси симметрии вихревых структур.

3. Численное моделирование распределения концентрации аэрозоля. Существуют разные возможности (в смысле выбора средств) в моделировании распределения аэрозоля внутри вихревых структур. Рассмотрим два возможных подхода к решению этой задачи.

Алгоритм построения численного решения задачи (2.6) основан на использовании свойства единственности и глобальной устойчивости решения этой задачи как стационарного решения соответствующей начально-краевой задачи для уравнения (2.5) и реализуется путем стационарирования решения задачи для уравнения (2.5) к решению задачи (2.6). В свою очередь, численное решение задачи для уравнения (2.5) выполняется с использованием метода эволюционной факторизации [37] в расчетной области, представляющей собой прямоугольный параллелепипед $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3): 0 \leq x_1, x_2 \leq 49, 0.3 \leq x_3 \leq 12\}$, в котором введена равномерная сетка, состоящая из $N_1 \times N_2 \times N_3$ узлов. Безразмерный шаг сетки соответствует пространственному расстоянию в 0.1 км. Пространственные шаги сетки одинаковы по каждому из трех направлений: $h_x = h_y = h_z = 0.1$ (в безразмерных переменных). Безразмерный шаг по времени выбирается равным $\tau = 0.01$. Точность метода эволюционной факторизации при таком выборе пространственного и временного шага составляет $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$ [37]. Поэтому численные расчеты проводились с точностью 0.01. По вертикали расчетная область начинается с уровня $x_3 = 0.3$, поскольку вынос аэрозоля возникает на субмезомасштабных

движениях, которые “не разрешимы” в используемом приближении. К структурам, обеспечивающим такое движение относятся, например, спонтанные вихри с вертикальной осью – пыльные дьяволы и термики. Они тянут частицы аэрозоля вверх.

В ходе реализации метода эволюционной факторизации трехмерный оператор Лапласа заменяется на произведение трех одномерных, что позволяет решить уравнение в три этапа, на каждом из которых решение уравнения сводится к решению $N_i \times N_j$, $i, j = 1, 2, 3$ обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки. Метод прогонки реализуется в соответствии с алгоритмом из работы [38].

На рис. 3–4 а)–в) представлены компоненты u_1 , u_2 , u_3 вектора скорости переноса [33], рассчитанные при условиях нейтральной стратификации для достаточно характерных для АПС значениях $Re = 200$, угле поворота по отношению к геострофическому ветру 15° . На рис. 3–4 г)–е) представлены результаты по расчету безразмерной концентрации $C(x)$, полученные при численном решении задачи (2.6) при различных значениях безразмерных параметров v_g , γ и $\varepsilon = 0.004$ (в сечении вертикальной плоскостью). Рисунки 3–4 ж) или з) – разности безразмерных концентраций, которые представлены распределениям γ (уменьшаемое) и δ (вычитаемое) или δ (уменьшаемое) и ε (вычитаемое). Расчеты выполнены при различных граничных значениях концентрации C^a , равных 10 и 100.

Отметим, что согласно использованным данным [33] на верхней границе $x_3 = 12$ (в безразмерных единицах) величина компоненты скорости u_3 равна нулю, а рассчитанная концентрация постоянна и совпадает с фоновой. В связи с этим на рисунках представлены только те области изменения соответствующих физических величин, на которых наблюдаются распределения, отличные от постоянных.

В работах [13, 34] показано, что значительное количество аэрозоля попадает в приосевую область вихрей. Согласно численным расчетам, представленным на рис. 3, 4, распределение концентрации аэрозоля имеет пространственно-периодическую структуру (что соответствует данным наблюдений [10]), согласованную с периодической структурой поля скоростей [19, 33]. Основная масса увлекаемого вихрями аэрозоля удерживается ими и переносится в горизонтальной плоскости. Смещение области локализации вещества к нижней границе (по сравнению с результатами моделирования [13, 34]) связано с учетом распада и оседания вещества в модели (2.6). Учет процесса оседания аэрозоля приводит к незначительным изменениям в распределении концентрации этой примеси, не превышающим 1% от граничного значения C^a (по данным моделирования), причем наибольшее отличие величин концентраций при $v_g = 0$ и $v_g = 0.001$ приходится на области с наибольшими значениями компонент скорости переноса u_2 и u_3 , которые определяют структуру распределения примеси по вертикали (см. рис. 3 б), в), ж) и рис. 4 б), в), ж)). На эти же области приходится наибольшее отличие величин концентраций при различных скоростях распада: $\gamma = 0.1$ и $\gamma = 1$ (см. рис. 3 д), е), з) и рис. 4 д), е), з)). Покажем, что при таком выборе параметров модели (2.6) процессы распада и переноса аэрозоля преобладают над диффузией и определяют структуру поля концентраций аэрозоля в вихрях.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\begin{aligned}
 (\bar{\mathbf{u}}(x), \nabla \bar{C}_0) + \gamma(\bar{C}_0 - 1) &= 0; \quad x \in \mathbb{R}^2 \times (a, b) \\
 \bar{C}_0(x_1, x_2, x_3) &= \bar{C}_0(x_1 + L_1, x_2, x_3); \quad x \in \mathbb{R}^2 \times [a, b] \\
 \bar{C}_0(x_1, x_2, x_3) &= \bar{C}_0(x_1, x_2 + L_2, x_3); \quad x \in \mathbb{R}^2 \times [a, b] \\
 \bar{C}_0(x_1, x_2, a) &= C^a(x_1, x_2); \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

