ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 3, с. 370–380

УДК 532.59

К 120-летию Л.Н. Сретенского

СТОЯЧИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Калиниченко[1,*]

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: kalin@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 10.03.2022 г.
После доработки 02.04.2022 г.
Принята к публикации 05.04.2022 г.

Обобщены теоретические и численные результаты анализа дисперсионного уравнения стоячих волн на поверхности вязкой жидкости, опубликованные Л.Н. Сретенским в 1941 г. Предложен механизм вязкой регуляризации волнового движения, согласно которому наблюдаемые в эксперименте эффекты связаны с наличием области коротковолновой отсечки, где вязкая диссипация становится доминирующим фактором и происходит подавление коротковолновых возмущений, ответственных за разрушение стоячей волны.

Ключевые слова: стоячая волна, вязкая жидкость, дисперсионное уравнение, затухающие колебания, апериодическое затухание

DOI: 10.31857/S0032823522030067

1. Введение. Задача затухания гравитационно-капиллярных волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости впервые сформулирована в работах [1, 2] более столетия назад; классические решения для малой и большой вязкости обобщены в монографии Ламба [3].

В 1941 г. Л.Н. Сретенский опубликовал результаты исследования стоячих волн на поверхности тяжелой вязкой жидкости [4]. Приведенное в [4] решение дисперсионного уравнения справедливо для жидкости произвольной вязкости и имело целый ряд весьма интересных следствий. Как подчеркивается в [5], “значение этой работы не только в получении ряда интересных результатов физического характера. Еще в XIX веке Г. Ламб обратил внимание на возможность представить поле скоростей в виде суперпозиции потенциального и чисто соленоидального полей. В работе Сретенского эта точка зрения проводится последовательно, показана эффективность такого представления и дано его обоснование”.

Разделение поля скоростей жидкости на потенциальную и вихревую части использовалось в [6, 7] при решении задач о волнах в вязкой жидкости, ограниченном рассмотрением предельных по вязкости случаев.

Следует особо отметить работы [8, 9], в которых при рассмотрении гравитационно-капиллярных волн учитывалась конечная глубина вязкой жидкости. Это приводит к двухпараметрическому дисперсионному уравнению.

В [10] для описания пространственных стоячих волн в вязкой жидкости бесконечной глубины используются переменные Лагранжа, и приведены асимптотики дисперсионного уравнения.

Далее как обобщение результатов [4] рассматриваются дисперсионные свойства линейных гравитационных стоячих волн на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины; приводятся данные эксперимента [11, 12] качественно подтверждающие основные положения [4].

2. Дисперсионное уравнение. Ставится задача исследования малых волновых движений тяжелой вязкой жидкости бесконечной глубины при отсутствии каких-либо напряжений на свободной поверхности. Двумерные колебания жидкости описываются в декартовой системе координат (x, y) с началом на невозмущенной поверхности; ось y — вертикальна.

Линеаризованные уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v - g, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

Здесь ρ, ν, g — плотность, кинематическая вязкость и ускорение силы тяжести.

Если движение вязкой жидкости представить в виде

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy, \tag{2.2}$$

то из (2.1) следует, что функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа, и ψ — уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu\Delta\psi = 0 \tag{2.4}$$

В этом случае потенциальная часть φ движения жидкости полностью отделена от вихревой его части ψ.

Пусть малые смещения свободной поверхности задаются функцией

$$y = \eta(x, t)$$

Тогда задача (2.3), (2.4) замыкается граничными условиями на свободной поверхности $y = 0$: кинематическим условием и условиями равенства нулю тангенциального и нормального напряжений

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\frac{p}{\rho} + 2\nu\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Учитывая соотношения (2.2), получаем следующие граничные условия задачи (2.3), (2.4)

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\psi + \frac{2\nu}{g}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right\}\Bigg|_{y=0} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 2\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=0} \tag{2.6}$$

Для свободной поверхности справедливо следующее выражение

$$\eta = \left\{\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{2\nu}{g}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right\}\Bigg|_{y=0} \tag{2.7}$$

Таким образом, задача об определении стоячих волн на поверхности безграничной вязкой жидкости приводится к решению граничной задачи (2.3–2.6). Ищем решения в следующем виде

$$\varphi = Ae^{ky}\cos kx, \quad \psi = Be^{my}\sin kx, \tag{2.8}$$

где k, m – некоторые константы, A, B – неизвестные функции времени.

