ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 2, с. 206–215

УДК 532.59:534.1

РАВНОМЕРНЫЕ АСИМПТОТИКИ ПОЛЕЙ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ОТ НАЧАЛЬНОГО РАДИАЛЬНО СИММЕТРИЧНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

© 2022 г. В. В. Булатов[1],*, И. Ю. Владимиров[2],**

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
[2] Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия
**e-mail: internalwave@mail.ru*
***e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 15.11.2021 г.
После доработки 24.01.2022 г.
Принята к публикации 27.01.2022 г.

Решена задача о построении равномерных асимптотик дальних полей внутренних гравитационных волн от начального возмущения линий равной плотности радиальной симметрии. Рассмотрено постоянное модельное распределение частоты плавучести и с помощью преобразования Фурье–Ханкеля получено аналитическое решение задачи в виде суммы волновых мод. Получены равномерные асимптотики решений, описывающие пространственно-временные характеристики возвышения изопикн (линий равной плотности), вертикальной и горизонтальной (радиальной) компонент скорости. Асимптотики отдельной волновой моды основных компонент волнового поля выражаются через квадрат функции Эйри и ее производные. Проведено сравнение точных и асимптотических результатов, и показано, что на временах порядка десяти и более периодов плавучести равномерные асимптотики позволяют эффективно рассчитывать дальние волновые поля.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, частота плавучести, дальние поля, равномерные асимптотики

DOI: 10.31857/S0032823522020047

1. Введение. В экспериментальных и натурных наблюдениях внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных стратифицированных средах (океан, атмосфера), а также при рассмотрении большого числа конкретных задач накоплен большой фактический материал, который нуждается в теоретическом осмыслении [1–3]. Волновые движения в этих средах могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться искусственными источниками возмущений [4, 5]. Основные результаты решений задач о генерации ВГВ представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные решения требуют разработки асимптотических методов их анализа, допускающих качественный анализ и проведение экспресс оценок получаемых решений [5–7]. Решения в линейной постановке посредством преобразования Фурье позволяют рассчитывать волновые поля численным интегрированием [2, 3, 5, 8–11]. Однако, по мере увеличения времени и расстояния от источников возмущений необходимо вычислять интегралы от все более и более осциллирующих функций, и численные расчеты делаются трудоемкими. Кроме того, получить из численных расчетов качественное описание уходящих от источника ВГВ, их эволюцию во времени и пространстве, зависимость от характеристик источника практически либо невозможно, либо это требует больших расчетов. В то же время асимптотические выражения для волновых полей записываются через известные специальные функции, и их качественный анализ, как правило, не вызывает затруднений [6, 7, 12, 13]. Кроме того, найденные асимптотики позволяют перейти к более реалистической ситуации сред, параметры которых медленно меняются по горизонтали и времени, так как наличие явных аналитических конструкций позволяет учесть изменение параметров среды вдоль трассы распространения ВГВ посредством соответствующего изменения аргументов, описывающих поле специальных функций, а также амплитудных фазовых множителей [5, 14–16]. Одной из основных используемых моделей генерации можно считать предположение о возбуждении пакетов ВГВ импульсным воздействием различной физической природы [1, 4, 17–19]. Для проведения прогнозных расчетов ВГВ параметры моделей волновой генерации подбираются так, чтобы приблизить смоделированную волновую систему к реально наблюдаемым волновым картинам, что дает возможность верифицировать эти математические модели.

Целью настоящей работы является построение равномерных асимптотик дальних полей ВГВ, возбуждаемых начальным возмущением линий равной плотности радиальной симметрии в слое стратифицированной среды конечной толщины.

2. Постановка задачи, интегральные формы решений. Поле возвышения изопикн (линий равной плотности) $\eta(r,z,t)$ в слое стратифицированной среды $H < z < 0$ в цилиндрических координатах (r,z) (зависимости от угла нет, ось z направлена вверх) в приближении Буссинеска определяется из задачи [6, 20]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\eta(r,z,t) + N^2(z)\Delta\eta(r,z,t) = 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\eta(r,z,0) = \Phi(r)\Pi(z)$$

$$\eta(r,z,t) = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, -H,$$

где далее частота Брента–Вяйсяля (частота плавучести) предполагается постоянной: $N^2(z) = N^2 = \mathrm{const}$. Предполагается, что начальное возмущение изопикн (линий равной плотности) обладает радиальной симметрией и некоторым распределением по глубине с одним максимумом, что соответствует качественному характеру наблюдаемым в реальных природных средах (океан, атмосфера) нелокальным источникам [1, 4, 17–19]. Решение полученной начально-краевой задачи строится с помощью преобразования Фурье–Ханкеля, и в безразмерных переменных $r^* = r\pi/H$, $z^* = z\pi/H$, $k^* = k\pi/H$, $t^* = Nt$ (индекс “*” далее опускается) имеет вид [6, 20, 21]

