

УДК 539.3, 539.42

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ МАТЕРИАЛА НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕЩИНЫ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2022 г. А. В. Савиковский^{1,*}, А. С. Семенов^{1,**}, М. Л. Качанов^{1,2,3,***}¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия² Университет Тафтса, Медфорд, Массачусетс, США³ Нижегородский государственный университет им. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

*e-mail: savikovskii.artem@yandex.ru

**e-mail: semenov.artem@googlemail.com

***e-mail: Mark.Kachanov@tufts.edu

Поступила в редакцию 15.03.2022 г.

После доработки 11.05.2022 г.

Принята к публикации 15.05.2022 г.

Рассматривается взаимодействие одиночной прямолинейной трещины со свободной границей анизотропной упругой пластины конечных размеров. Показано, что при приближении вершины трещины к границе пластины возрастает влияние упругой анизотропии материала на значения коэффициентов интенсивности напряжений. Исследовано влияние степени анизотропии упругих свойств материала и ориентации трещины (моды разрушения) на этот эффект.

Ключевые слова: анизотропный материал, коэффициент интенсивности напряжений, трещина, линейно-упругая механика разрушения, формализм Лехницкого, конечно-элементное моделирование

DOI: 10.31857/S0032823522040129

1. Введение. Определение коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) играет ключевую роль при исследовании условий распространения трещин в хрупких материалах. В то время как задача определения КИН детально изучена для *изотропных* упругих сред с трещиной [1, 2], она является значительно более трудоемкой и менее исследованной для *анизотропных* тел. В случае бесконечной упругой пластины, обладающей произвольной анизотропией упругих свойств и содержащей прямолинейную трещину, произвольно ориентированную по отношению к осям анизотропии материала, метод анализа был разработан Лехницким [3] для более общего случая эллиптической полости. В работе Си, Пэриса и Ирвина [4] для бесконечной анизотропной пластины с трещиной при произвольно ориентированном по отношению к трещине одноосном растяжении установлено отсутствие зависимости значений КИН от упругих констант и, как следствие этого, совпадение значений КИН для анизотропного и изотропного материала, определяемых выражениями [4]:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \sin^2 \varphi, \quad K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a} \sin \varphi \cos \varphi, \quad (1.1)$$

где σ – растягивающее напряжение, a – полудлина трещины, φ – угол между направлением действия одноосного растягивающего напряжения и направлением трещины.

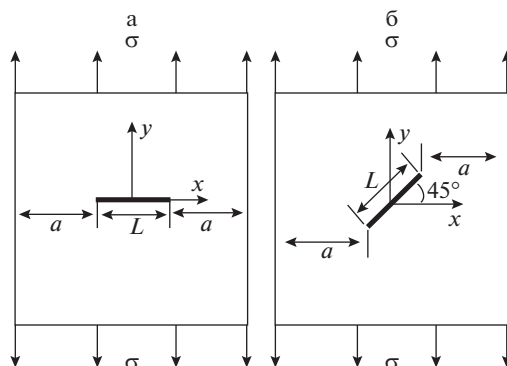


Рис. 1. Варианты ориентации прямолинейной трещины в квадратной анизотропной пластине: а) горизонтальная трещина ($\varphi = 0^\circ$), б) наклонная трещина ($\varphi = 45^\circ$).

Однако для пластин конечных размеров, представляющих непосредственный интерес для приложений, значения КИН зависят от упругих констант и, в частности, от степени анизотропии материала. В литературе имеются лишь несколько численных результатов для КИН трещин в анизотропных пластинах конечных размеров (см., например, [5]– [9]). В статье [6] рассчитывались КИН для ортотропной пластины конечных размеров, но влияние расстояния от трещины до края на значение КИН не исследовалось. В статье [7] приводится исследование влияния ориентации трещины на значение КИН для анизотропной пластины конечных размеров. В статье [8] вычисляются КИН для боковой трещины в анизотропной пластине конечных размеров и исследуется влияние ориентации осей материала на значение КИН. Также в этой статье приводятся значения КИН для центральной трещины в анизотропной пластине конечных размеров и исследуется влияние ориентации осей анизотропного материала и расстояния от вершины трещины до края, но для компактного образца, и не исследуется степень влияния анизотропии. В статье [9] исследуется влияние расстояния от вершины трещины до края образца на значение КИН для изотропного и анизотропного материалов, но анализ выполняется только для цилиндрического образца и не исследуется влияние степени анизотропии. Также исследовалось влияние ориентации трещины на значение КИН для анизотропного материала. Неисследованным остается важный вопрос о влиянии степени анизотропии на взаимодействие трещины с границами тела.