Поскольку ψ удовлетворяет уравнению теплопроводности (2.4), то

$$\frac{dB}{dt} = \nu(m^2 - k^2)B$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$B = B_0e^{-\omega^*t}, \quad \psi = B_0e^{-\omega^*t+my}\sin kx, \tag{2.9}$$

где $\omega^* = \nu(k^2 - m^2) = b + i\omega$ – комплексная частота колебаний жидкости; B_0 – постоянная интегрирования.

Функцию $A(t)$ находим при подстановке φ, ψ в граничное условие (2.6)

$$-\omega^*B_0e^{-\omega^*t}\sin kx = 2\nu[-k^2B_0e^{-\omega^*t}\sin kx - k^2A\sin kx]$$

$$A = -\frac{\omega^* - 2\nu k^2}{2\nu k^2}B_0e^{-\omega^*t}$$

Итак

$$\varphi = -\frac{\omega^* - 2\nu k^2}{2\nu k^2}B_0e^{-\omega^*t+ky}\cos kx \tag{2.10}$$

Подставляя (2.9), (2.10) в граничное условие (2.5), получим

$$(\omega^* - 2\nu k^2)^2 + gk = 4\nu^2mk^3 \tag{2.11}$$

Если ввести новые переменные (ϑ, ζ) по формулам

$$\vartheta = \frac{\nu k^2}{\omega_0}, \quad \zeta = -\frac{\omega^* - 2\nu k^2}{\omega_0}; \quad \omega_0 = (gk)^{1/2} \tag{2.12}$$

то (2.10) принимает вид

$$[1 + \zeta^2]^2 = 16\vartheta^3(\zeta - \vartheta) \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) связывает переменные (ϑ, ζ), устанавливая зависимость между длиной стоячей волны и ее частотой. Если известна пара значений (ϑ, ζ), то длина λ стоячей волны и величина ω^*, характеризующая временные изменения волнового процесса, находятся следующим образом

$$\lambda = 2\pi\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3}\vartheta^{-2/3}, \quad \omega^* = \left(\frac{g^2}{\nu}\right)^{1/3}(2\vartheta - \zeta)\theta^{1/3}, \tag{2.14}$$

Отметим, что рассматриваемая задача характеризуется двумя пространственными масштабами – длиной стоячей волны $\lambda = 2\pi/k$ и стоксовым вязким масштабом $\delta_\nu = \sqrt{\nu/\omega_0}$. Именно соотношением этих масштабов $\vartheta = 4\pi^2(\delta_\nu/\lambda)^2$ определяются различные режимы волнового движения вязкой жидкости.

3. Решение дисперсионного уравнения. В работе [4] дисперсионное уравнение (2.13) решалось численно методом Греффа (квадрирование корней многочлена). Для диапазона значений $0.06 \le \vartheta \le 10$ приведены [4] таблицы, содержащие значения комплексных

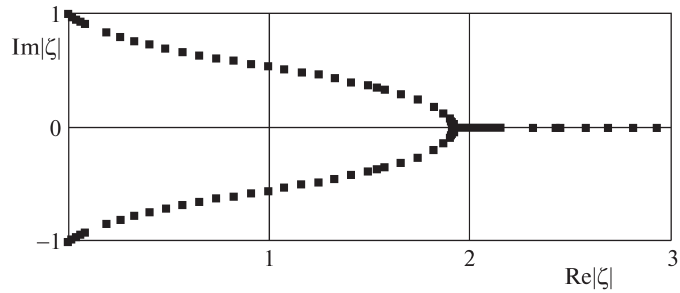


Рис. 1. Корни уравнения (2.13) на комплексной ζ-плоскости при $0.0001 \le \vartheta \le 1.7$.

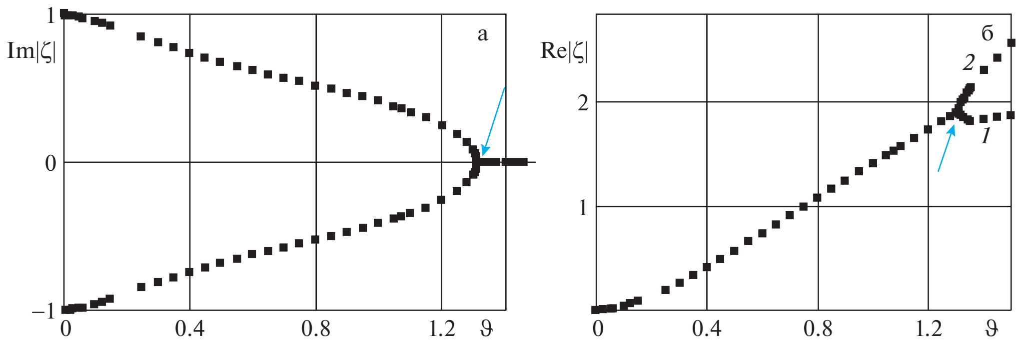


Рис. 2. Зависимость комплексного корня ζ дисперсионного уравнения от параметра ϑ: а – $\operatorname{Im}\zeta$, б – $\operatorname{Re}\zeta$. Стрелкой отмечено значение $\vartheta = 1.31$.

