

УДК 539.376

**ТОНКОСЛОЙНЫЕ АСИМПТОТИКИ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ПРАНДТЛЯ
ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА**© 2022 г. Д. В. Георгиевский^{1,2,*}¹МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия³Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 20.04.2022 г.

После доработки 11.05.2022 г.

Принята к публикации 20.05.2022 г.

Рассматривается обобщенная краевая задача Прандтля, моделирующая квазистатический технологический процесс сдавливания в одном направлении и быстром растекании в другом тонкого несжимаемого идеально жесткопластического слоя (плоское деформированное состояние), соответствующего критерию пластичности Мизеса–Генки с переменным по толщине пределом текучести. Стратификация может быть непрерывной либо кусочно-постоянной, в последнем случае задача моделирует прессование слоистых пластических композитов (ламинатов, “сэндвичей”) и прецизионное доведение их до нужной толщины. На основе тонкослойных сингулярных асимптотик по малому геометрическому параметру с помощью развиваемого в работе метода асимптотического интегрирования находится приближенное решение для кинематических и силовых величин. Обсуждается применимость квазистатического подхода на различных временных диапазонах процесса сдавливания.

Ключевые слова: идеально жесткопластический материал, задача Прандтля, тонкослойные асимптотики, квазистатика, неоднородность, стратификация, слоистый композит, “сэндвич”, число Эйлера

DOI: 10.31857/S0032823522040087

В плоской теории идеальной пластичности важное теоретическое значение имеют задача Прандтля и различные ее обобщения [1], моделирующие технологические процессы прессования и растекания тонких слоев при их обработке давлением [2, 3], в том числе и высокоскоростной. Классическое решение Прандтля может служить основой для получения более общих решений применительно к неоднородным по толщине тонким пластическим слоям как с непрерывной стратификацией, так и к слоистым композитам [4, 5].

1. Описание технологического процесса и постановка задачи. Положим, что в начальный момент времени $t = 0$ плоский тонкий слой

$$\Omega_0 = \{-l_0 < x_1 < l_0, -h_0 < x_2 < h_0\}, \quad \alpha = \frac{h_0}{l_0} \ll 1 \quad (1.1)$$

был занят несжимаемым идеально жесткопластическим материалом, подчиняющимся критерию пластичности Мизеса–Генки. Материал неоднороден по толщине слоя, так что его предел текучести σ_s – заданная непрерывная либо кусочно-непрерывная

функция координаты x_2 в начальный момент. Без сильного ограничения общности примем, что эта функция четная.

При $t > 0$ начинается квазистатический процесс сжатия слоя Ω_0 абсолютно жесткими плитами, движущимися вдоль оси x_2 навстречу друг другу, каждая с постоянной скоростью V . К моменту $t < h_0/V = t^*$ растекающийся с большой скоростью вдоль оси x_1 пластический слой занимает плоскую область

$$\Omega = \{-l < x_1 < l, -h < x_2 < h\}; \quad h = h_0 - Vt, \quad l = \frac{h_0 l_0}{h_0 - Vt} \quad (1.2)$$

Замкнутая система уравнений теории идеальной пластичности при плоской деформации в квазистатическом приближении имеет вид

$$-p_{,1} + s_{11,1} + s_{12,2} = 0, \quad -p_{,2} - s_{11,2} + s_{12,1} = 0 \quad (1.3)$$

$$s_{11}(v_{1,2} + v_{2,1}) = 2s_{12}v_{1,1} \quad (1.4)$$

$$s_{11}^2 + s_{12}^2 = \frac{1}{2}\sigma_s^2(\xi_2(x_1, x_2)) \quad (1.5)$$

$$v_{1,1} + v_{2,2} = 0, \quad (1.6)$$

где p — давление, s_{11} и s_{12} — компоненты девиатора тензора напряжений $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}$, а v_1 и v_2 — компоненты вектора скорости. Система, состоящая из уравнений равновесия (1.3), условия (1.4) пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций, критерия Мизеса—Генки (1.5) и условия несжимаемости (1.6) относительно пяти функций p , s_{11} , s_{12} , v_1 и v_2 эйлеровых координат x_1 и x_2 , осложнена тем, что единственная материальная характеристика среды — предел текучести σ_s — известная функция лагранжевой координаты ξ_2 , но заранее неизвестная функция x_1 и x_2 . В аргумент этой функции в (1.5) входит обратный закон движения $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$. Таким образом, систему (1.3)–(1.6) необходимо дополнить кинематическими уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2), \quad x_i|_{t=0} = \xi_i \quad (1.7)$$

для нахождения сначала закона движения $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, t)$, а затем необходимого для (1.5) обратного закона $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, t)$.