$$\eta(r,z,t) = \sum_{n-1}^{\infty}\eta_n = \sum_{n-1}^{\infty} a_n \sin(nz) g_n(r,t)$$

$$g_n(r,t) = \int_0^{\infty} A(k) k J_0(kr)\cos(\omega_n t)\,dk \tag{2.1}$$

$$A(k) = \int_0^{\infty} r J_0(kr)\Phi(r)\,dr, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\Pi(z)\sin(nz)\,dz, \quad \omega_n = k\Big/\sqrt{k^2+n^2},$$

где J_0 – функции Бесселя нулевого порядка [21]. Используя эти решения, можно получить выражения для вертикальной $W(r,z,t)$ и горизонтальной (радиальной) $U(r,z,t)$ компонент скорости ВГВ, которые имеют вид [20]

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nz)\,p_n(r,t), \quad U = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos(nz)\,q_n(r,t)$$

$$p_n(r,t) = -\int_0^\infty k\omega_n A(k)\, J_0(kr)\sin(\omega_n t)\, dk \tag{2.2}$$

$$q_n(r,t) = \int_0^\infty \omega_n A(k)\, J_1(kr)\sin(\omega_n t)\, dk,$$

где J_1 – функции Бесселя первого порядка [21].

3. Равномерные асимптотики решений. Функции $g_n(r,t)$, $p_n(r,t)$ и $q_n(r,t)$ определяют пространственно-временную структуру основных компонент полей ВГВ. В [20] построены неравномерные асимптотики этих выражений при $r,t \gg 1$ вблизи волновых фронтов отдельной моды. В настоящей работе рассматривается более сложная задача построения равномерных асимптотик, которые позволяют описать волновые поля при $r,t \gg 1$ как вблизи, так и вдали от волновых фронтов. С этой целью необходимо заменить в (2.1) функцию Бесселя на ее асимптотику: $J_0(kr) \approx \sqrt{2/\pi kr}\cos(kr - \pi/4)$ [6, 21]. Получающийся в результате интеграл может быть представлен в виде

$$g_n(r,t) = I_n^+(r,t) + I_n^-(r,t)$$

$$I_n^+(r,t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{F(k)}{\sqrt{k}}\exp(it\beta_n(k) - i\pi/4)dk = I_n^+$$

$$I_n^-(r,t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{F(k)}{\sqrt{k}}\exp(it\gamma_n(k) - i\pi/4)dk = I_n^-$$

$$F(k) = \frac{kA(k)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \beta_n(k) = kV + \omega_n, \quad \gamma_n(k) = kV - \omega_n,$$

где $V = r/t$, а при $k < 0$ выбираем $\sqrt{k} = i\sqrt{|k|}$. Поскольку $\omega_n(k)$ – монотонно возрастающая функция переменной k, то фазовая функция $\beta_n(k)$ интеграла I_n^+ не имеет стационарных точек на действительной оси, поэтому при больших значениях r, t интеграл I_n^+ экспоненциально мал. Оценим далее интеграл I_n^-. Обозначим $c_n = \omega_n'(0) = 1/n$ – максимальную групповую скорость отдельной моды ВГВ [1, 6]. Тогда при $0 < V < c_n$ фазовая функция $\gamma_n(k) = kV - \omega_n$ имеет две стационарные точки на действительной оси: $k_n(V) = \pm n\sqrt{(Vn)^{-2/3} - 1}$. Вблизи волнового фронта каждой моды, то есть при $V \to c_n$, эти две стационарные точки сливаются друг с другом, а также с точкой ветвления при $k = 0$. При $V > c_n$ две стационарные точки $\pm k_n(V)$ располагаются на мнимой оси. Для построения равномерной (по параметру $V = r/t$) асимптотики интеграла I_n^-, позволяющей описывать дальние волновые поля как вблизи, так и вдали от волновых фронтов необходимо выполнить регулярную замену переменной $k = k(s)$, переводящую фазовую функцию $\gamma_n(k) = kV - \omega_n$ в новую функцию $\tau(s) = -\sigma s + s^3/3$ [6, 7, 22, 23]. Таким образом, фазовая функция может быть представлена в виде: $\gamma_n = -\sigma s + s^3/3$. При этом стационарным точкам $\pm k_n(V)$ будут отвечать точки $\pm\sqrt{\sigma}$. Тогда для $k_n(V)$ можно получить: $\sigma = (-3\gamma_n(k_n(V))/2)^{2/3}$. В результате такой замены переменных интеграл I_n^- может быть представлен в виде

$$I_n^- = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{G(s)}{\sqrt{s}}\exp(it\tau(s) - i\pi/4)ds, \quad G(s) = \sqrt{\frac{s}{k}}F(k)\frac{dk}{ds},$$