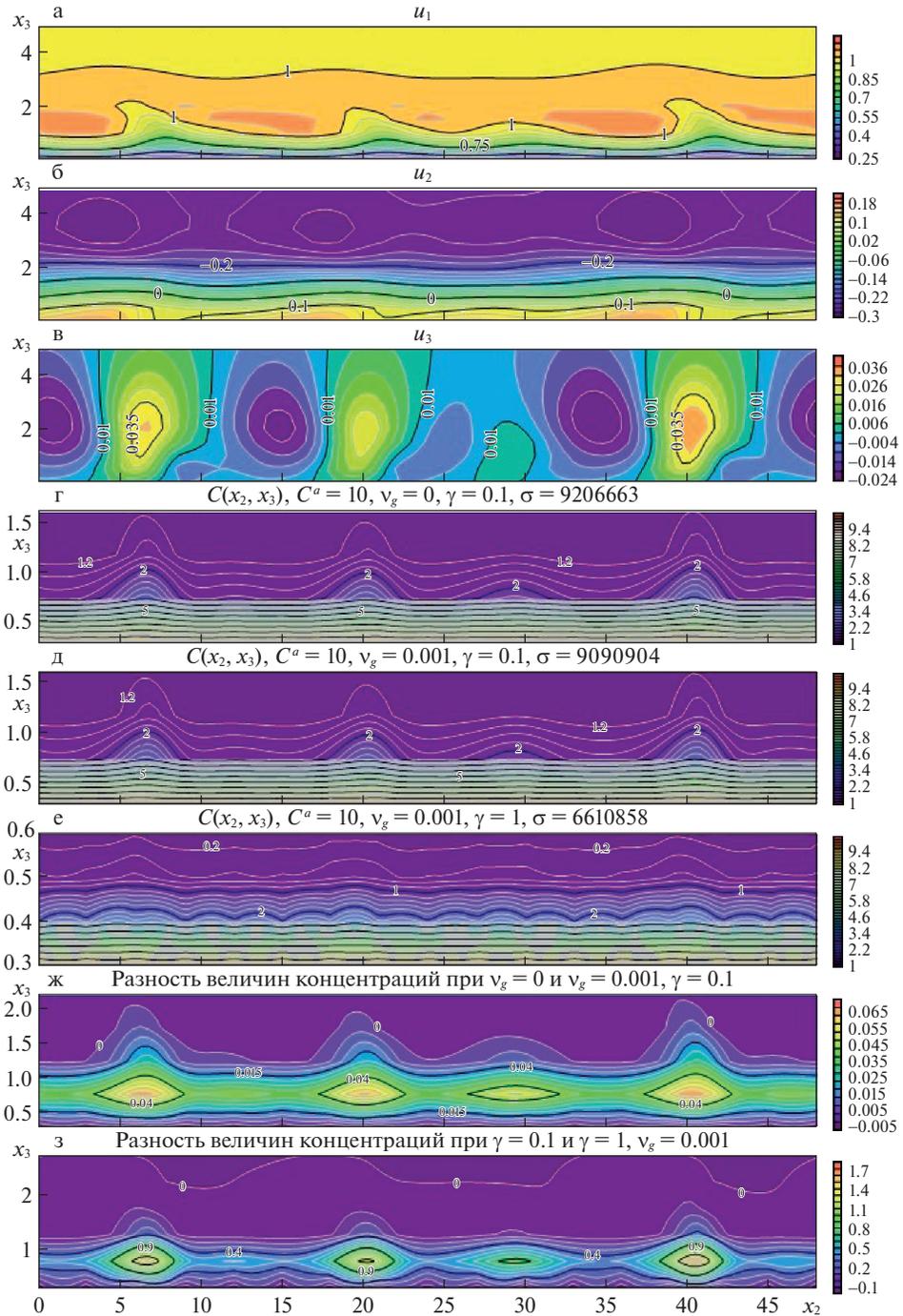


Рис. 3. Результаты расчетов при граничном условии $C^a = 10, a = 0, 3$: а–в) – компоненты скорости переноса; г–е) – поле концентраций при различных значениях v_g, γ в случае $\epsilon = 0.004$; ж) разность концентраций, г) (уменьшаемое) и д) (вычитаемое), з) разность концентраций, д) (уменьшаемое) и е) (вычитаемое).