Упомянутые факторы детально исследуются в настоящей работе на примере трещины в упругой анизотропной пластине конечных размеров. Целью является исследование влияния ориентации трещины и степени анизотропии материала на взаимодействие трещины с границей, оцениваемое по величине отношения КИН для анизотропного и изотропного материалов.

2. Постановка задачи. Рассматривается квадратная анизотропная упругая пластина, содержащая внутреннюю одиночную прямолинейную трещину (рис. 1). Исследуются два варианта ориентации трещины по отношению к пластине. Рассматривается одноосное растяжение пластины в вертикальном направлении. Задача решается в 2-мерной постановке в предположении плоского напряженного состояния (решение данной задачи с учетом потери плоской формы получено в [10]). Оси анизотропии упругих свойств параллельны краям пластины. Исследование эффектов влияния степени анизотропии материала и ориентации трещины осуществляется на основе многовариантных вычислительных экспериментов при различных значениях размера “перемычка-

ки” a – расстояния между вершиной трещины и границей пластины. Расчет КИН проводился методом конечных элементов, с использованием конечно-элементного программного комплекса PANTOCRATOR [11], который обладает способностью автоматизированных вычислений КИН для изотропных и анизотропных материалов на основе различных методов. В процессе выполнения расчетов варьировались степень анизотропии, ориентация трещины по отношению к осям анизотропии материала и расстояние от вершины трещины до края пластины.

3. Методы определения КИН. Асимптотические выражения для перемещений в окрестности вершины трещины в общем трехмерном случае при наличии трех мод разрушения (ненулевые K_I , K_{II} , K_{III}) для *изотропного* материала определяются соотношениями [12]:

$$\begin{aligned} u_x(r, \alpha) &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\kappa - 1}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\kappa + 1}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) \\ u_y(r, \varphi) &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\kappa + 1}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\kappa - 1}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \\ u_z(r, \alpha) &= \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\alpha}{2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $u_x(r, \alpha)$, $u_y(r, \alpha)$, $u_z(r, \alpha)$ – осевые перемещения в системе координат трещины, K_I , K_{II} , K_{III} – КИН для I, II и III мод разрушения, $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ в случае ПНС, G – модуль сдвига, r – расстояние до рассматриваемой точки от вершины трещины, α – угол между направлением на точку и осью трещины, ν – коэффициент Пуассона.

Асимптотические выражения для перемещений около вершины трещины в общем трехмерном случае для *анизотропного* материала, полученные с использованием формализма Лехницкого, имеют следующий вид [4, 6, 13]:

$$\begin{aligned} u_x(r, \alpha) &= \frac{K_I \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(\mu'_1 p_2 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha} - \mu'_2 p_1 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha} \right) \right) + \\ &+ \frac{K_{II} \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(p_2 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha} - p_1 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha} \right) \right) \\ u_y(r, \alpha) &= \frac{K_I \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(\mu'_1 q_2 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha} - \mu'_2 q_1 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha} \right) \right) + \\ &+ \frac{K_{II} \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(q_2 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha} - q_1 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha} \right) \right) \\ u_z(r, \alpha) &= \frac{K_{III} \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_3 \sin \alpha}}{c_{45} + \mu_3 c_{44}} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где μ'_1 и μ'_2 – комплекснозначные корни уравнения четвертой степени (комплексные параметры анизотропного материала [3]).

$$S'_{11} \mu^4 - 2S'_{16} \mu^3 + (2S'_{12} + S'_{66}) \mu^2 - 2S'_{26} \mu + S'_{22} = 0 \quad (3.3)$$

с положительной мнимой частью, S'_{ij} – элементы матрицы упругой податливости материала при использовании обозначений Фойгта в системе координат трещины,

$p_i = S'_{11}\mu_i'^2 + S'_{12} - S'_{16}\mu_i'$, $q_i = S'_{12}\mu_i' + \frac{S'_{22}}{\mu_i'} - S'_{26}$, μ_3' – корень уравнения $C'_{44}\mu^2 - 2C'_{45}\mu + C'_{55} = 0$ с положительной мнимой частью, C'_{ij} – константы матрицы упругих модулей материала в системе координат трещины ($[\mathbf{C}] = [\mathbf{S}]^{-1}$).