где функция $G(s)$ – регулярная функция переменной s. Действительно, по построению функция $k = k(s)$ является нечетной регулярной функцией, принимающей положительные значения при $s > 0$. Поэтому dk/ds – четная регулярная функция, $s/k(s)$ – четная регулярная функция, принимающая только положительные значения, $\sqrt{s/k(s)}$ – четная регулярная функция, и, следовательно, $G(s)$ – регулярная функция как произведение трех регулярных функций. Тогда, в соответствии с общей схемой построения равномерных асимптотик (метода эталонных интегралов) функцию $G(s)$ можно представить в виде [6, 7, 22–24]: $G(s) = P(s) + R(s)$, где $P(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2$ – интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $G(s)$, построенный по точкам $s = 0, \pm\sqrt{\sigma}$, и $R(s)$ – регулярная функция. В результате можно получить

$$I_n^- = I_P + I_R$$

$$I_P = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{\sqrt{s}} \exp\left(it\left(-\sigma s + \frac{1}{3}s^3\right)^3 - i\frac{\pi}{4}\right) ds$$

$$I_R = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(s)}{\sqrt{s}} \exp\left(it\left(-\sigma s + \frac{1}{3}s^3\right)^3 - i\frac{\pi}{4}\right) ds$$

Интеграл I_P вычисляется аналитически [7, 20, 22–24]

$$I_P = \frac{\pi^{3/2}}{2}\left[-ib_0 2^{5/3} t^{-1/6}\,\mathrm{Ai}^2(\theta) - 2b_1 t^{-1/2}\left(\mathrm{Ai}^2(\theta)\right)' + ib_2 2^{1/3} t^{-5/6}\left(\mathrm{Ai}^2(\theta)\right)''\right]$$

$$\theta = -\sigma(t/2)^{2/3}, \quad \mathrm{Ai}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i(-\theta s + \frac{1}{3}s^3\right) ds$$

С помощью интегрирования по частям можно показать, что для I_R справедлива оценка: $I_R = O(I_P/t)$. В силу нечетности функции $F(k)$ можно получить: $b_0 = b_2 = 0$, $b_1 = G\left(\sqrt{\sigma}\right)\Big/\sqrt{\sigma} = F(k_n(V))\sqrt{2/k_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}$. Тогда главный член равномерной (по параметру $V = r/t$) асимптотики отдельной волновой моды при $r, t \to \infty$ имеет вид

$$g_n(r,t) \approx -2_{\pi^{3/2}}\sqrt{\frac{2}{tk_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}}F(k_n(V))\mathrm{Ai}(\theta)\mathrm{Ai}'(\theta) \tag{3.1}$$

Равномерные асимптотики для функций $p_n(r,t)$ и $q_n(r,t)$ при $r, t \to \infty$ вычисляются аналогично, и имеют вид

$$\begin{gathered} p_n(r,t) \approx -2^{1/3}\pi^{3/2}t^{-5/6}\sqrt{\frac{2}{\sigma k_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}}F(k_n(V))\omega_n(k_n(V))((\mathrm{Ai}'(\theta))^2 + \theta(\mathrm{Ai}(\theta))^2) \\ q_n(r,t) \approx -2\pi^{3/2}\sqrt{\frac{2}{tk_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}}F(k_n(V))\frac{\omega_n(k_n(V))}{k_n(V)}\mathrm{Ai}(\theta)\mathrm{Ai}'(\theta) \end{gathered} \tag{3.2}$$

4. Результаты численных расчетов. Для численных расчетов в начальном распределении возвышения изопикн (линий равной плотности) предполагается, что функции $\Phi(r)$, $\Pi(z)$ нормированы на свои максимальные по модулю значения. В качестве модельного, можно рассмотреть следующее радиальное распределение начального возмущения изопикн: $\Phi(r) = \exp(-r^2/4)/2$ и представление функции $\Pi(z) = z^\alpha\left(1 - z^\beta\right)$, $\alpha = 33$, $\beta = 57$. Использованные пространственные масштабы и характер изменчивости начального возмущения изопикн соответствуют типичным горизонтальным и вертикальным масштабам нелокальных источников возбуждения ВГВ в океане [1, 4, 5, 20].