Кинематические граничные условия соответствуют равномерному сближению жестких плит:

$$v_2|_{x_2=\pm h} = \mp V \quad (1.8)$$

Кроме того, на границах слоя $x_2 = \pm h$ модуль касательного напряжения равен

$$|s_{12}|_{x_2=\pm h} = \frac{m}{\sqrt{2}}\sigma_s(\xi_2(x_1, \pm h)); \quad 0 < m \leq 1, \quad (1.9)$$

где m — известный из технологических соображений коэффициент сцепления пластического материала с плитами. Значение $m = 1$ реализуется в случае полного сцепления (абсолютной шероховатости), когда всю интенсивность напряжений на границах занимает касательная составляющая. Постоянная m может рассматриваться в данной задаче как управляющий напряженным состоянием параметр.

Квазистатический режим деформирования имеет место не на всем временном интервале $0 < t < t_*$. При подходе к правому концу этого интервала даже при сколь угодно медленном движении плит начинают проявляться и играть существенную роль динамические эффекты, приводящие к перестройке силовых режимов, необходимых для осуществления процесса [6, 7].

Введем безразмерные координаты на плоскости (x_1, x_2) и время:

$$\eta_1 = \frac{x_1}{l_0}, \quad \eta_2 = \frac{x_2}{h_0}, \quad \eta_{10} = \frac{\xi_1}{l_0}, \quad \eta_2 = \frac{\xi_2}{h_0}, \quad \tau = \frac{Vt}{h_0}, \quad (1.10)$$

изменяющиеся в области Ω в пределах

$$-\frac{1}{1-\tau} < \eta_1 < \frac{1}{1-\tau}, \quad -(1-\tau) < \eta_2 < 1-\tau, \quad 0 < \tau < 1 \\ -1 < \eta_{10} < 1, \quad -1 < \eta_{20} < 1 \quad (1.11)$$

Представляя переменный предел текучести σ_s в виде

$$\sigma_s = \sigma_s^0 f(\eta_{20}(\eta_1, \eta_2)); \quad \sigma_s^0 = \sigma_s(\pm h), \quad f(\pm 1) = 1 \quad (1.12)$$

введем в рассмотрение безразмерную функцию $f(\eta_{20}(\eta_1, \eta_2))$, отвечающую за распределение пластического материала по толщине в начальной конфигурации Ω_0 (1.1). Как функция одной безразмерной лагранжевой координаты η_{20} она задана и является четной по η_{20} , но изначально она неизвестна как функция безразмерных эйлеровых координат η_1 и η_2 .

2. Асимптотические разложения. Представим пять функций, входящих в систему (1.3)–(1.6), в виде степенных рядов по постоянному малому геометрическому параметру α , определенному в (1.1):

$$v_1 = V \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha^n \bar{v}_1^{(n)}(\eta_1, \eta_2), \quad v_2 = V \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{v}_2^{(n)}(\eta_1, \eta_2) \\ s_{11} = \frac{\sigma_s^0}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{s}_{11}^{(n)}(\eta_1, \eta_2), \quad s_{12} = \frac{\sigma_s^0}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{s}_{12}^{(n)}(\eta_1, \eta_2) \quad (2.1) \\ p = \frac{\sigma_s^0}{\sqrt{2}} \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha^n \bar{p}^{(n)}(\eta_1, \eta_2)$$

Сингулярность рядов для v_1 и p обусловлена физическим смыслом технологического процесса сжатия-растекания и стремлением в бесконечность двух этих функций при $\alpha \rightarrow 0$. Три оставшиеся функции ведут себя при этом регулярно. Строгое обоснование нижних границ суммирования рядов, аналогичных (2.1), применительно к классической задаче Прандтля приведено в [8].