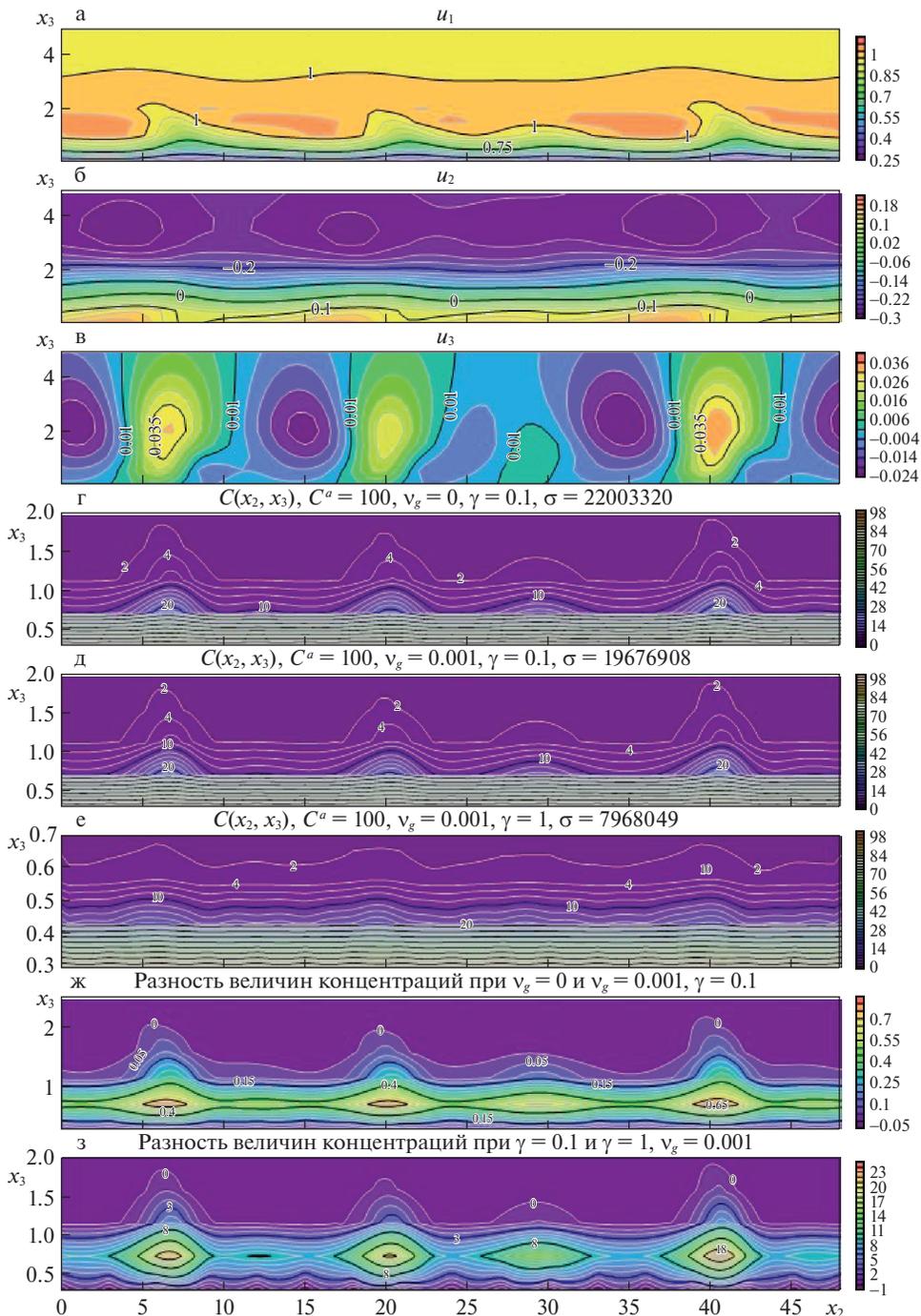


Рис. 4. Результаты расчетов при граничном условии $C^a = 100, a = 0, 3$: а–в) – компоненты скорости переноса; г–е) – поле концентраций при различных значениях v_g, γ в случае $\varepsilon = 0.004$; ж) разность концентраций г) (уменьшаемое) и д) (вычитаемое), з) разность концентраций д) (уменьшаемое) и е) (вычитаемое).

которая получается из задачи (2.6) при $\varepsilon = 0$ без учета условия на верхней границе при $x_3 = b$. Задача (3.1) разрешима единственным образом в классе функций $C^1(\mathbb{R}^2 \times (a, b)) \cap C(\mathbb{R}^2 \times [a, b])$, так как одна из горизонтальных компонент скорости переноса всегда отлична от нуля [39, с. 46]. Заметим, что две другие компоненты скорости переноса могут обращаться в нуль. Получим оценку точности приближенного решения $\hat{C}(x, \varepsilon) = \bar{C}_0(x)$ задачи (2.6) при $\gamma = 1$, используя метод верхних и нижних решений (см., например, [20]).