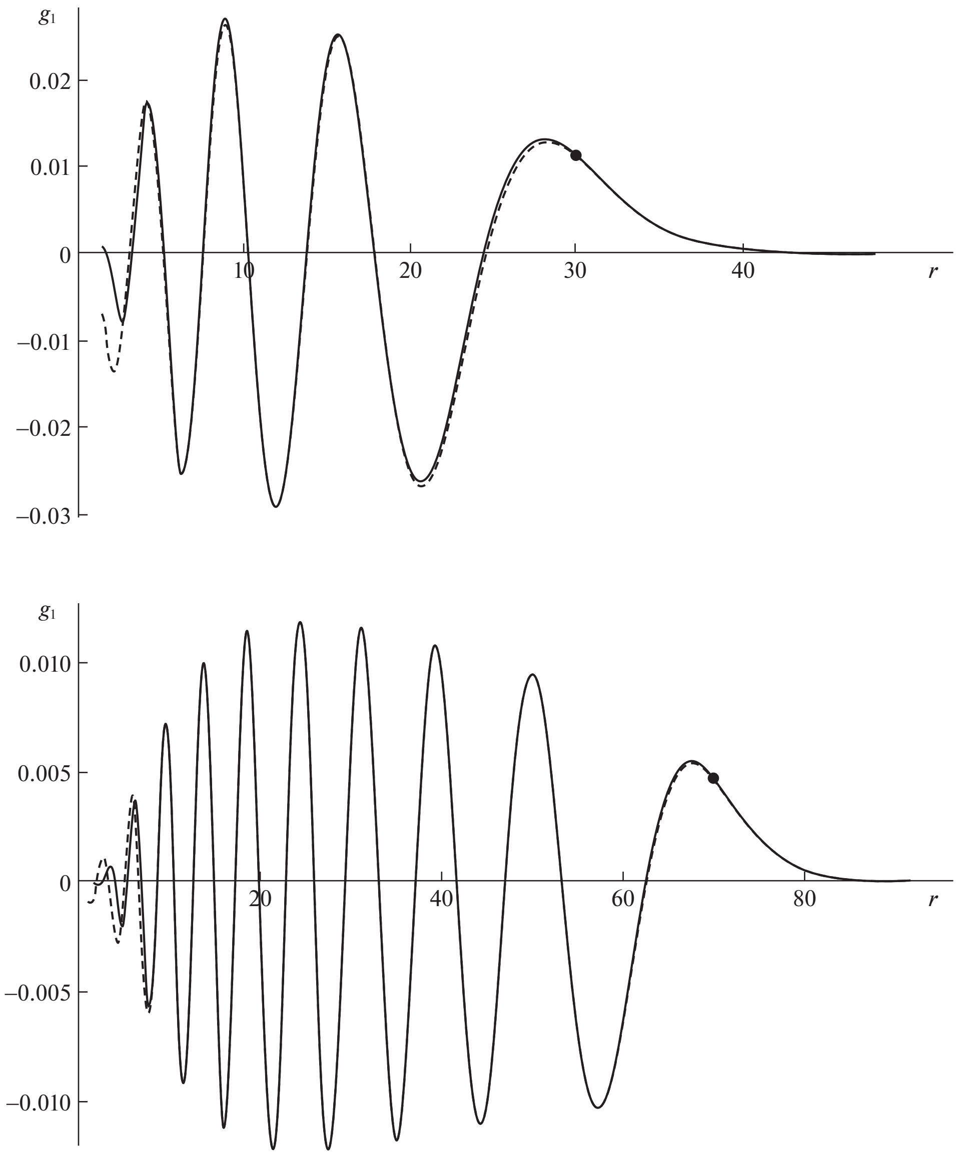

Рис. 1. Первая мода возвышения изопикн, точное решение и равномерная асимптотика.

На рис. 1 представлены результаты расчетов функции $g_1(r,t)$, (первая мода возвышения) при значениях $t = 30$ (верхний рисунок) и $t = 70$ (нижний рисунок). Здесь и далее сплошная линия – результаты точных численных расчетов по формулам (2.1)–(2.2), штриховая линия – расчеты по формулам (3.1)–(3.2). Точкой отмечено положение волнового фронта. На рис. 2 представлены результаты расчетов функции $p_1(r,t)$ (первая мода вертикальной скорости) при значениях $t = 30$ (верхний рисунок) и $t = 70$ (нижний рисунок). На рис. 3 представлены результаты расчетов функции $q_1(r,t)$, (первая мода горизонтальной (радиальной) компоненты скорости) при значениях $t = 30$