Разложим также в ряды по α функции η_1 и η_2 , входящие в безразмерный закон движения $\eta_1 = \eta_1(\eta_{10}, \eta_{20}, \tau)$, $\eta_2 = \eta_2(\eta_{10}, \eta_{20}, \tau)$:

$$\eta_1 = \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha^n \bar{\eta}_1^{(n)}(\tau), \quad \eta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{\eta}_2^{(n)}(\tau) \quad (2.2)$$

Подставляя ряды (2.1) в пять уравнений системы (1.3)–(1.6) и ряды (2.2) в кинематические уравнения (1.7), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (-\bar{p}_1^{(n-1)} + \bar{s}_{11|1}^{(n-1)} + \bar{s}_{12|2}^{(n)}) = 0 \quad (2.3)$$

$$-\frac{1}{\alpha} \bar{p}_2^{\{-1\}} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (-\bar{p}_2^{\{n\}} - \bar{s}_{1|2}^{\{n\}} + \bar{s}_{12|1}^{\{n-1\}}) = 0 \tag{2.4}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{s}_{11}^{\{n\}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \bar{v}_1^{\{-1\}} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (\bar{v}_{1|2}^{\{n\}} + \bar{v}_{2|1}^{\{n-1\}}) \right) = 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{s}_{12}^{\{n\}} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{v}_{1|1}^{\{n-1\}} \right) \tag{2.5}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{s}_{11}^{\{n\}} \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{s}_{12}^{\{n\}} \right)^2 = f^2(\eta_{20}(\eta_1, \eta_2, \tau)) \tag{2.6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (\bar{v}_{1|1}^{\{n-1\}} + \bar{v}_{2|2}^{\{n\}}) = 0 \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1^{\{n-1\}}}{d\tau} &= \bar{v}_1^{\{n-1\}}, & \frac{d\eta_2^{\{n\}}}{d\tau} &= \bar{v}_2^{\{n\}}; & n &= 0, 1, 2, \dots \\ \eta_1^{\{n-1\}} \Big|_{\tau=0} &= \eta_{10} \delta_{n0}, & \eta_2^{\{n\}} \Big|_{\tau=0} &= \eta_{20} \delta_{n0}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где δ_{n0} – символ Кронекера; вертикальная черта в нижних индексах означает частное дифференцирование по безразмерным координатам η_1 и η_2 . Функции $\bar{s}_{12}^{\{-1\}}$ и $\bar{v}_2^{\{-1\}}$, встречающиеся в (2.4) и (2.5), следует положить тождественно нулевыми.

Граничные условия (1.8) и (1.9) запишутся следующим образом:

$$\bar{v}_2^{\{n\}} \Big|_{\eta_2 = \pm(1-\tau)} = \mp \delta_{n0} \tag{2.9}$$

$$\bar{s}_{12}^{\{n\}} \Big|_{\eta_2 = \pm(1-\tau)} = m \delta_{n0} \tag{2.10}$$

3. Метод асимптотического интегрирования. Для нахождения неизвестных коэффициентов в рядах (2.1) и закона движения частиц воспользуемся методом асимптотического интегрирования [9]. Он заключается в получении и анализе цепочки замкнутых систем уравнений относительно данных коэффициентов путем приравнивания нулю коэффициентов при различных степенях α в (2.3)–(2.7). Начало цепочки связано с обнулением двух сингулярных слагаемых в (2.4) и (2.5) с отрицательными степенями α :

$$\bar{p}_2^{\{-1\}} = 0, \quad \bar{v}_{1|2}^{\{-1\}} = 0 \tag{3.1}$$

Заметим, что в уравнениях (2.3), (2.4) и (2.7), порожденных линейными уравнениями (1.3) и (1.6), метод асимптотического интегрирования позволяет перейти от рядов к итерационным цепочкам постоянной длины по $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$-\bar{p}_1^{\{n-1\}} + \bar{s}_{1|1}^{\{n-1\}} + \bar{s}_{12|2}^{\{n\}} = 0, \quad -\bar{p}_2^{\{n\}} - \bar{s}_{1|2}^{\{n\}} + \bar{s}_{12|1}^{\{n-1\}} = 0, \quad \bar{v}_{1|1}^{\{n-1\}} + \bar{v}_{2|2}^{\{n\}} = 0 \tag{3.2}$$