корней уравнения (2.13) и соответствующие оценки для частоты и коэффициента затухания стоячих волн. В настоящей работе численное решение (2.13) проводилось с использованием стандартных процедур пакета Mathematica. Отметим высокую точность проведенных [4] расчетов – сравнение вычисленных величин показало совпадение с точностью до 10^{-3}.

Для каждого конкретного значения θ можно определить корни $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, ζ_4 уравнения (2.13). Из этих четырех корней два корня отбрасывались, поскольку соответствующая им величина m

$$m = \frac{1}{4}\left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{1/3}\frac{1+\zeta^2}{\vartheta^{4/3}}$$

имеет отрицательную действительную часть, что противоречит экспоненциальному затуханию завихренности с глубиной.

Имеющие физический смысл корни уравнения (2.13) при $0.0001 \le \vartheta \le 1.7$ показаны на рис. 1. Зависимости $\zeta(\vartheta)$ представлены на рис. 2, на котором стрелками отмечено значение $\vartheta = 1.31$. Ниже этого значения имеем пару комплексно сопряженных корней, отвечающих затухающему колебательному режиму; выше ($\vartheta > 1.31$) – движение жидкости носит затухающий апериодический характер.

Проведем анализ данных на рис. 2 в соответствии с предельными оценками [3, 8].

В случае длинных волн, т.е. при $\vartheta \ll 1$ правую часть (2.13) можно приравнять нулю, и соответствующие корни равны

$$\zeta = \pm i$$

или с учетом (2.12)

$$\omega^* = \pm i\omega_0 - 2\nu k^2$$

Знак для корня или частоты может быть выбран любым, поскольку он влияет только на фазу волны. Таким образом, в длинноволновом пределе вязкость жидкости на частоту волны не влияет.

При $\vartheta > 1.31$ имеем два корня ζ_1, ζ_2, отвечающие апериодическому затуханию — ветви 1, 2 на рис. 2б. Их приближенные значения

$$\zeta_1 = 2\vartheta - \frac{1}{2\vartheta}, \quad \zeta_2 = 1.09\vartheta$$

Соответствующие коэффициенты затухания равны

$$b_1 = \frac{g}{2\nu k}, \quad b_2 = 0.91\nu k^2$$

Проведенные оценки [8] показывают для ζ_1 равные вклады потенциальной φ и вихревой ψ частей движения жидкости в апериодическое затухание. В целом движение вязкой жидкости определяется начальной деформацией ее свободной поверхности и медленным возращением к горизонтальному невозмущенному состоянию.

В случае второго корня ζ_2 быстрое затухание начальных возмущений связано с преобладанием вихревой части движения [8].

Для представления дисперсионных зависимостей $\omega^*(\lambda)$ стоячих волн на поверхности жидкости различной вязкости введем безразмерную комплексную частоту и безразмерную длину волны

$$\Omega^* = \omega^*\left(\frac{\nu}{g^2}\right)^{1/3} = (2\vartheta - \zeta)\vartheta^{1/3}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{1/3} = \vartheta^{-2/3}$$

В этих переменных дисперсионные кривые представлены на рис. 3.

Кривая *1* на рис. 3а соответствует зависимости частоты $\operatorname{Im}\Omega^*$ стоячей волны от ее длины λ^*. Видно, что частота монотонно растет с уменьшением длины, достигает максимума $\operatorname{Im}\Omega^* = 0.546$ при $\lambda^* = 1.898$ и затем быстро уменьшается до нуля при $\lambda^* = 0.833$. Ниже этого значения периодических движений вязкой жидкости не существует. Таким образом, критическое значение длины волны $\lambda^*_{cr} = 0.833$ устанавливает коротковолновый предел существования гравитационных волн на свободной поверхности жидкости, ниже которого стоячие волны отсутствуют.

Кривые *2* на рис. 3а и б соответствуют зависимости коэффициента затухания $\operatorname{Re}\Omega^*$ стоячей волны от ее длины λ^*. Для него характерен монотонный рост, и при $\lambda^*_{cr} = 0.833$ безразмерный коэффициент затухания составляет величину $\operatorname{Re}\Omega^* = 0.758$. Кривые *3* и *4* на рис. 3б определяют апериодическое затухание — соответствующие корни ζ_1 и ζ_2 дисперсионного уравнения (2.13). С уменьшением $\lambda^* < < 0.833$ безразмерный коэффициент затухания $\operatorname{Re}\Omega^*$ или спадает до нуля (кривая *3*), или растет до бесконечности (кривая *4*).