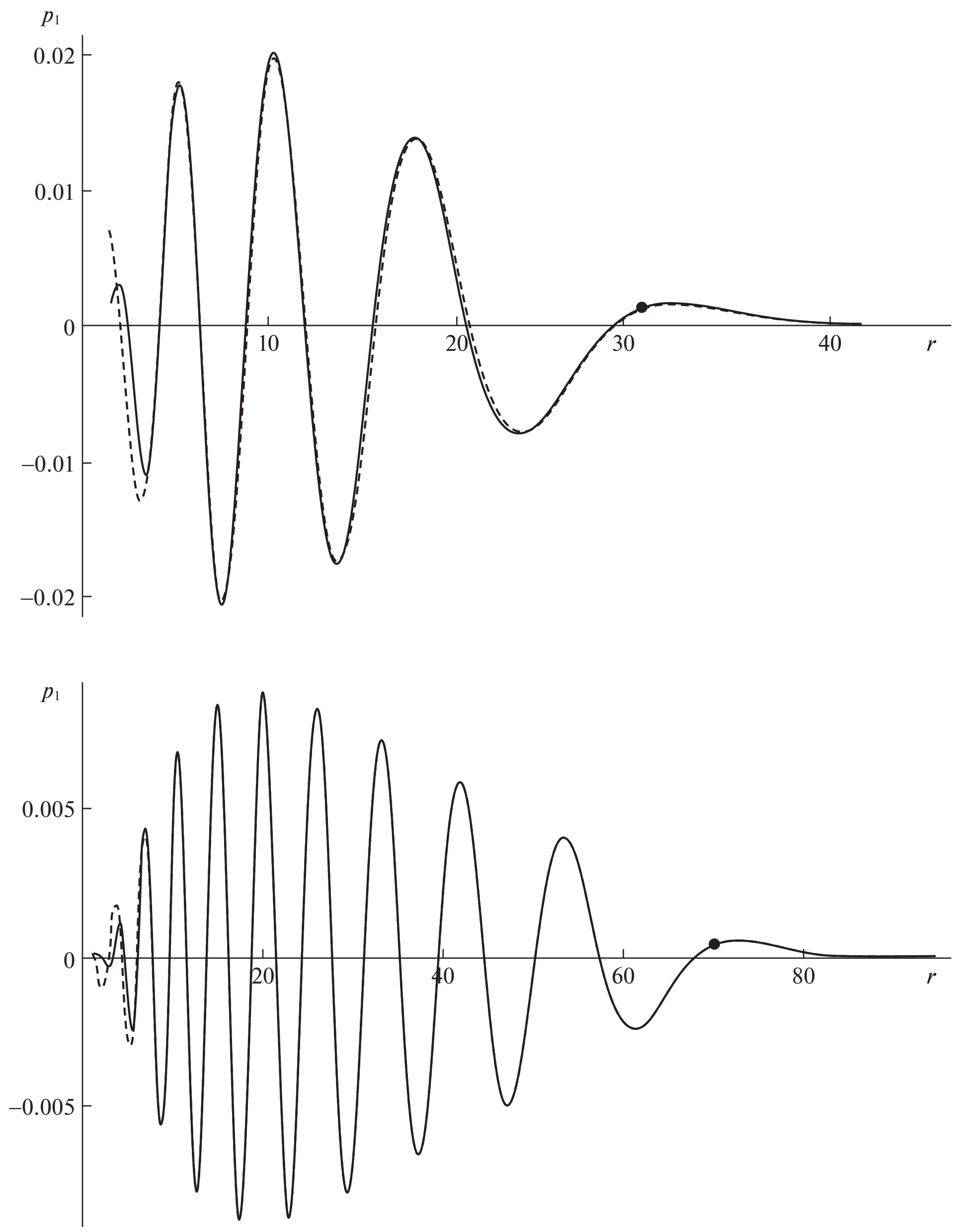

Рис. 2. Первая мода вертикальной скорости, точное решение и равномерная асимптотика.

(верхний рисунок) и $t = 70$ (нижний рисунок). Из представленных результатов видно хорошее совпадение точных и асимптотических формул при больших значениях r, t. Как показывают численные расчеты, на временах порядка десяти и более периодов частоты плавучести, построенные равномерные асимптотики волновых мод позволяет с хорошей степенью рассчитывать дальние поля ВГВ как вблизи, так и вдали от волновых фронтов.