Определение. Упорядоченная пара L_1 -периодических по переменной x_1 и L_2 -периодических по переменной x_2 функций $\beta(x, \varepsilon), \alpha(x, \varepsilon) \in C^1(\mathbb{R}^2 \times [a, b]) \cap C^2(\mathbb{R}^2 \times (a, b))$ называется соответственно верхним и нижним решениями задачи (2.6), если при $0 < \varepsilon \ll 1$ выполняются следующие дифференциальные неравенства:

- 1) $\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon); \quad x \in \mathbb{R}^2 \times [a, b]$
- 2) $L_\varepsilon[\beta] := \varepsilon \Delta \beta - (\bar{\mathbf{u}}(x), \nabla \beta) - \gamma(\beta - 1) \leq 0 \leq L_\varepsilon[\alpha]; \quad x \in \mathbb{R}^2 \times (a, b)$
- 3) $\alpha(x_1, x_2, a, \varepsilon) \leq C^a(x_1, x_2) \leq \beta(x_1, x_2, a, \varepsilon)$
 $(\nabla \beta, \mathbf{n})|_{x_3=b} \leq 0 \leq (\nabla \alpha, \mathbf{n})|_{x_3=b}; \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Известно, что если существуют верхнее и нижнее решения задачи (2.6), то решение $C(x, \varepsilon)$ этой задачи заключено между верхним и нижним решениями (см. напр., [20]):

$$\alpha(x, \varepsilon) \leq C(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon); \quad x \in \mathbb{R}^2 \times [a, b] \tag{3.2}$$

Верхнее и нижнее решения задачи (2.6) получим путем модификации приближенного решения $\hat{C}(x, \varepsilon)$ определенным образом:

$$\begin{aligned} \beta(x, \varepsilon) &= \bar{C}_0(x) + \delta + \varepsilon B \exp(\xi) \\ \alpha(x, \varepsilon) &= \bar{C}_0(x) - \delta - \varepsilon B \exp(\xi); \quad x \in \mathbb{R}^2 \times [a, b], \quad \xi \leq 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\bar{C}_0(x)$ – решение задачи (3.1), $\varepsilon = 0.004$, $\delta = 2 \times 10^{-2}$, $B = 10^{-2}$, $\xi = (x_3 - b) / \varepsilon$.

Лемма. Функции $\beta(x, \varepsilon), \alpha(x, \varepsilon)$, определяемые равенствами (3.3), являются верхним и нижним решениями задачи (2.6).

Для доказательства леммы достаточно проверить выполнение неравенств 1)–3). Подставляя функции (3.3) в неравенства 1)–2), имеем:

$$\begin{aligned} \beta(x, \varepsilon) - \alpha(x, \varepsilon) &= 2(\delta + \varepsilon B \exp(\xi)) > 0 \\ L_\varepsilon[\beta] &= -\gamma\delta + B e^\xi + O(\varepsilon) = (-2 + e^\xi) \times 10^{-2} + O(\varepsilon) < 0 \\ L_\varepsilon[\alpha] &= \gamma\delta - B e^\xi + O(\varepsilon) = (2 - e^\xi) \times 10^{-2} + O(\varepsilon) > 0 \end{aligned}$$

При $x_3 = a$ и $x_3 = b$ имеем неравенства:

$$\begin{aligned} \alpha|_{x_3=a} &= C^a(x_1, x_2) - \delta < C^a(x_1, x_2) < C^a(x_1, x_2) + \delta = \beta|_{x_3=a} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x_3}|_{x_3=b} &= \frac{\partial \bar{C}_0}{\partial x_3}|_{x_3=b} + B \geq 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_3}|_{x_3=b} = \frac{\partial \bar{C}_0}{\partial x_3}|_{x_3=b} - B \leq 0, \end{aligned}$$

выполнение которых обеспечивается за счет соответствующего выбора параметра модели b . Лемма доказана. Итак, имеет место двойное неравенство (3.2).

Получим оценку остаточного члена. Поскольку $\beta(x, \varepsilon) - \alpha(x, \varepsilon) = O(\mu)$ и $\beta(x, \varepsilon) - \bar{C}_0(x) = O(\mu)$, где $\mu \sim 10^{-2}$, то в силу неравенства треугольника:

$$\|C(x, \varepsilon) - \bar{C}_0(x)\| \leq \|C(x, \varepsilon) - \beta(x, \varepsilon)\| + \|\beta(x, \varepsilon) - \bar{C}_0(x)\| = O(\mu) \quad (3.4)$$

в равномерной норме.

Теорема. Существует единственное классическое решение $C(x, \varepsilon)$ задачи (2.6), удовлетворяющее при $\gamma = 1$ оценке (3.4), где $\bar{C}_0(x)$ – решение задачи (3.1).

Заметим, что в случае $\gamma = 0.1$ справедлива аналогичная теорема с оценкой (3.4), в которой $\mu \sim 10^{-1}$. Доказательство теоремы легко получить, если положить $\delta = 2 \times 10^{-1}$.