4. Применение результатов анализа в эксперименте. В экспериментах [11, 12] обнаружено, что увеличение кинематической вязкости жидкости в 50 раз по сравнению с водой кардинально изменяет динамику волнового движения — наблюдается регуляриза-

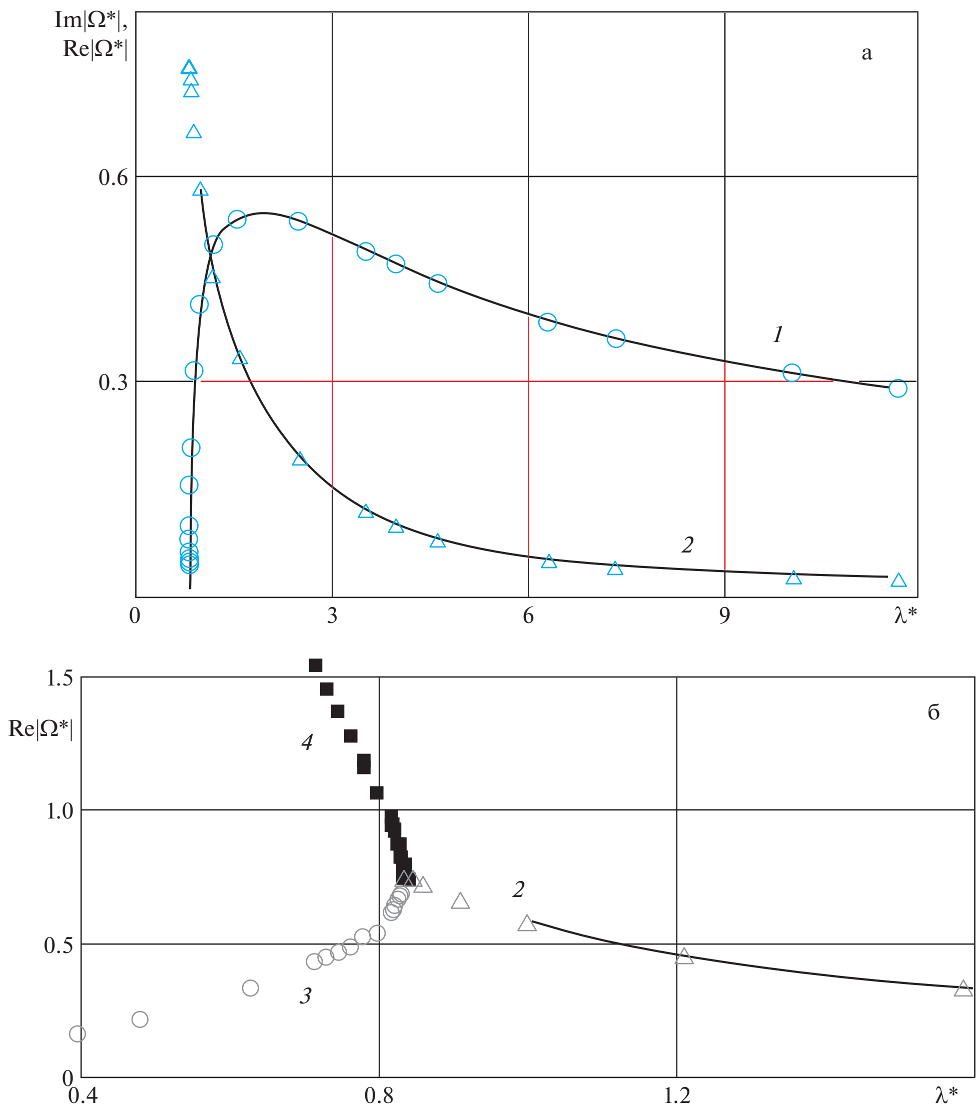


Рис. 3. а – зависимости безразмерных частоты (*1*) и коэффициента затухания (*2*) от длины стоячей волны. б – коэффициент затухания в окрестности критического значения параметра $\vartheta = 1.31$ – переход от затухающих колебаний (*2*) к апериодическому режиму (*3*, *4*).

ция стоячих гравитационных волн с полным подавлением процесса их разрушения в виде струйного выброса из гребня и последующего его распада, рис. 4.