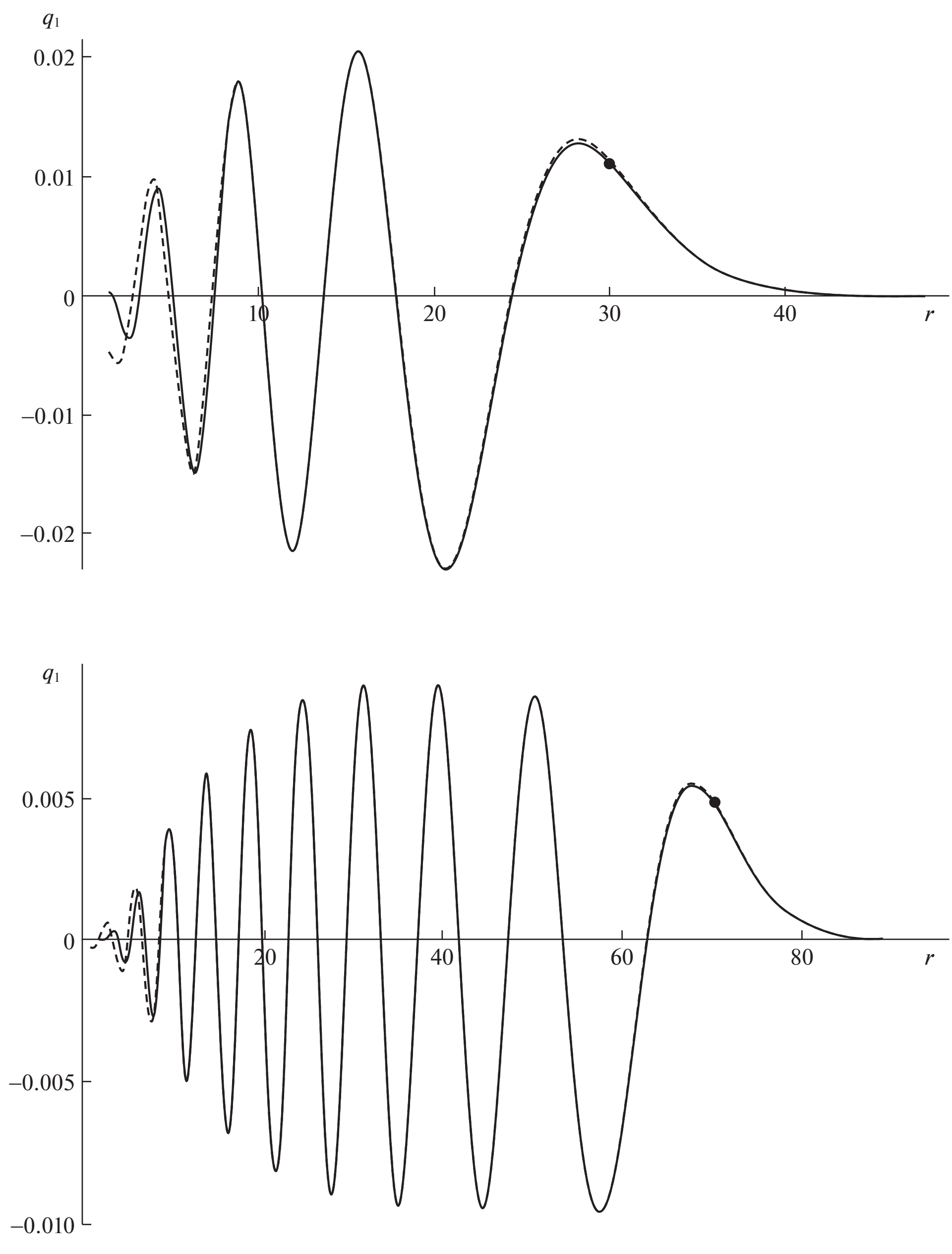

Рис. 3. Первая мода горизонтальной (радиальной) скорости, точное решение и равномерная асимптотика.

Заключение. В работе для заданного начального возмущения изопикн (линий равной плотности), обладающего радиальной симметрией и вертикальным распределением с одним максимумом, построены равномерные асимптотические решения, описывающие динамику пакетов ВГВ на больших временах и расстояниях. Равномерные асимптотики отдельной волновой моды компонент волнового поля выражаются через квадрат функции Эйри и ее производные и позволяют рассчитывать пространственно-временные характеристики возвышения изопикн, вертикальной и горизонтальной (радиальной) компонент скорости как вблизи, так и вдали от волновых фронтов. Использованное в качестве начального модельное распределение возвышения может адекватно описать различные физически обоснованные механизмы генерации пакетов ВГВ в природных стратифицированных средах. Полученные результаты позволяют аналитически представить как возвышение изопикн, так и все компоненты скоростей возбуждаемых ВГВ. Полученные равномерные асимптотики дальних полей ВГВ дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей, и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики природных стратифицированных сред. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку характеристик начальных возмущений, наблюдаемых в реальных условиях.