Первое уравнение третьей цепочки в (3.2) $\bar{v}_{1|1}^{\{-1\}} + \bar{v}_{2|2}^{\{0\}} = 0$ вместе со вторым уравнением (3.1) и двумя граничными условиями (2.9) приводит к линейному по координатам полю скоростей в главных в (2.1) приближениях по α :

$$\bar{v}_1^{\{-1\}} = \frac{\eta_1}{1-\tau}, \quad \bar{v}_2^{\{0\}} = -\frac{\eta_2}{1-\tau} \tag{3.3}$$

Это поле соответствует плоскому сжатию-растеканию несжимаемой сплошной среды.

Подставим функции (3.3) в систему (2.8) при $n = 0$ и, интегрируя ее по τ , придем к закону движения в главном приближении

$$\eta_1^{(-1)} = \frac{\eta_{10}}{1 - \tau}, \quad \eta_2^{(0)} = \eta_{20}(1 - \tau) \quad (3.4)$$

Аргумент $\eta_{20}(\eta_1, \eta_2, \tau)$ у функции f^2 в (2.6) на основании (3.4) будет следующий

$$\eta_{20}(\eta_1, \eta_2, \tau) = \frac{\eta_2}{1 - \tau} \quad (3.5)$$

Правая часть (2.6) в главном приближении по α становится известной функцией одной безразмерной эйлеровой координаты η_2 .

Первое уравнение первой цепочки (3.2) $-\bar{p}_1^{(-1)} + \bar{s}_{12/2}^{(0)} = 0$ вместе с первым уравнением (3.1) и двумя граничными условиями (2.10) при важном предположении о непрерывной дифференцируемости функции $\bar{s}_{12}^{(0)}$ по η_2 на всем интервале изменения η_2 (1.11) приводит к следующим коэффициентам в главных по α слагаемых в (2.1) для s_{12} и p :

$$\bar{s}_{12}^{(0)} = -sm \frac{\eta_2}{1 - \tau}, \quad \bar{p}^{(-1)} = \frac{m}{1 - \tau} \left(\frac{1}{1 - \tau} - |\eta_1| \right), \quad (3.6)$$

где $s = \text{sign } \eta_1 = \text{sign } x_1$. Давление кусочно-линейно по простиранию слоя с изломом в срединном сечении $x_1 = 0$, а касательное напряжение при любом η_2 кусочно-постоянно по простиранию и терпит разрыв при $x_1 = 0$. Явная зависимость функции $\bar{s}_{12}^{(0)}$ (3.6) от s говорит о достоверности получаемого решения лишь вдали от сечения $x_1 = 0$. Этот факт известен в классической задаче Прандтля и математически объясняется тем, что в окрестности сечения $x_1 = 0$ ряды (2.1) теряют асимптотичность в смысле Пуанкаре [10]. Расстановка знаков у $\bar{s}_{12}^{(0)}$ именно как в (3.6) и у некоторых других функций подробно обсуждена в [8] применительно к задаче Прандтля.

Приравняем далее коэффициенты при α^0 в левой и правой частях (2.6) и с учетом (3.6) определим функцию $\bar{s}_{11}^{(0)}$:

$$\bar{s}_{11}^{(0)} = \sqrt{f^2 \left(\frac{\eta_2}{1 - \tau} \right) - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1 - \tau)^2}} \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует ограничение на заданную функцию f для осуществимости идеально жесткопластического процесса деформирования. Как четная функция своего аргумента $\eta_{20} \in [-1; 1]$ она должна удовлетворять неравенству

$$f(\eta_{20}) \geq m\eta_{20} \quad (3.8)$$

Напомним, что согласно (1.12) $f(1) = 1$, поэтому в точке $\eta_{20} = 1$, т.е. на границе области Ω (1.2) неравенство (3.8) заведомо выполняется и становится равенством при максимальном значении $m = 1$ коэффициента сцепления. На рисунке для $m = 1$ изображены возможные согласованные с (3.8) распределения по толщине предела текучести (a – непрерывно стратифицированный слой; b – слоистый композит).