В экспериментах [11, 12] по изучению влияния вязкости на интенсивные колебания жидкости использовался режим параметрического возбуждения второй моды ($n = 2$) стоячих гравитационных волн на свободной поверхности жидкости глубиной $h = 15$ см в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде длиной $L = 50$ см, шириной $W = 4$ см и высотой 50 см. Наблюдаемые двумерные волновые движения могут рассматриваться

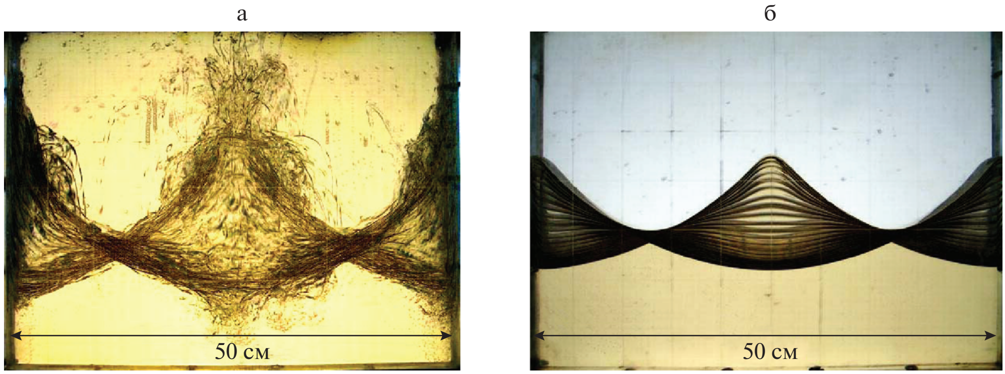


Рис. 4. а – Разрушающаяся волна на свободной поверхности воды ($\nu = 1$ сСт); б – регулярная волна высоты $H = 12.6$ см на поверхности водного раствора сахара ($\nu = 85.97$ сСт): частоты волн $\omega = 10.10$ с$^{-1}$; скорость съемки 30 к/с; огибающие получены при наложении 60 кадров (три периода волны).

как волны на поверхности глубокой воды, поскольку $\omega_0^2 = gk \operatorname{th} kh \sim gk$; здесь $\lambda = 50$ см, $k = 2\pi/\lambda$.

Механизм регуляризации разрушающихся волн (рис. 4) нельзя объяснить простым увеличением вязкости на два порядка. Действительно, эксперименты показали пятикратное увеличение коэффициента затухания – $b_{\exp} = 0.157$ с$^{-1}$ для воды и 0.752 с$^{-1}$ для раствора сахара. Однако показанная на рис. 4 волновая картина наблюдалась в стационарном режиме колебаний воды и раствора сахара.

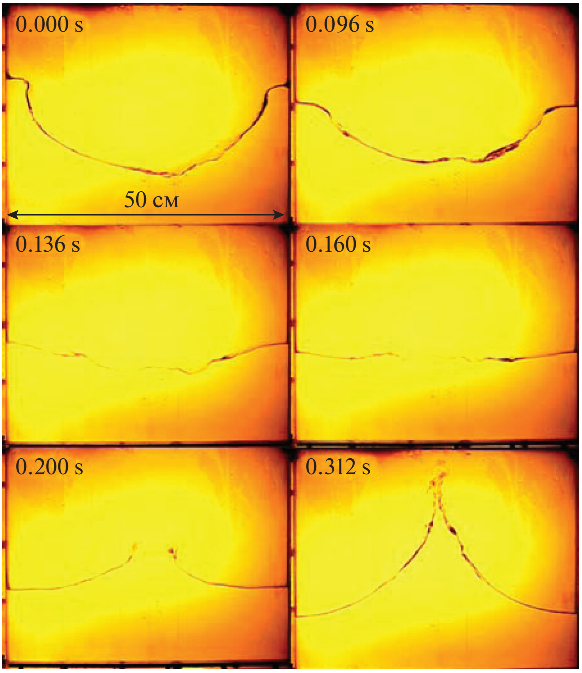
Рассмотрим влияние вязкости жидкости на динамику нерегулярных и разрушающихся волн – рис. 5.

Для воды последовательность кадров, отображающих зарождение, развитие и схлопывание каверны на стадии формирования гребня в центральной части сосуда приведена на рис. 5а. При переходе впадина–гребень центральная часть жидкости перемещается вверх, и в интервале 0.096–0.160 с на волновом профиле видны мелкомасштабные возмущения размерами не более 5 см. При $t = 0.200$ с в середине профиля волны наблюдается сформировавшаяся каверна, последующее схлопывание которой приводит к струйному всплеску с отрывом капель.