Работа выполнена по темам государственного задания: № АААА-А20-120011690131-7, № 0128-2021-0002, и частичной финансовой поддержке РФФИ проект № 20-01-00111А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коняев К.В., Сабинин К.В.* Волны внутри океана. СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. 272 с.
2. *Pedlosky J.* Waves in the Ocean and Atmosphere: Introduction to Wave Dynamics. Berlin; Heildelberg: Springer, 2010. 260 p.
3. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: Univ. Press, 2010. 394 p.
4. *Morozov E.G.* Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
5. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V.* (Eds.). The Ocean in Motion. Springer Oceanography. Springer Int. Publ. AG, 2018. 625 p.
6. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
7. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика неоднородных сред (в 2 томах). Т. 1: Основы теории отражения и распространения звука. М.: Наука, 2007. 443 с.; Т. 2: Звуковые поля в слоистых и трехмерно-неоднородных средах. М.: Наука, 2009. 426 с.
8. *Гущин В.А., Матюшин П.В.* Моделирование и исследование течений стратифицированной жидкости около тел конечных размеров // ЖВММФ. 2016. Т. 56. № 6. С. 1049–1063.
9. *Матюшин П.В.* Процесс формирования внутренних волн, инициированных начальным движением тела в стратифицированной вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 3. С. 83–97.
10. *Voelker G.S., Myers P.G., Walter M., Sutherland B.R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // Dyn. Atm. Oceans. 2019. V. 86. P. 116–133.
11. *Wang J., Wang, S., Chen X., Wang W., Xu Y.* Three-dimensional evolution of internal waves rejected from a submarine seamount // Phys. Fluids. 2017. V. 29. P. 106601.
12. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Аналитические решения уравнения внутренних гравитационных волн, генерируемых движущимся нелокальным источником возмущений // ЖВММФ. 2021. Т. 61. № 4. С. 572–579.
13. *Bulatov V., Vladimirov Yu.* Generation of internal gravity waves far from moving non-local source // Symmetry. 2020. V. 12 (11). P. 1899.
14. *Haney S., Young W.R.* Radiation of internal waves from groups of surface gravity waves // J. Fluid Mech. 2017. V. 829. P. 280–303.
15. *Broutman D., Brandt L., Rottman J., Taylor C.* A WKB derivation for internal waves generated by a horizontally moving body in a thermocline // Wave Motion. 2021. V. 105. P. 102759.
16. *Свиркунов П.Н., Калашник М.В.* Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // УФН. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.
17. *Беляев М.Ю., Десинов Л.В., Крикалев С.К., Кумакшев С.А., Секерж-Зенькович С.Я.* Идентификация системы океанских волн по фотоснимкам из космоса // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 1. С. 117–127.

18. *Morozov E.G., Tarakanov R.Yu., Frey D.I., Demidova T.A., Makarenko N.I.* Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge // J. Oceanogr. 2018. V. 74. № 2. P. 147–167.
19. *Khimchenko E.E., Frey D.I., Morozov E.G.* Tidal internal waves in the Bransfield Strait, Antarctica // Russ. J. Earth. Science. 2020. V. 20. ES2006.
20. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Асимптотики дальних полей внутренних гравитационных волн, возбуждаемых источником радиальной симметрии // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 5. С. 76–81.
21. *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions (Reprint of the 2nd ed.). Cambridge: Univ. Press, 1995. 804 p.
22. *Kravtsov Y., Orlov Y.* Caustics, Catastrophes, and Wave Fields. Berlin: Springer, 1999. 228 p.
23. *Froman N., Froman P.* Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. Cambridge: Univ. Press, 2002. 214 p.
24. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Владимиров И.Ю.* Равномерные и неравномерные асимптотики дальних полей поверхностных волн от вспыхнувшего локализованного источника // ПММ. 2021. Т. 85. № 5. С. 626–634.