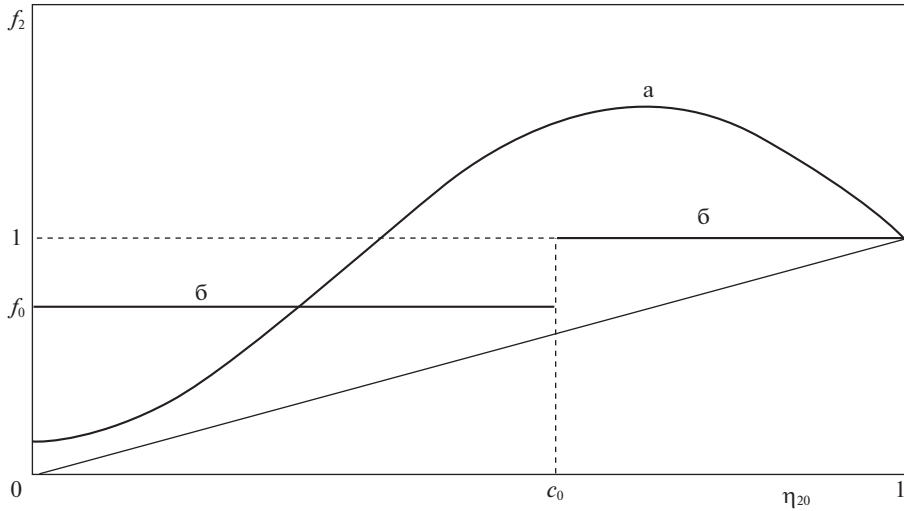


Рис. 1.

Приравнивание нулю коэффициентов при α^0 в (2.4) и (2.5) приводит к уравнениям

$$(\bar{p}^{(0)} + \bar{s}_{11}^{(0)})_2 = 0, \quad \bar{s}_{11}^{(0)} \bar{v}_{12}^{(0)} = 2\bar{s}_{12}^{(0)} \bar{v}_{11}^{(-1)}, \quad (3.9)$$

из которых после интегрирования по η_2 определяются функции $\bar{p}^{(0)}$ и $\bar{v}_1^{(0)}$ – коэффициенты при первых регулярных по α слагаемых в разложениях p и v_1 в (2.1):

$$\bar{p}^{(0)} = -\sqrt{f^2 \left(\frac{\eta_2}{1-\tau} \right) - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2}} + a(\eta_1) \quad (3.10)$$

$$\bar{v}_1^{(0)} = -\frac{2sm}{(1-\tau)^2} \int \eta_2 \left[f^2 \left(\frac{\eta_2}{1-\tau} \right) - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2} \right]^{-1/2} d\eta_2 + b(\eta_1), \quad (3.11)$$

где a и b – пока произвольные функции от η_1 .

Для нахождения этих функций приравняем нулю коэффициенты при α в (2.3) и (2.7):

$$(-\bar{p}^{(0)} + \bar{s}_{11}^{(0)})_1 + \bar{s}_{12|2}^{(1)} = 0, \quad v_{11}^{(0)} + \bar{v}_{2|2}^{(1)} = 0 \quad (3.12)$$

Продифференцируем равенства (3.12) по η_2 и, пользуясь выражениями (3.7), (3.10) и (3.11) для $\bar{s}_{11}^{(0)}$, $\bar{p}^{(0)}$ и $\bar{v}_1^{(0)}$, придем к дифференциальным уравнениям

$$\bar{s}_{12|22}^{(1)} = 0, \quad \bar{v}_{2|22}^{(1)} = 0 \quad (3.13)$$

с однородными граничными условиями (2.9), (2.10) на поверхностях слоя, касающихся движущихся плит. Следовательно, всюду в слое

$$\bar{s}_{12}^{(1)} \equiv 0, \quad \bar{v}_2^{(1)} \equiv 0 \quad (3.14)$$

Подставляя теперь нулевые функции (3.14) в (3.12), получим что $da/d\eta_1 = 0$ и $db/d\eta_1 = 0$, т.е. с точностью до движения всего слоя как недеформируемого целого вдоль оси x_1 можно положить $a \equiv 0$ и $b \equiv 0$.