В случае изотропного материала перемещения связаны с КИНами формулами (3.1). Чтобы найти перемещения на свободных берегах трещины, подставим $\alpha = \pi$ в уравнение (3.1) и выразим КИН через перемещения для *изотропного* материала:

$$K_I = u_y(r, \pi)\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{2G}{1 + \kappa}, \quad K_{II} = u_x(r, \pi)\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{2G}{1 + \kappa}, \quad K_{III} = u_z(r, \pi)\sqrt{\frac{2\pi}{r}} G \quad (3.4)$$

В случае *анизотропного* материала результатом подстановки $\alpha = \pi$ в (3.2), получаем выражения:

$$\{\mathbf{u}\} = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} [\mathbf{B}] \cdot \{\mathbf{K}\}, \quad (3.5)$$

где

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u_x(r, \pi) \\ u_y(r, \pi) \\ u_z(r, \pi) \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{K}\} = \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix}, \quad [\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_1' p_2 - \mu_2' p_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & \operatorname{Re} \left(\frac{p_2 - p_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & 0 \\ \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_1' q_2 - \mu_2' q_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & \operatorname{Re} \left(\frac{q_2 - q_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{C'_{44}C'_{55} - C'_{45}{}^2}} \end{pmatrix}$$

– матрица 3×3 взаимного влияния трех компонент вектора относительного смещения берегов трещины на три коэффициента интенсивности напряжений.

Результат обращения (3.5) позволяет вычислить КИН через перемещения берегов трещины в случае *анизотропного* материала [9, 14]:

$$\{\mathbf{K}\} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} [\mathbf{B}]^{-1} \{\mathbf{u}\}, \quad (3.6)$$

где

$$[\mathbf{B}]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\det[\mathbf{D}]} \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_1' p_2 - \mu_2' p_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & \frac{1}{\det[\mathbf{D}]} \operatorname{Re} \left(\frac{-p_2 - p_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & 0 \\ \frac{1}{\det[\mathbf{D}]} \operatorname{Re} \left(\frac{-\mu_1' q_2 - \mu_2' q_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & \frac{1}{\det[\mathbf{D}]} \operatorname{Re} \left(\frac{q_2 - q_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C'_{44}C'_{55} - C'_{45}{}^2} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\det[\mathbf{D}] = \begin{vmatrix} \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_1' p_2 - \mu_2' p_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & \operatorname{Re} \left(\frac{p_2 - p_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) \\ \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_1' q_2 - \mu_2' q_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & \operatorname{Re} \left(\frac{q_2 - q_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) \end{vmatrix}$$

Стоит отметить, что если система координат трещины не совпадает с осями анизотропии материала, то константы матрицы податливости и жесткости должны быть преобразованы в систему координат трещины и корни μ'_2 , μ''_2 должны находиться из уравнения 4 степени с константами податливости в системе координат трещины. В случае поворота системы координат матрица перехода от одной системы координат

к другой при повороте в плоскости на угол φ имеет вид: $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и форму-

ла преобразования элементов тензора податливости и жесткости 4 ранга из старой в новую систему координат имеет следующий вид:

$$S'_{ijkl} = Q_{im}Q_{jn}Q_{ko}Q_{lp}S_{mnop} \quad (3.8)$$

$$C'_{ijkl} = Q_{im}Q_{jn}Q_{ko}Q_{lp}C_{mnop}$$

где S_{mnop} — элементы тензора податливости в исходной системе координат, S'_{ijkl} — элементы тензора податливости в повернутой системе координат (трещины); C_{mnop} — элементы тензора упругих модулей в исходной системе координат, C'_{ijkl} — элементы тензора упругих модулей в повернутой системе координат (трещины). При использовании формул (3.4) и (3.6) перемещения также нужно преобразовать из глобальной системы координат в систему координат, связанную с трещиной. Данные формулы были запрограммированы в конечно-элементном комплексе PANTOCRATOR [11].