Таким образом, в качестве модельной задачи может быть использована задача (3.1), причем допущенная при этом ошибка в решении определяется неравенством (3.4). Для численного решения задачи (3.1) можно использовать метод конечных элементов [40], реализуемый в FEniCS Project (вычислительная платформа с открытым исходным кодом (LGPLv3) для решения уравнений в частных производных) через API для Python, дающий результат вычислений близкий (в соответствии с теоремой) к результату, представленному на рис. 3, 4.

4. Обсуждение результатов. Оценка количества переносимого аэрозоля. Из общих теорем теории линейных уравнений 2-го порядка в частных производных [21–23] следует, что состояние системы, которому соответствует стационарное распределение концентрации аэрозоля, изменившись по причине внешнего возмущения, возвращается в исходное стационарное состояние в силу устойчивости и единственности стационарного решения, описывающего это состояние. Таким образом, стационарное распределение концентрации аэрозоля отвечает наиболее вероятному состоянию этой системы.

В результате численного моделирования установлено, что поле концентрации аэрозоля в вихревых структурах имеет пространственно-периодическую структуру, согласованную с периодическим изменением поля скоростей [19, 33], что также согласуется с данными наблюдений [10]. Учет распада и оседания аэрозоля приводит к смещению области локализации вещества по вертикали в направлении нижней границы расчетной области (по сравнению с данными моделирования [13, 34]).

Количество вещества Q , переносимое через сечение $S \approx (50 \times 4)$ км² за 1 мин определяется формулой (в размерных переменных):

$$Q \approx \tilde{C}L^3 m_0 \iint_{S'} dx_2 dx_3 \int_0^1 C(x) dx_1,$$

где m_0 – масса молекулы аэрозоля, S' – прямоугольная область: $(x_2, x_3) \in [0, 45] \times [0.3, 4]$.

В разд. 3 на рис. 3, 4 приведены вычисленные значения интеграла

$$\sigma := \iint_{S'} dx_2 dx_3 \int_0^1 C(x) dx_1$$

для поля скоростей [19, 33] и различных значений параметров модели (2.6).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10080 и Фонда развития теоретической физики и математики “Базис” в рамках гранта № 19-2-6-178-1.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. В.Ф. Бутузову за внимание к работе и полезные рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lilly D.K. On the stability of Ekman boundary flow // J. Atmos. Sci. 1966. V. 23. № 5. P. 481–494.
2. Пономарев В.М., Хапаев А.А., Чхетиани О.Г. Роль спиральности в формировании вторичных структур в экмановском пограничном слое // Изв. РАН. ФАО. 2003. Т. 39. № 4. С. 435–444.
3. Thompson T.W., Liu W.T., Weissman D.E. Synthetic aperture radar observation of the ocean roughness from rolls in an unstable marine boundary layer // J. Geophys. Res. 1983. V. 10. P. 172–175.
4. Mourad P.D., Walter B.A. SAR streaks vs cold streets: viewing a cold air outbreak using satellite-based SAR and AVHRR imagery // J. Geophys. Res. 1996. V. 101. P. 16391–16400.
5. Atkinson B.W., Wu Zhang J. Mesoscale shallow convection in the atmosphere // Rev. Geophys. 1996. V. 34. № 4. P. 403–431.
6. Brummer B. Structure, dynamics and energetics of boundary layer from Kontur aircraft observations // Beitr. Phys. Atmos. 1985. V. 58. P. 237–254.
7. Chou S.-H., Ferguson M.P. Heat fluxes and roll circulation over the western gulf stream during an intense cold-air outbreak // Bound. Lay. Meteor. 1991. V. 55. № 3. P. 255–281.
8. Gerling T.W. Structure of the surface wind fields from Seasat SAR // J. Geophys. Res. 1986. V. 91. P. 2308–2320.
9. Alpers W., Brummer B. Atmospheric boundary layer rolls observed by the synthetic aperture radar aboard the ERS-1 satellite // J. Geophys. Res. 1994. V. 99. P. 12613–12621.
10. Golitsyn G.S., Granberg I.G., Andronova A.V., Ponomarev V.M., Zilitinkevich S.S., Smirnov V.V., Yablokov M.Yu. Investigation of boundary layer fine structure in arid regions: injection of fine dust into the atmosphere // Water, Air&Soil Pollut.: Focus 3. 2003. P. 245–257.
11. Вазаева Н.В., Чхетиани О.Г., Шестакова Л.В., Максименков Л.О. Нелинейное развитие структур в экмановском слое // Вычисл. мех. сплошн. сред. 2017. Т. 10. № 2. С. 197–211.
12. LeMone M.A. The structure and dynamics of horizontal roll vortices in the planetary boundary layer // J. Atmos. Sci. 1973. V. 30. P. 1077–1091.
13. Lampilahti J., Manninen H.E., Leino K. et al. Roll vortices induce new particle formation bursts in the planetary boundary layer // Atmos. Chem. Phys. 2020. V. 20. № 20. P. 11841–11854.
14. Zedel L., Farmer D.M. Organised structures in subsurface bubble clouds: Langmuir circulation in the open ocean // J. Geophys. Res. 1991. V. 96. P. 8889–8900.
15. Ивлев Л.С., Довгалюк Ю.А. Физика атмосферных аэрозольных систем. СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. 194 с.
16. Joint MSC-W&CCC&CEIP Rep. Transboundary particulate matter, photo-oxidants, acidifying and eutrophying components. https://emep.int/publ/reports/2019/EMEP_Status_Report_I_2019.pdf
17. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
18. Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. Гидрометеоздат, 1985. 272 с.
19. Пономарев В.М., Чхетиани О.Г., Шестакова Л.В. Нелинейная динамика крупномасштабных вихревых структур в турбулентном экмановском слое // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 2. С. 81–91.
20. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифф. уравн. 1995. Т. 31. № 4. С. 719–722.
21. Ладыженская О.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
22. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 256 с.
23. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.
24. Давыдова М.А., Еланский Н.Ф., Захарова С.А., Постыляков О.В. Применение численно-асимптотического подхода в задаче восстановления параметров локального стационарного источника антропогенного загрязнения // Докл. РАН. 2021. Т. 496. С. 34–39.
25. Zakharova S.A., Davydova M.A., Lukanenko D.V. Use of asymptotic analysis for solving the inverse problem of source parameters determination of nitrogen oxide emission in the atmosphere // Inverse Problems in Sci.&Engng. 2021. V. 29. № 3. P. 365–377.
26. Давыдова М.А., Еланский Н.Ф., Захарова С.А. О новом подходе к задаче восстановления вертикального коэффициента турбулентной диффузии в пограничном слое атмосферы // Докл. РАН. 2020. Т. 490. № 2. С. 51–56.