Таким образом, определены несколько первых членов в каждом из разложений (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{V} &= \frac{\eta_1}{\alpha(1-\tau)} - \frac{2sm}{(1-\tau)^2} \int \eta_2 \left[f^2 \left(\frac{\eta_2}{1-\tau} \right) - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2} \right]^{-1/2} d\eta_2 + O(\alpha) \\ \frac{v_2}{V} &= -\frac{\eta_2}{1-\tau} + O(\alpha^2), \quad \frac{\sqrt{2}s_{11}}{\sigma_s^0} = \sqrt{f^2 \left(\frac{\eta_2}{1-\tau} \right) - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2}} + O(\alpha) \\ &\quad \frac{\sqrt{2}s_{12}}{\sigma_s^0} = -sm \frac{\eta_2}{1-\tau} + O(\alpha^2) \\ \frac{\sqrt{2}p}{\sigma_s^0} &= \frac{m}{\alpha(1-\tau)} \left(\frac{1}{1-\tau} - |\eta_1| \right) - \sqrt{f^2 \left(\frac{\eta_2}{1-\tau} \right) - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2}} + O(\alpha) \end{aligned} \quad (3.15)$$

4. Случай трехслойного “сэндвича”. Если идеально жесткопластический слой непрерывно стратифицирован по пределу текучести, т.е. функция f в (1.12) непрерывна по своему единственному аргументу η_{20} , то все члены разложений (3.15) непрерывны по поперечной координате. Рассмотрим подробнее важный в приложениях случай кусочно-постоянной зависимости f от η_{20} , означающий, что плоский слой Ω_0 (1.1) – слоистый композит. Для определенности положим, что этот композит трехслойный и представляет собой так называемый “сэндвич” [11, 12] (график *б* на рисунке):

$$f = \begin{cases} f_0, & -c_0 < \eta_{20} < c_0; \quad c_0 < 1 \\ 1, & c_0 < |\eta_{20}| \leq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь учтено требование масштабирования $f(\pm 1) = 1$. Условие (3.8) приводит к ограничению на константы c_0 и f_0 в (4.1):

$$f_0 \geq mc_0, \quad (4.2)$$

т.е. средний слой сэндвича” не должен иметь слишком низкий предел текучести.

Заметим, что из (2.8) при $n = 1$ и (3.14) следует, что $\eta_2^{(1)} \equiv 0$ и с точностью уже до α^2 обратный закон движения (3.5) по-прежнему имеет место. Независимость правой части (3.5) от η_1 говорит о том, что изначально прямолинейные границы раздела прослоек “сэндвича” $\eta_{20} = \pm c_0$ в процессе сжатия ($\tau > 0$) остаются прямолинейными: $\eta_2 = \pm c$, где $c = c_0(1-\tau)$.

Подстановка (4.1) в разложения (3.15) приводит к тому, что функции s_{11} , p и v_1 оказываются разрывными по толщине слоя. При этом у p и v_1 разрыв претерпевают не главные слагаемые разложений, а главные, сингулярные, от поперечной координаты не зависят. Функции s_{12} и v_2 остаются непрерывными. Вычисляя интеграл в выражении для v_1 в (3.15), получим

$$\frac{v_1}{V} = \frac{\eta_1}{\alpha(1-\tau)} - \begin{cases} \frac{2s}{m} \sqrt{f_0^2 - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2}}, & -c < \eta_2 < c; \quad c < 1-\tau \\ \frac{2s}{m} \sqrt{1 - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2}}, & c < |\eta_2| \leq 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

В размерном виде разложения (3.15) в случае “сэндвича” имеют вид

$$\begin{aligned}
 v_1 &= V \left(\frac{x_1}{h} - \frac{2s}{m} \sqrt{f^2 - \frac{m^2 x_2^2}{h^2}} + O(\alpha) \right), & v_2 &= V \left(-\frac{x_2}{h} + O(\alpha^2) \right) \\
 s_{11} &= \frac{\sigma_s^0}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{f^2 - \frac{m^2 x_2^2}{h^2}} \right) + O(\alpha), & s_{12} &= \frac{\sigma_s^0}{\sqrt{2}} \left(-sm \frac{x_2}{h} + O(\alpha^2) \right) \\
 p &= \frac{\sigma_s^0}{\sqrt{2}} \left(\frac{m}{h} (l - |x_1|) - \sqrt{f^2 - \frac{m^2 x_2^2}{h^2}} + O(\alpha) \right),
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