При проведении расчетов относительное расстояние a/L от вершины трещины до границы варьировалось в пределах [1; 10.5], где L — длина трещины (a — абсолютное расстояние от вершины трещины до границы пластины), и принимало дискретные значения: $a/L = 1, 2, 4, 6, 8, 10.5$. Анизотропия предполагалась кубического типа, для описания которой необходимо задать 3 независимых упругих модуля. Отклонение от изотропии характеризовалось параметром ρ :

$$\rho = \frac{E}{2G} - \nu, \quad (3.9)$$

который для изотропного материала принимает значение $\rho = 1$. В расчетах для материала с кубической симметрией использовались значения $\rho = -0.25$, $\rho = 5$ и $\rho = 10$. При проведении расчетов варьировалось значение G при фиксированных значениях упругих модулей E и ν .

При выборе геометрических размеров пластины для задач с горизонтальной и наклонной трещиной обеспечивалось условие влияния на трещину близости только боковых границ, в то время как влиянием верхней и нижней границ можно было бы пренебречь в силу их значительного удаления от вершины трещины. На рис. 2 представлена конечно-элементная модель для задачи с горизонтальной трещиной для случая $a = 4L$. Число степеней свободы составляет 185000. В расчетах использовались восьмиузловые изопараметрические конечные элементы с квадратичной аппроксимацией перемещений в пределах одного конечного элемента. В целях валидации полученных результатов проводилось сравнение полученного конечно-элементного решения для случая $a = 10.5L$ с аналитическим решением для бесконечной пластины и производилось исследование практической сходимости численного решения на различных вложенных сетках для данной задачи на примере изотропного материала. При уменьшении числа степеней свободы в 2 раза результат меняется менее, чем на 1%.

Для других размеров перемычки a конечно-элементная сетка вокруг вершины трещины не менялась, а менялись только размеры пластины. Разбиение увеличенных областей производилось пропорционально длине. Области оставались квадратными.

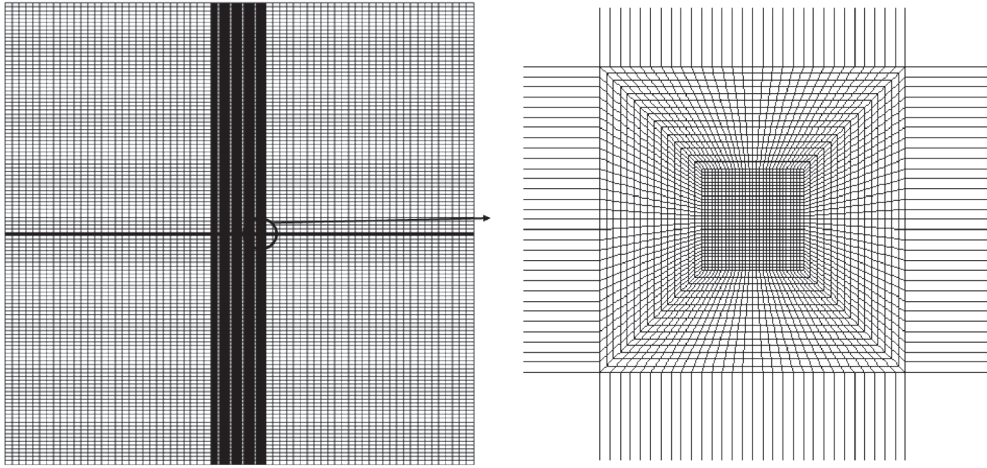


Рис. 2. Конечно-элементная модель пластины с горизонтальной трещиной ($a = 4L$, $\varphi = 0^\circ$).