27. Davydova M.A., Zakharova S.A. Multidimensional thermal structures in the singularly perturbed stationary models of heat and mass transfer with a nonlinear thermal diffusion coefficient // *J. Comput.&Appl. Math.* 2022. V. 400. P. 113731.
28. Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., Shishlenin M.A. Solving coefficient inverse problems for nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front // *Commun. in Nonlin. Sci.&Numer. Simul.* 2021. V. 99. P. 105824.
29. Argun R., Gorbachev A., Levashova N., Lukyanenko D. Inverse problem for an equation of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front: features of the solution in the case of a nonlinear integral equation in a reduced statement // *Mathematics.* 2021. V. 9. № 18. P. 2342.
30. Lukyanenko D., Yeleskina T., Prigorniy I., Isaev T., Borzunov A., Shishlenin M. Inverse problem of recovering the initial condition for a nonlinear equation of the reaction–diffusion–advection type by data given on the position of a reaction front with a time delay // *Mathematics.* 2021. V. 9. № 4. P. 342.
31. Levashova N., Gorbachev A., Argun R., Lukyanenko D. The problem of the non-uniqueness of the solution to the inverse problem of recovering the symmetric states of a bistable medium with data on the position of an autowave front // *Symmetry.* 2021. V. 13. № 5. P. 860.
32. Lukyanenko D.V., Prigorniy I.V., Shishlenin M.A. Some features of solving an inverse backward problem for a generalized burgers' equation // *J. Inverse&Ill-Posed Problems.* 2020. V. 28. № 5. P. 641–649.
33. Пономарев В.М., Чхетиани О.Г., Шестакова Л.В. Численное моделирование развитой горизонтальной циркуляции в атмосферном пограничном слое // *Вычисл. мех. сплошных сред.* 2009. Т. 2. № 1. С. 68–80.
34. Вазаева Н.В., Чхетиани О.Г., Максименков Л.О. Организованная валиковая циркуляция и перенос минеральных аэрозолей в атмосферном пограничном слое // *Изв. РАН. ФАО.* 2019. Т. 55. № 2. С. 17–31.
35. Mourad P.D., Brown R.A. On multiscale large eddy states in weakly stratified boundary layers // *J. Atmos. Sci.* 1990. V. 47. P. 414–438.
36. Чхетиани О.Г., Вазаева Н.В. Об алгебраических возмущениях в атмосферном пограничном слое // *Изв. РАН. ФАО.* 2019. Т. 55. № 5. С. 62–75.
37. Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы: в 2 кн. Кн 2. Методы математической физики. М.: ИЦ Академия, 2013. 303 с.
38. Абрамов А.А., Андреев В.Б. О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений // *ЖВММФ.* 1963. Т. 3. № 2. С. 377–381.
39. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука. Физматлит, 1966. 260 с.
40. Guermont J.L. A finite element technique for solving first-order PDEs in L_p // *SIAM J. Numer. Anal.* 2004. V. 42. № 1. P. 714–737.