При $\nu = 85.97$ сСт профили волн на поверхности раствора сахара – абсолютно гладкие для всего полупериода – рис. 5б. Видно, что волна нелинейная, но регулярная, ее профиль – без каких-либо мелкомасштабных возмущений и признаков разрушения.

Единственной причиной отличия волновых картин на рис. 5 является вязкость рабочей жидкости. Увеличение вязкости колеблющейся жидкости до 85.97 сСт приводит к полному подавлению процесса разрушения и регуляризации стоячей волны: исчезают мелкомасштабные возмущения, приводящие к образованию коллапсирующей каверны. Таким образом, вязкость жидкости является своеобразным фильтром коротк омасштабных возмущений.

Для интерпретации полученных экспериментальных результатов используем результаты численного анализа дисперсионного уравнения (2.13) в виде зависимостей $\omega(\lambda)$ и $b(\lambda)$ – рис. 6. Частота свободных стоячих гравитационных волн на поверхности бесконечно глубокой идеальной жидкости ($\nu = 0$) определяется соотношением $\omega_0 = (gk)^{1/2}$ и возрастает до бесконечности при уменьшении длины волны – кривая *1* на рис. 6а. Если учесть вязкость колеблющейся жидкости, то частота волны принимаа



б

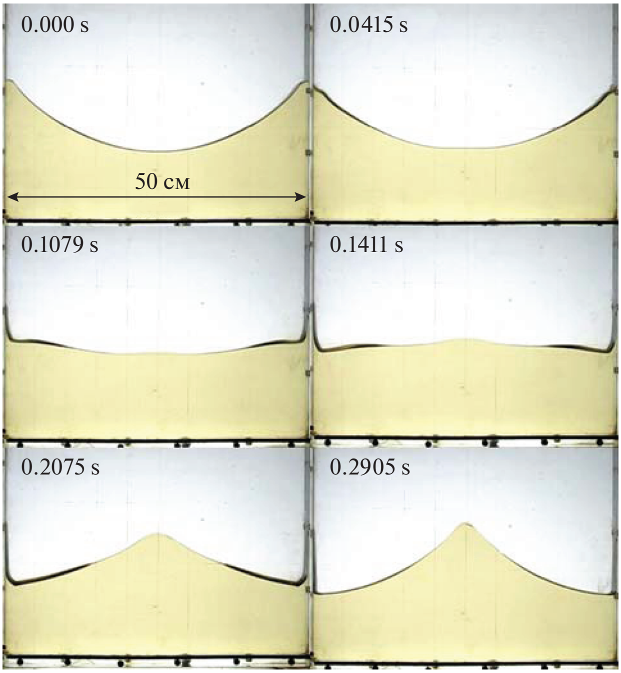


Рис. 5. Последовательности видеокадров, иллюстрирующих (а) процесс разрушения гравитационных волн Фарадея на свободной поверхности воды и (б) регулярную волновую моду на поверхности водного раствора сахара ($\nu = 85.97$ сСт) в течение половины периода волны; момент времени указан в верхнем левом углу кадра.