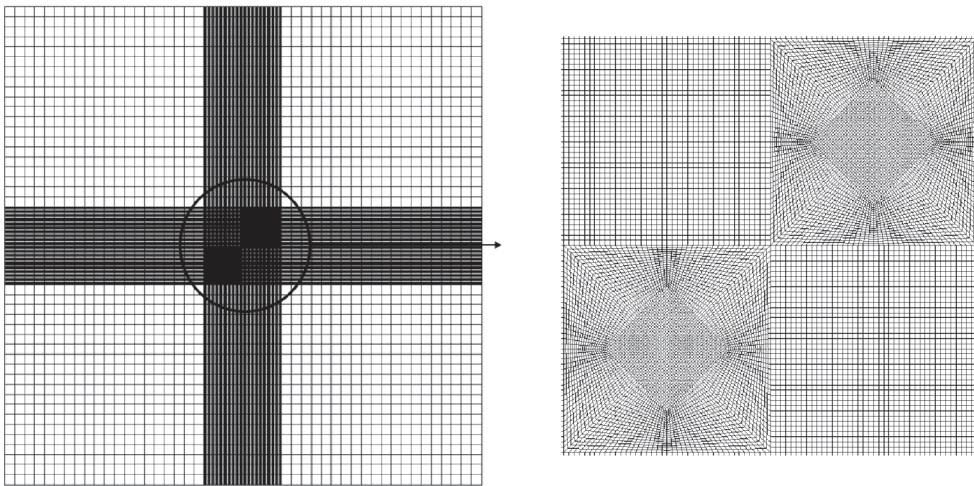


Рис. 3. Конечно-элементная модель пластины с наклонной трещиной ($a = 4L$, $\varphi = 45^\circ$).

На рис. 3 показана конечно-элементная модель для задачи с наклонной трещиной для случая $a = 4L$, $\varphi = 45^\circ$. Число степеней свободы составляет 126000.

Также проводилось исследование практической сходимости решения для данной конечно-элементной модели на примере изотропного материала. При уменьшении числа степеней свободы в 2 раза результат тоже меняется менее, чем на 1%.

В случае наклонной трещины расстояние от вершины трещины до верхнего края также оставалось равным расстоянию до верхней границы. При дальнейшем увеличении a область оставалась квадратной. Конечно-элементные модели фиксировались слева по оси x для исключения твердотельных перемещений.

В задаче с горизонтальной трещиной анализировалось влияние параметров ρ и a/L на K_I . В задаче с наклонной трещиной исследовалось влияние параметров ρ , a/L и φ на K_I и K_{II} .

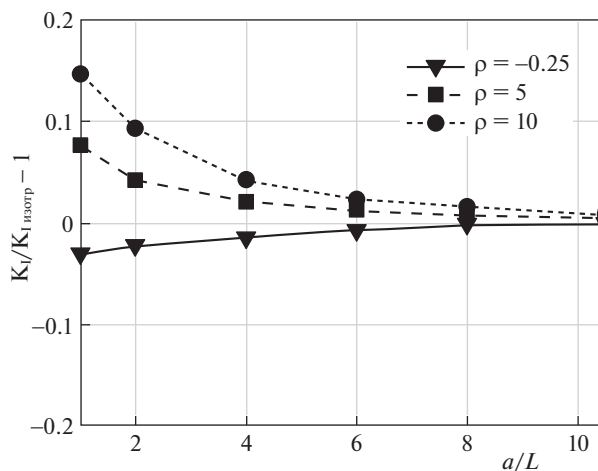


Рис. 4. Зависимость нормированного значения K_I от расстояния до края анизотропной пластины a для горизонтальной трещины $\varphi = 0^\circ$ (нормировано по отношению к значению K_I для изотропного материала).

4. Результаты расчетов. На рис. 4 показана зависимость K_I от размера перемычки a для задачи с горизонтальной трещиной (рис. 1а) для различных степеней отклонения кубической симметрии от изотропии ρ (3.10).

При значительном удалении трещины от края пластины ($a/L > 8$) наблюдается совпадение (с точностью до 1%) значений K_I для анизотропных материалов с прогнозом для изотропного материала. При приближении вершины трещины к границе (уменьшении отношения a/L) наблюдается прогрессирующий рост отличия прогнозов изотропного и анизотропного материалов. Приближение трещины к границе пластины пробуждает влияние анизотропии упругих свойств на КИН. При $\rho > 1$ ($G > G_{\text{изотроп}}$) наблюдается увеличение K_I для анизотропного материала в сравнении с изотропным, а при $\rho < 1$ ($G < G_{\text{изотроп}}$) наблюдается уменьшение K_I для анизотропного материала в сравнении с изотропным случаем.