On Estimation of the Contribution of Secondary Vortex Structures to the Transport of Aerosols in the Atmospheric Boundary Layer

M. A. Davydova^{a,#}, O. G. Chkhetiani^{b,##}, N. T. Levashova^{a,###}, and A. L. Nechaeva^{a,####}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b *A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: m.davydova@physics.msu.ru*

^{##} *e-mail: ochkheti@ifaran.ru*

^{###} *e-mail: levashovant@physics.msu.ru*

^{####} *e-mail: nechaeva.al15@physics.msu.ru*

In this paper, we consider two reasonable approaches to the problem of numerical simulation of the concentration distribution of finely dispersed aerosol in helical vortex structures (rolls) in the atmospheric boundary layer in order to estimate the contribution of vortex structures to the transport of aerosols through the boundary layer. Using the methods of perturbation theory, an approximate solution of a stationary spatially periodic singularly perturbed problem of the reaction-diffusion-advection type, which models the distribution of

aerosol in vortices, is obtained, the residual term is estimated, and a method for numerically solving the zero-approximation problem is proposed. As an alternative approach to the problem of numerical modeling of the aerosol concentration field in rolls, the implementation of the evolutionary factorization method is considered. Using model data, an estimate of the amount of aerosol carried by vortex structures was obtained.

Keywords: atmospheric boundary layer, mesoscale circulation, aerosol transport, singular perturbations, asymptotic methods and their applications, reaction-diffusion-advection problems, mathematical modeling of concentration fields of small impurities in the atmospheric boundary layer

REFERENCES

1. Lilly D.K. On the stability of Ekman boundary flow // *J. Atmos. Sci.*, 1966, vol. 23, no. 5, pp. 481–494.
2. Ponomarev V.M., Khapaev A.A., Chkhetiani O.G. Role of helicity in the formation of secondary structures in the Ekman boundary layer // *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 2003, vol. 39, no. 4, pp. 391–400.
3. Thompson T.W., Liu W.T., Weissman D.E. Synthetic aperture radar observation of the ocean roughness from rolls in an unstable marine boundary layer // *J. Geophys. Res.*, 1983, vol. 10, pp. 172–175.
4. Mourad P.D., Walter B.A. SAR streaks vs cloud streets: viewing a cold air outbreak using satellite-based SAR and AVHRR imagery // *J. Geophys. Res.*, 1996, vol. 101, pp. 16391–16400.
5. Atkinson B.W., Wu Zhang J. Mesoscale shallow convection in the atmosphere // *Rev. Geophys.*, 1996, vol. 34, no. 4, pp. 403–431.
6. Brummer B. Structure, dynamics and energetics of boundary layer from Kontur aircraft observations // *Beitr. Phys. Atmos.*, 1985, vol. 58, pp. 237–254.
7. Chou S.-H., Ferguson M.P. Heat fluxes and roll circulation over the western gulf stream during an intense cold-air outbreak // *Bound. Lay. Meteor.*, 1991, vol. 55, no. 3, pp. 255–281.
8. Gerling T.W. Structure of the surface wind fields from Seasat SAR // *J. Geophys. Res.*, 1986, vol. 91, pp. 2308–2320.
9. Alpers W., Brummer B. Atmospheric boundary layer rolls observed by the synthetic aperture radar aboard the ERS-1 satellite // *J. Geophys. Res.*, 1994, vol. 99, pp. 12613–12621.
10. Golitsyn G.S., Granberg I.G., Andronova A.V., Ponomarev V.M., Zilitinkevich S.S., Smirnov V.V., Yablokov M.Yu. Investigation of boundary layer fine structure in arid regions: injection of fine dust into the atmosphere // *Water, Air&Soil Pollut.: Focus 3*, 2003, pp. 245–257.
11. Vazaeva N.V., Chkhetiani O.G., Shestakova, Maksimenkov L.O. Nonlinear development of the Ekman layer structures // *Comput. Cont. Mech.*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 197–211. (in Russian)
12. LeMone M.A. The structure and dynamics of horizontal roll vortices in the planetary boundary layer // *J. Atmos. Sci.*, 1973, vol. 30, pp. 1077–1091.
13. Lampilahti J., Manninen H.E., Leino K. et al. Roll vortices induce new particle formation bursts in the planetary boundary layer // *Atmos. Chem. Phys.*, 2020, vol. 20, no. 20, pp. 11841–11854.
14. Zedel L., Farmer D.M. Organised structures in subsurface bubble clouds: Langmuir circulation in the open ocean // *J. Geophys. Res.*, 1991, vol. 96, pp. 8889–8900.
15. Ivlev L.S., Dovgalyuk YU.A. *Physics of Atmospheric Aerosol Systems*. SPb.: NIIKH SPbGU, 1999. 194 p. (in Russian).
16. Joint MSC-W&CCC, CEIP Rep. Transboundary particulate matter, photo-oxidants, acidifying and eutrophying components. https://emep.int/publ/reports/2019/EMEP_Status_Report_1_2019.pdf
17. Marchuk G.I. *Mathematical Models in Environmental Problems*. Amsterdam: Elsevier, 1986. 220 p.
18. Berlyand M.E. *Prediction and Regulation of Air Pollution*. Netherlands: Springer, 1991. 312 p.
19. Ponomarev V.M., Chkhetiani O.G., Shestakova L.V. Nonlinear dynamics of large-scale vortex structures in a turbulent Ekman layer // *Fluid Dyn.*, 2007, vol. 42, no. 4, pp. 571–580.
20. Nefedov N.N. The method of differential inequalities for some singularly perturbed partial differential equations // *Differ. Eqn.*, 1995, vol. 31, no. 4, pp. 668–671.