Uniform Asymptotics of Internal Gravity Waves Fields from Initial Radially Symmetric Perturbation

V. V. Bulatov[a,#] and I. Yu. Vladimirov[b,##]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[b] *Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: internalwave@mail.ru*

[##]*e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

The problem of constructing uniform asymptotics of the internal gravity waves far fields from a nonlocal source of radial symmetry perturbations that flared up at the initial time is solved. The constant model distribution of the buoyancy frequency is considered and an analytical solution of the problem in the form of a sum of wave modes is obtained using the Fourier–Hankel transform. Uniform asymptotics of solutions are obtained, which describe the space-time characteristics of the elevation of isopycn (lines of equal density), vertical and horizontal (radial) velocity components. The asymptotics of an individual wave mode of the main components of the wave field are expressed in terms of the square of the Airy function and its derivatives. A comparison of the exact and asymptotic results is carried out, and it is shown that, at times of the order of ten or more periods of buoyancy, the uniform asymptotics makes it possible to efficiently calculate the far wave fields

Keywords: stratified medium, internal gravity waves, buoyancy frequency, uniform asymptotics, far fields

REFERENCES

1. *Konjaev K.V., Sabinin K.V.* Waves in Ocean. St.-Petersburg: Gidrometeoizdat, 1992. 272 p. (in Russian).
2. *Pedlosky J.* Waves in the Ocean and Atmosphere: Introduction to Wave Dynamics. Berlin; Heildelberg: Springer, 2010. 260 p.
3. *Sutherland B.R.* Internal Gravity Waves. Cambridge: Univ. Press, 2010. 394 p.
4. *Morozov E.G.* Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
5. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.).* The Ocean in Motion. Springer Oceanography. Springer Int. Pub. AG, 2018. 625 p.
6. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Waves in Stratified Medium. Moscow: Nauka, 2015. 735 p. (in Russian)

7. *Brehovskih L.M., Godin O.A.* Acoustic of Inhomogeneous Medium. Vol. 1: Fundamentals of the Theory of Sound Reflection and Propagation. Moscow: Nauka, 2007. 443 p.; Vol. 2: Sound Fields in Layered and Three-Dimensionally Inhomogeneous Medium. Moscow: Nauka, 2009. 426 p. (in Russian)
8. *Gushchin V.A., Matyushin P.V.* Simulation and study of stratified flows around finite bodies // Comp. Math.&Math. Phys., 2016, vol. 56, no. 6, pp. 1034–1048.
9. *Matyushin P.V.* Process of the formation of internal waves initiated by the start of motion of a body in a stratified viscous fluid // Fluid Dyn., 2019, vol. 54, pp. 374–388.
10. *Voelker G.S., Myers P.G., Walter M., Sutherland B.R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // Dyn. Atm. Oceans., 2019, vol. 86, pp. 116–133.
11. *Wang J., Wang, S., Chen X., Wang W., Xu Y.* Three-dimensional evolution of internal waves rejected from a submarine seamount // Phys. Fluids., 2017, vol. 29, pp. 106601.
12. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Analytical solutions of the equation describing internal gravity waves generated by a moving nonlocal source of perturbations // Comp. Math.&Math. Physics, 2021. vol. 61, no. 4, pp. 556–563.
13. *Bulatov V., Vladimirov Yu.* Generation of internal gravity waves far from moving non-local source // Symmetry, 2020, vol. 12 (11), pp. 1899.
14. *Haney S., Young W.R.* Radiation of internal waves from groups of surface gravity waves // J. Fluid Mech., 2017, vol. 829, pp. 280–303.
15. *Broutman D., Brandt L., Rottman J., Taylor C.A.* WKB derivation for internal waves generated by a horizontally moving body in a thermocline // Wave Motion, 2021, vol. 105, pp. 102759.
16. *Svirkunov P.N., Kalashnik M.V.* Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources // Phys. Uspekhi, 2014, vol. 57, pp. 80–91.
17. *Belyaev M.Y., Desinov L.V., Krikalev S.K. et al.* Identification of a system of oceanic waves based on space imagery // J. Comp. Syst. Sci. Int., 2009, vol. 48, pp. 110–120.
18. *Morozov E.G., Tarakanov R.Yu., Frey D.I., Demidova T.A., Makarenko N.I.* Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge // J. Oceanogr., 2018, vol. 74, no. 2, pp. 147–167.
19. *Khimchenko E.E., Frey D.I., Morozov E.G.* Tidal internal waves in the Bransfield Strait, Antarctica // Russ. J. Earth. Sci., 2020, vol. 20, ES2006.
20. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Asymptotics of the far fields of internal gravity waves excited by a source of radial symmetry // Fluid Dyn., 2021, vol. 56, no. 5, pp. 672–677.
21. *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: Univ. Press, 1995. 804 p.
22. *Kravtsov Y., Orlov Y.* Caustics, Catastrophes, and Wave Fields. Berlin: Springer, 1999. 228 p.
23. *Froman N., Froman P.* Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. Cambridge: Univ. Press, 2002. 214 p.
24. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V., Vladimirov I.Yu.* Uniform and nonuniform asymptotics of far surface fields from a flashed localized source // Fluid Dyn., 2021, vol. 56, no. 7, pp. 975–980.