На рис. 5 показана зависимость K_I от a для задачи с наклонной трещиной (рис. 1б) для различных степеней отклонения кубической симметрии от изотропии ρ , определяемых уравнением (3.9).

Аналогично случаю горизонтальной трещины при значительном удалении наклонной трещины от края пластины ($a/L > 8$) наблюдается совпадение (с точностью до 1%) значений K_I для анизотропных материалов с прогнозом для изотропного материала. Аналогично при приближении вершины наклонной трещины к границе пластины (уменьшении отношения a/L) наблюдается прогрессирующий рост отличия прогнозов изотропного и анизотропного материалов. В рассматриваемом случае наклонной трещины также наблюдается эффект усиления влияния анизотропии упругих свойств на КИН при приближении трещины к границе пластины. В отличие от случая горизонтальной трещины и при $\rho > 1$ ($G > G_{\text{изотроп}}$), и при $\rho < 1$ ($G < G_{\text{изотроп}}$) для наклонной трещины наблюдается увеличение K_I для анизотропного материала в сравнении с изотропным случаем.

На рис. 6 показана зависимость K_{II} от размера перемычки a для задачи с наклонной трещиной для степеней отклонения кубической симметрии от изотропии ρ .

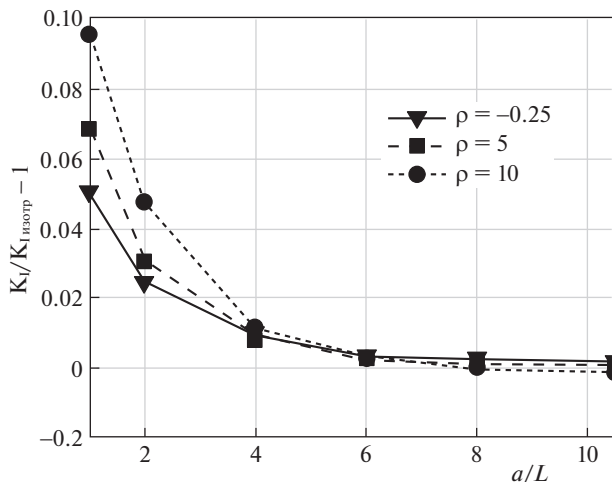


Рис. 5. Зависимость нормированного значения K_I от расстояния до края анизотропной пластины a для наклонной трещины $\varphi = 45^\circ$ (нормировано по отношению к значению K_I для изотропного материала).

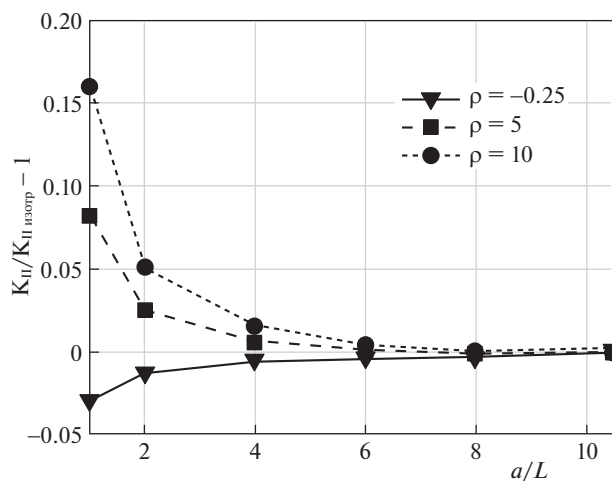


Рис. 6. Зависимость нормированного значения K_{II} от расстояния до края анизотропной пластины для наклонной трещины $\varphi = 45^\circ$ (нормировано по отношению к значению K_{II} для изотропного материала).

Для K_{II} при значительном удалении наклонной трещины от края пластины ($a/L > 8$) также наблюдается совпадение (с точностью до 1%) значений КИН для анизотропных и изотропных материалов. При приближении вершины наклонной трещины к границе пластины (уменьшении отношения a/L) наблюдается прогрессирующий рост отличия K_{II} для изотропного и анизотропного материалов. При $\rho > 1$ ($G > G_{\text{изотроп}}$) наблюдается увеличение K_{II} для анизотропного материала в сравнении с изотропным, а при $\rho < 1$ ($G < G_{\text{изотроп}}$) наблюдается уменьшение K_{II} для анизотропного материала в сравнении с изотропным случаем.