где безразмерная четная кусочно-постоянная функция f согласно (4.1) следующая:

$$f = \begin{cases} f_0, & -c_0 h < x_2 < c_0 h \\ 1, & c_0 h < |x_2| \leq 1 \end{cases} \tag{4.5}$$

5. Применимость квазистатического приближения. В работах [6, 7, 13] подробно аналитически обсуждаются условия достоверности квазистатического приближения в классической задаче Прандтля и некоторых ее обобщениях. На основе анализа сингулярных асимптотик по малому геометрическому параметру выводятся необходимые и достаточные неравенства применимости квазистатического подхода, заключающегося в рассмотрении уравнений равновесия (1.3), а не уравнений движения:

$$\frac{1}{Eu} \ll \frac{h^2}{l^2} \ll 1, \tag{5.1}$$

где $Eu = \sigma_s / (\rho V^2)$ – характерное в задаче число Эйлера, ρ – постоянная плотность пластического материала.

Правое неравенство в (5.1) соответствует тонкослойному приближению. Если оно выполняется в начальный момент времени, то в силу специфики кинематики тем более верно и в последующие моменты. С левым же неравенством в (5.1) ситуация не такая тривиальная. Число $1/Eu$ постоянно в данной краевой задаче, в то время как дробь $h^2(t)/l^2(t)$ монотонно убывает до нуля на интервале $t \in [0; t_*]$. Следовательно, в некотором временном диапазоне перед моментом схлопывания плит t_* левое неравенство заведомо нарушится.

Подставляя из соотношений (1.2) в неравенства (5.1) функции времени h и l , получим, что применительно к задаче о сжатии неоднородного по толщине слоя эти неравенства таковы:

$$\frac{1}{Eu} \ll \frac{(h_0 - Vt)^4}{h_0^2 l_0^2} \ll 1, \quad Eu = \frac{\sigma_s^{\min}}{\rho V^2}, \tag{5.2}$$

где число Эйлера построено по минимальному по толщине значению σ_s^{\min} предела текучести. В силу малости параметра α (1.1) правое неравенство (5.2) выполнено. Левое же будет удовлетворяться на следующем диапазоне времени:

$$t_* - t \ll \frac{\sqrt{h_0 l_0}}{V^4 \sqrt{Eu}} \tag{5.3}$$

При значительном приближении t к t_* , когда условие (5.3) нарушается, происходит качественная перестройка силовых режимов сдавливания слоя, что влияет на технологию процесса.

Работа выполнена при поддержке РФФ (грант 22-21-00077).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
2. *Ильюшин А.А.* Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 6. С. 693–713.
3. *Колмогоров В.Л.* Механика обработки металлов давлением. Екатеринбург: Изд-во УрГТУ–УПИ, 2001. 836 с.
4. *Победра Б.Е., Гузей И.Л.* Математическое моделирование деформирования композитов с учетом термодиффузии // Матем. моделир. систем и процессов. 1998. № 6. С. 82–91.
5. *Георгиевский Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды. М.: Ленанд, 2018. 560 с.
6. *Георгиевский Д.В.* Асимптотическое интегрирование задачи Прандтля в динамической постановке // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 97–105.
7. *Georgievskii D.V., Mueller W.H., Abali B.E.* Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // ZAMM. 2019. V. 99. № 12. P. 1–11.
8. *Георгиевский Д.В.* Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 1. С. 83–93.
9. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593–608.
10. *Кравченко В.Ф., Несененко Г.А., Пустовойт В.И.* Асимптотики Пуанкаре решения задач не-регулярного тепло- и массопереноса. М.: Физматлит, 2006. 420 с.
11. *Asmus M., Naumenko K., Oechsner A., Eremeyev V.A., Altenbach H.* A generalized framework towards structural mechanics of three-layered composite structures // Technische Mechanik. 2019. V. 39. № 2. P. 202–219.
12. *Asmus M., Altenbach H.* On dynamic optimality of anti-sandwiches // in: Dyn.&Control of Adv. Struct.&Machines. Ser. Adv. Struct. Mater. V. 156. Springer, 2021. P. 1–11.
13. *Куйко И.А., Кадымов В.А.* Обобщение задачи Л. Прандтля о сжатии полосы // Вестн. МГУ. Сер. I. Математика, механика. 2003. № 4. С. 50–56.