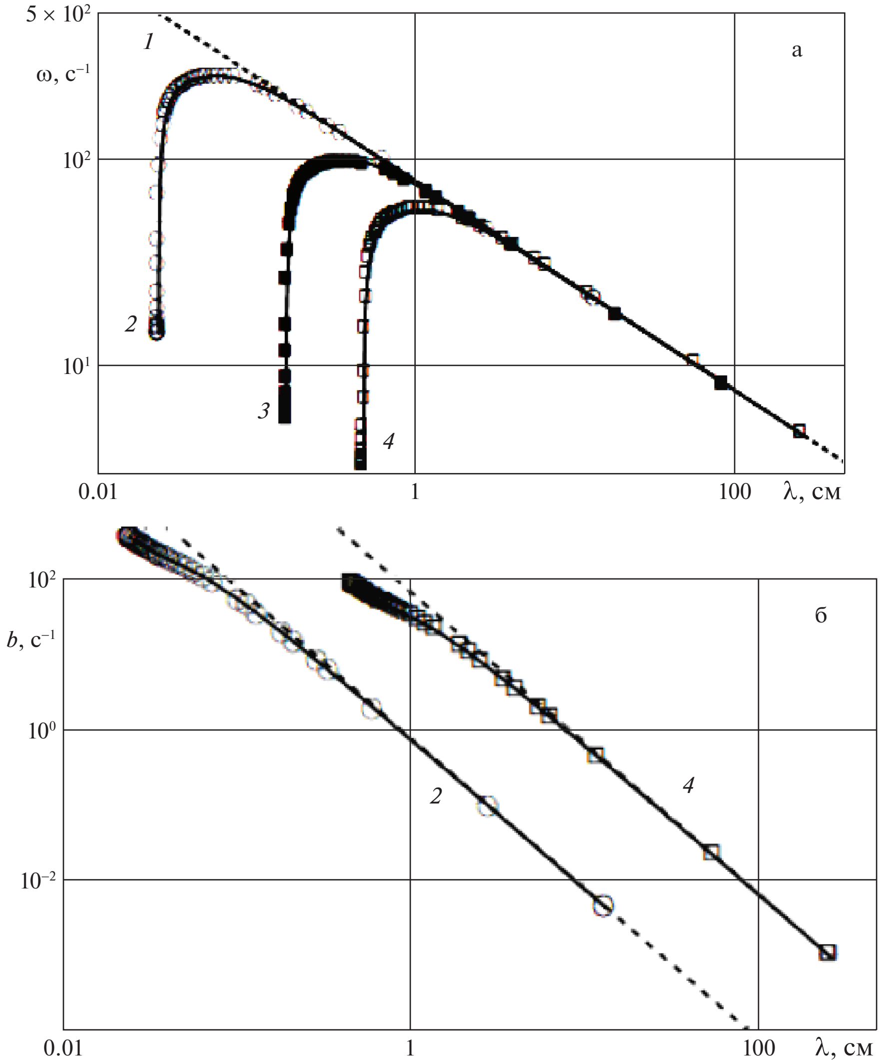


Рис. 6. Зависимости $\omega(\lambda)$ и $b(\lambda)$: кривые *1* – *4* – ν = 0, 1, 16.24, и 85.97 сСт.

ет нулевое значение $\omega = 0$ при некоторой критической длине волны λ_{cr}. Для воды (кривая *2*) эта величина равна $\lambda_{cr} = 0.02$ см. При увеличении вязкости до 16.24 сСт (52% раствор сахара) имеем $\lambda_{cr} = 0.15$ см (кривая *3*). Для 63% раствора сахара (кривая *4*) критическая длина волны оценивается как $\lambda_{cr} = 0.44$ см.

Следовательно, имеются критические значения длины волны λ_{cr}, устанавливающие коротковолновый предел возбуждения гравитационных волн. При $\lambda < \lambda_{cr}$ вязкость жидкости полностью подавляет всякое волновое движение. Увеличение вязкости приводит к возрастанию этого предела. Этот результат подтверждает данные эксперимента о вязкой регуляризации разрушающихся стоячих волн и позволяет объяснить коротковолновой отсечкой отсутствие мелкомасштабных возмущений на профилях волн вязкой жидкости. Заниженные (по сравнению с экспериментальными) расчетные значения λ_{cr} можно объяснить тем, что в дисперсионном соотношении (2.13) не учтены конечная глубина жидкости, а также вязкие потери на боковых стенках и дне сосуда.

Если учесть поверхностное натяжение жидкостей σ и рассмотреть гравитационно-капиллярные волны, для которых $\omega_0 = (gk + \sigma k^3/\rho)^{1/2}$, то дисперсионное уравнение (2.13) не изменится, а значения критической длины волны для воды, и 63% раствора сахара $\lambda_{cr} = 4.8\ 10^{-6}$, 0.04 см оказываются существенно меньше соответствующих величин для гравитационных волн.

На рис. 6б для воды (кривая *2*) и раствора сахара (кривая *4*) представлены зависимости коэффициента затухания от длины волны, полученные при численном решении (2.13). Для этих жидкостей для второй волновой моды ($\lambda = 50$ см) имеем 0.0003 и 0.0246 с$^{-1}$ соответственно. Пунктирные зависимости на рис. 6б рассчитаны по формуле $b = 2\nu k^2$ без учета дна и боковых стенок. Именно по этой причине расчетные значения коэффициента затухания существенно меньше экспериментальных.

Таким образом, из (2.13) следует, что именно вязкость жидкости обеспечивает отсечку коротковолновых возмущений, ответственных за разрушение волн.

Заключение. Обобщены теоретические и численные результаты анализа дисперсионного уравнения стоячих волн на поверхности вязкой жидкости, опубликованные Л.Н. Сретенским в 1941 г.