Таблица 1. Отличие расчетных КИН при $a/L = 10.5$ от аналитического решения (1.1) для бесконечной пластины

	$\rho = -0.25$	$\rho = 5$	$\rho = 10$
Погрешность для K_I в задаче с горизонтальной трещиной	0.8%	0.5%	0.08%
Погрешность для K_I в задаче с наклонной трещиной	0.2%	0.4%	0.5%
Погрешность для K_{II} в задаче с наклонной трещиной	0.5%	0.5%	0.4%

При удалении трещины от границы эффект влияния анизотропии исчезает. КИН для изотропного и анизотропного материалов для бесконечной пластины совпадают [4]. В таблице 1 представлены результаты сравнения отличий численных решений для КИН при максимальном моделируемом удалении $a = 10.5L$ от аналитического решения (1.1) для бесконечной пластины [4] для всех рассмотренных вариантов ориентации трещины и значений параметра степени анизотропии $\rho = -0.25$, $\rho = 5$ и $\rho = 10$.

Во всех случаях погрешность вычисления КИН по сравнению с аналитическим решением составляет меньше 1%.

Заключение. На основе проведенных вычислительных экспериментов установлен эффект возрастания влияния анизотропии упругих свойств на значения КИН при приближении вершины трещины к границе пластины. При значительном удалении вершины трещины от края пластины ($a/L > 8$) КИН для анизотропного материала (с точностью до 2%) совпадает с КИН для изотропного материала. При меньших расстояниях ($a/L < 8$) анизотропию материала рекомендуется учитывать.

Результаты конечно-элементного моделирования показали, что для трещин различных ориентаций (различных мод разрушения) с уменьшением расстояния между вершиной трещины и границей пластины наблюдается прогрессирующее усиление влияния анизотропии материала на значения КИН. Отличия в прогнозах КИН для изотропного материала и материала с кубической симметрией превышают 15% для рассматриваемых в расчетах констант материала и случаев нагружения.

Эффект возрастания влияния анизотропии упругих свойств на значения КИН при приближении трещины к границе пластины усиливается с ростом степени анизотропии.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 0784-2020-0027).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мураками Ю., Аоки С., Хасебе Н. и др. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х тт. Т. 1. М.: Мир, 1990. 488 с.
2. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука. ГРФМЛ, 1984. 174 с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
4. Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // Int. J. Fracture Mech. 1965. № 1. P. 189–203.
5. Kachanov M., Shafiro B., Tsukrov I. Handbook of Elasticity Solutions. Boston: Springer, 2003. 330 p.
6. Banks-Sills L., Hershkovitz I., Wawrzynek P.A. et al. Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I – $z = 0$ is a symmetric plane // Engng. Fracture Mech. 2005. V. 72. P. 2328–2358.
7. Yu H., Kuna M. Interaction integral method for computation of crack parameters K-T – a review // Eng. Fract. Mech. 2021. № 249. P. 107722.
8. Ozkan U., Nied H.F., Kaya A.C. Fracture analysis of anisotropic materials using enriched crack tip elements // Engng. Fracture Mech. 2010. V. 77. P. 1191–1202.

9. *Ranjan S., Arakere N.K.* A Fracture-mechanics-based methodology for fatigue life prediction of single crystal nickel-based superalloys // *J. Eng. Gas Turbines Power*. 2008. V. 130.
10. *Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Товстик П.Е.* Об оценке уровня работоспособности растягиваемой пластины, ослабленной поперечной трещиной // *Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия*. 2019. Т. 6(64). С. 338–346.
11. *Семенов А.С.* PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // *Тр. V-й Межд. конф. “Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций”*. СПб.: СПбГПУ, 2003. С. 466–480.
12. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука. 1974. С. 223–226.
13. *Judt P.O., Ricoeur A., Linek G.* Crack path prediction in rolled aluminum plates with fracture toughness orthotropy and experimental validation // *Engng. Fracture Mech.* 2015. V. 138. P. 33–48.
14. *Семенов А.С., Семенов С.Г., Гецов Л.Б.* Методы расчетного определения скорости роста трещин усталости, ползучести и термоусталости в поли- и монокристаллических лопатках ГТУ // *Пробл. прочн.* 2015. № 2. С. 61–87.