Thin-Layered Asymptotics in the Generalized Prandtl Problem for Nonhomogeneous by Thickness Plastic Material

D. V. Georgievskii^{a,b,c,#}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^c *Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

The generalized Prandtl boundary value problem is considered, simulating a quasistatic technological process of compression in one direction and quick spreading in the other of a thin incompressible perfect rigid plastic layer (a plane strain state) consistent with the Mises–Hencky plasticity condition with a variable yield stress by thickness. Stratification can be either continuous or piecewise constant, in the latter case, the problem simulates the pressing of layered plastic composites (laminates, “sandwiches”) and precision bringing them to the desired thickness. On the basis of thin-layer singular asymptotics for a small geometric parameter, an approximate solution for kinematic and force quantities is found using the asymptotic integration method developed in the work. The applicability of the quasistatic approach to various time ranges of the compression process is discussed.

Keywords: perfect rigid plastic material, the Prandtl problem, thin-layered asymptotics, quasistatics, nonhomogeneity, stratification, layered composite, “sandwich”, the Euler number

REFERENCES

1. *Ishlinskii A. Yu., Ivlev D. D.* Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian)
2. *Il'yushin A. A.* Complete plasticity in the processes of flow between rigid surfaces, the analogy with sand embankment, and some applications // JAMM, 1955, vol. 19, no. 6, pp. 693–713. (in Russian)
3. *Kolmogorov V. L.* Mechanics of Metal Processing by Pressure. Ekaterinburg: UrGTU–UPI Publ., 2001. 836 p. (in Russian)
4. *Pobedrya B. E., Guzey I. L.* Mathematical modeling of composites deformation with regard for thermal diffusion // Math. Model. Syst.&Proc., 1998, no. 6, pp. 82–91. (in Russian)
5. *Georgievskii D. V.* Selected Problems of Continuum Mechanics. Moscow: Lenand, 2018. 560 p. (in Russian)
6. *Georgievskii D. V.* Asymptotic Integration of the Prandtl Problem in Dynamic Statement // Mech. Solids, 2013, no. 1, pp. 79–85.
7. *Georgievskii D. V., Mueller W. H., Abali B. E.* Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // ZAMM, 2019, vol. 99, no. 12, pp. 1–11.
8. *Georgievskii D. V.* Asymptotic expansions and possibilities to drop the hypotheses in the Prandtl problem // Mech. Solids, 2009, no. 1, pp. 70–78.
9. *Goldenevizer A. L.* Construction of the approximate theory of shells by means of asymptotic integration of elasticity theory equations // JAMM, 1963, vol. 27, no. 4, pp. 593–608. (in Russian)
10. *Kravchenko V. F., Nesenenko G. A., Pustovoit V. I.* Poincare Asymptotics for Problems of Irregular Heat and Mass Transfer. Moscow: Fizmatlit, 2006. 420 p. (in Russian)
11. *Asmus M., Naumenko K., Oechsner A., Eremeyev V. A., Altenbach H.* A generalized framework towards structural mechanics of three-layered composite structures // Technische Mechanik, 2019, vol. 39, no. 2, pp. 202–219.
12. *Asmus M., Altenbach H.* On dynamic optimality of anti-sandwiches // in: Dyn.&Control Adv. Struct.&Machines. Ser. Adv. Struct. Mater, vol. 156, Springer, 2021, pp. 1–11.
13. *Kiyko I. A., Kadymov V. A.* Generalization of the Prandtl Problem on the Compression of a Band // MSU Bull., 2003, vol. 58, no. 4, pp. 50–53.