Предложен механизм вязкой регуляризации волнового движения, согласно которому наблюдаемые в эксперименте эффекты связаны с наличием области коротковолновой отсечки, где вязкая диссипация становится доминирующим фактором и происходит подавление коротковолновых возмущений, ответственных за разрушение стоячей волны.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А20-120011690131-7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bassett A.B.* A Treatise on Hydrodynamics. Vol. 2, Art. 519. London: Deighton, Bell and Co. 1888. 362 P. (Reprinted by Dover, New York, N.Y. 1961.)
2. *Tait P.G.* Note on ripples in a viscous liquid // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1890. V. 17. P. 110–114.
3. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
4. *Сретенский Л.Н.* О волнах на поверхности вязкой жидкости // Тр. ЦАГИ. 1941. № 541. С. 1–34.
5. *Моисеев Н.Н.* Некоторые вопросы гидродинамики поверхностных волн // Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. С. 55–78.
6. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ. 1959. 700 с.
7. *Wehausen J.V.*, *Laitone E.V.* Surface waves // in: Encyclopedia of Physics. Springer, 1960. V. IX. P. 446–778.
8. *LeBlond H.H., Mainardi F.* The viscous damping of capillary-gravity waves // Acta Mech. 1987. V. 68. № 3–4. P. 203–222.
9. *Саночкин Ю.В.* Влияние вязкости на свободные поверхностные волны в жидкостях // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 156–164.
10. *Абрашкин А.А., Бодунова Ю.П.* Пространственные стоячие волны на поверхности вязкой жидкости // Тр. НГТУ им. Р.Е. Алексеева. МЖГ. 2011. № 2(87). С. 49–54.
11. *Базилевский А.В., Калиниченко В.А., Рожков А.Н.* Влияние вязкости жидкости на поверхностные волны Фарадея в журнале // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 6. С. 30–42.
12. *Базилевский А.В., Калиниченко В.А., Рожков А.Н.* Вязкая регуляризация разрушающихся волн Фарадея // Письма в ЖЭТФ. 2018. Т. 107. Вып. 11. С. 716–721.

Standing Gravitational Waves on the Surface of a Viscous Liquid

V. A. Kalinichenko[a,#]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia*
[#]*e-mail: kalin@ipmnet.ru*

The review summarizes the theoretical and numerical results of the analysis of the dispersion equation of standing waves on the surface of a viscous fluid, published by L.N. Sretensky in 1941. A mechanism for viscous regularization of wave motion is proposed, according to which the effects observed in the experiment are associated with the presence of a short-wavelength cutoff region, where viscous dissipation becomes the dominant factor and short-wavelength perturbations responsible for breaking of a standing wave are suppressed.

Keywords: standing wave, viscous liquid, dispersion equation, damped oscillations, aperiodic damping

REFERENCES

1. *Bassett A.B.* A Treatise on Hydrodynamics. Vol. 2, Art. 519. London: Deighton, Bell & Co. 1888. 362 p. (Reprinted by Dover, New York, N.Y. 1961.)
2. *Tait P.G.* Note on ripples in a viscous liquid // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1890, vol. 17, pp. 110–114.
3. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1932.
4. *Sretensky L.N.* Concerning waves on the surface of a viscous fluid // Trudy Tsentral. Aero-Gidrodinam. Inst., 1941, no. 541, pp. 1–34. (in Russian)
5. *Moiseev N.N.* Some questions of hydrodynamics of surface waves // in: Mechanics in the USSR for 50 Years. Vol. 2. Mechanics of Liquid and Gas. Moscow: Nauka, 1970. pp. 55–78.
6. *Levich V.G.* Physicochemical Hydrodynamics. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1962. 700 p.
7. *Wehausen J.V., Laitone E.V.* Surface waves // in: Encyclopedia of Physics. Springer Verlag, 1960. Vol. IX, pp. 446–778.
8. *LeBlond H.H., Mainardi F.* The viscous damping of capillary-gravity waves // Acta Mech., 1987. vol. 68, no. 3–4, pp. 203–222.
9. *Sanochkin Yu.V.* Viscosity effect on free surface waves in fluids // Fluid Dyn., 2000, vol. 35(4), pp. 599–604.
10. *Abrashkin A.A., Bodunova Yu.P.* Spatial standing waves on the surface of viscous fluid // Proc. R.E. Alekseev's NSTU, 2011, no. 2(87), pp. 49–54. (in Russian)
11. *Bazilevskii A.V., Kalinichenko V.A., Rozhkov A.N.* Effect of fluid viscosity on the Faraday surface waves // Fluid Dyn., 2018, vol. 53, no. 6, pp. 750–761.
12. *Bazilevskii A.V., Kalinichenko V.A., Rozhkov A.N.* Viscous regularization of breaking Faraday waves // JETP Lett., 2018, vol. 107, no. 11, pp. 684–689.