Effect of Material Anisotropy on the Interaction of a Crack with Free Boundary

A. V. Savikovskii^{a,#}, A. S. Semenov^{a,##}, and M. L. Kachanov^{a,b,c,###}

^a *Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic university, Saint-Petersburg, Russia*

^b *Tufts University, Medford, USA*

^c *Lobachevsky Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russia*

[#] *e-mail: Savikovskii.Artem@yandex.ru*

^{##} *e-mail: semenov.artem@googlemail.com*

^{###} *e-mail: Mark.Kachanov@tufts.edu*

The interaction of a crack in a two-dimensional anisotropic elastic plate of finite dimensions with the plate boundary is considered. It is shown that, with a decrease in the “bridge” between the crack tip and the plate boundary, the anisotropy of the material has an increasing effect on the stress intensity coefficients. The dependence of the mentioned influence for different crack orientations and for different fracture modes is investigated.

Keywords: anisotropic material, stress intensity factor, crack, linear elastic fracture mechanics, Lekhnitskii formalism, finite-element modeling

REFERENCES

1. *Murakami Yu., Aoki S., Hasebe N. et al.* Handbook of Stress Intensity Factors. In 2 Vols. Vol. 1: Moscow: Mir, 1990. 488 p. (in Russian)
2. *Morozov N.F.* Mathematical Problems in the Theory of Cracks. Moscow: Nauka, 1984. 174 p. (in Russian)
3. *Lekhnitsky S.G.* Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. Moscow: Nauka, 1977. 416 p. (in Russian)
4. *Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R.* On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // *Int. J. Fracture Mech.*, 1965, no. 1, pp. 189–203.
5. *Kachanov M., Shafiro B., Tsukrov I.* Handbook of Elasticity Solutions. Boston: Springer, 2003. 330 p.
6. *Banks-Sills L., Hershkovitz I., Wawrzynek P.A. et al.* Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I— $z = 0$ is a symmetric plane // *Engng. Fracture Mech.*, 2005, vol. 7, pp. 2328–2358.
7. *Yu H., Kuna M.* Interaction integral method for computation of crack parameters K-T – a review // *Eng. Fract. Mech.*, 2021, no. 249, pp. 107722.
8. *Ozkan U., Nied H.F., Kaya A.C.* Fracture analysis of anisotropic materials using enriched crack tip elements // *Engng. Fracture Mech.*, 2010, vol. 77, pp. 1191–1202.

9. *Ranjan S., Arakere N.K.* A Fracture-mechanics-based methodology for fatigue life prediction of single crystal nickel-based superalloys // *J. Eng. Gas Turbines Power*, 2008, vol. 130.
10. *Morozov N.F., Semenov B.N., Tovstik P.E.* On assessing the performance level of a stretched plate weakened by a transverse crack // *Vestn. St. Petersburg State Univ. Maths. Mech. Astron.*, 2019, vol. 6 (64), pp. 338–346.
11. *Semenov A.S.* PANTOCRATOR – finite element software package focused on solving nonlinear problems in mechanics // *Tr. V-th Int. Conf. “Scientific and technical problems of predicting the reliability and durability of structures”*. St. Petersburg: SPbGPU, 2003. pp. 466–480.
12. *Kachanov L.M.* Fundamentals of Fracture Mechanics. Moscow: Nauka, 1974. pp. 223–226. (in Russian)
13. *Judt P.O., Ricoeur A., Linek G.* Crack path prediction in rolled aluminum plates with fracture toughness orthotropy and experimental validation // *Engng. Fracture Mech.*, 2015, vol. 138, pp. 33–48.
14. *Semenov A.S., Semenov S.G., Getsov L.B.* Methods for calculating the growth rate of fatigue cracks, creep and thermal fatigue in poly- and single-crystal gas turbine blades // *J. Strength Mater.*, 2015, no. 2, pp. 61–87.