21. *Ladzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N.* Linear and Quasilinear Elliptic Equations. N.Y.: Acad. Press, 1968. xviii + 495 p.
22. *Miranda C.* Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Berlin: Springer, 1955. viii+ 222 p.
23. *Friedman A.* Partial Differential Equations of Parabolic Type. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964. 347 p.
24. *Davydova M.A., Elansky N.F., Zakharova S.A., Postylyakov O.V.* Application of a numerical-asymptotic approach to the problem of restoring the parameters of a local stationary source of anthropogenic pollution // *Dokl. Math.*, 2021, vol. 103, no. 1, pp. 26–31.
25. *Zakharova S.A., Davydova M.A., Lukyanenko D.V.* Use of asymptotic analysis for solving the inverse problem of source parameters determination of nitrogen oxide emission in the atmosphere // *Inverse Problems in Sci.&Enging.*, 2021, vol. 29, no. 3, pp. 365–377.
26. *Davydova M.A., Elanskii N.F., Zakharova S.A.* A new approach to the problem of reconstructing the vertical turbulent diffusion coefficient in the atmospheric boundary layer // *Dokl. Earth Sci.*, 2020, vol. 490, no. 2, pp. 92–96.
27. *Davydova M.A., Zakharova S.A.* Multidimensional thermal structures in the singularly perturbed stationary models of heat and mass transfer with a nonlinear thermal diffusion coefficient // *J. Comput.&Appl. Math.*, 2022, vol. 400, pp. 113731.
28. *Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., Shishlenin M.A.* Solving coefficient inverse problems for nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front // *Commun. in Nonlin. Sci.&Numer. Simul.*, 2021, vol. 99, pp. 105824.
29. *Argun R., Gorbachev A., Levashova N., Lukyanenko D.* Inverse problem for an equation of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front: features of the solution in the case of a nonlinear integral equation in a reduced statement // *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 18, pp. 2342.
30. *Lukyanenko D., Yeleskina T., Prigorniy I., Isaev T., Borzunov A., Shishlenin M.* Inverse problem of recovering the initial condition for a nonlinear equation of the reaction–diffusion–advection type by data given on the position of a reaction front with a time delay // *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 4, pp. 342.
31. *Levashova N., Gorbachev A., Argun R., Lukyanenko D.* The problem of the non-uniqueness of the solution to the inverse problem of recovering the symmetric states of a bistable medium with data on the position of an autowave front // *Symmetry*, 2021, vol. 13, no. 5, pp. 860.
32. *Lukyanenko D.V., Prigorniy I.V., Shishlenin M.A.* Some features of solving an inverse backward problem for a generalized burgers' equation // *J. Inverse&Ill-Posed Problems*, 2020, vol. 28, no. 5, pp. 641–649.
33. *Ponomarev V.M., Chkhetiani O.G., Shestakova L.V.* Numerical modeling of developed horizontal circulation in the atmospheric boundary layer. // *Comput. Contin. Mech.*, 2009, vol. 2, no. 1, pp. 68–80. (in Russian)
34. *Vazaeva N.V., Chkhetiani O.G., Maksimenkov L.O.* Organized roll circulation and transport of mineral aerosols in the atmospheric boundary layer // *Izv., Atmos. Ocean. Phys.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 17–31.
35. *Mourad P.D., Brown R.A.* On multiscale large eddy states in weakly stratified boundary layers // *J. Atmos. Sci.*, 1990, vol. 47, pp. 414–438.
36. *Chkhetiani O.G., Vazaeva N.V.* On the algebraic perturbations in atmospheric boundary layer // *Izv., Atmos. Ocean. Phys.*, 2019, vol. 55, no. 5, pp. 62–75.
37. *Kalitkin N.N., Koryakin P.V.* Numerical Methods: in 2 vols. Vol. 2. Methods of Mathematical Physics. Moscow: Publ. Center Akademiya, 2013. 303 p. (in Russian)
38. *Abramov A.A., Andreev V.B.* On the application of the sweep method to finding periodic solutions of differential and difference equations // *Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 3, no. 2, pp. 377–381.
39. *Kamke E.* Differential gleichungen Erster Ordnung fur Eine Gesuchte Funktion. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1979. 246 p.
40. *Guermond J.L.* A finite element technique for solving first-order PDEs in L_p // *SIAM J. Numer. Anal.*, 2004, vol. 42, no. 2, pp. 714–737.