

УДК 539.4

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН**

© 2022 г. А. П. Янковский*

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия***e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

Поступила в редакцию 27.07.2021 г.

После доработки 10.11.2021 г.

Принята к публикации 25.11.2021 г.

Разработана модель термоупруговязкопластического деформирования композитного материала, перекрестно армированного непрерывными волокнами в произвольных направлениях. Материалы компонентов композиции изотропны, их пластическое деформирование описывается теорией течения с изотропным упрочнением при учете зависимости функции нагружения от температуры и скорости деформирования. Построена математическая модель термоупруговязкопластического изгибного поведения армированных пластин. Слабое сопротивление поперечным сдвигам таких тонкостенных конструкций учитывается в рамках теории Амбарцумяна, а геометрическая нелинейность описывается в приближении Кармана. Учитывается связанность механической и теплофизической составляющих задачи о динамическом неупругом деформировании композитных пластин. Температура по толщине конструкций аппроксимируется полиномами разных порядков. Решение сформулированной двумерной задачи строится на основе явной численной схемы. Исследовано термоупруговязкопластическое поведение плоско-перекрестно и пространственно армированных стеклопластиковых и металлокомпозитных пластин, динамически избегаемых под действием воздушной взрывной волны. Показано, что для адекватного определения температуры в таких конструкциях ее необходимо аппроксимировать полиномами 6–7-го порядков по толщине пластин. Продемонстрировано, что относительно тонкие композитные пластины нагреваются на 15...30°C, а относительно толстые – на 1.5...2.5°C. В силу такого малого уровня нагрева армированных конструкций их динамический расчет при действии нагрузок типа воздушной взрывной волны можно проводить без учета теплового воздействия при отсутствии дополнительных источников тепла немеханического происхождения. При этом обязательно необходимо учитывать чувствительность пластических свойств компонентов композиции к скорости их деформирования.

Ключевые слова: гибкие пластины, пространственное армирование, термоупруговязкопластическое деформирование, связанные задачи, теория изгиба Амбарцумяна, нагрузки взрывного типа, явная численная схема

DOI: 10.31857/S003282352201009X

1. Введение. Тонкостенные армированные конструкции типа пластин и оболочек широко используются в инженерной практике [1–6]. Современные изделия из композиционных материалов (КМ) часто подвергаются интенсивному силовому и тепловому нагружению [5–7], при котором компоненты композиции могут вести себя неупруго [7–10]. Поэтому проблема моделирования термоупругопластического поведе-

ния КМ-конструкций является актуальной. Однако на данный момент времени теоретические исследования, выполненные в этом направлении, немногочисленны [7–11]. Обычно моделируется линейно-упругое поведение КМ-изделий [5–7, 12–16]. Упругопластическое динамическое деформирование слоистых тонкостенных элементов конструкций с изотропными слоями рассматривалось в [7]. Аналогичное механическое поведение армированных пластин моделировалось в [17]. Возникающий при этом тепловой отклик в [7, 17] не учитывался. Однако известно, что высокоинтенсивное кратковременное силовое воздействие на конструкцию может приводить к значительному выделению тепловой энергии [5]. При наличии же температурного поля компоненты композиции могут изменить свои физико-механические свойства [18, 19]. Кроме того, при динамическом нагружении пластин и оболочек необходимо учитывать и такой экспериментальный факт [18, 19], как чувствительность пластических свойств материалов к изменению скорости их деформирования (упруговязкопластичность [20]). Оба эти обстоятельства могут существенно отразиться на неупругом динамическом поведении тонкостенных КМ-конструкций. Некоторые варианты теории термоупругопластического поведения однородных материалов (в рамках теории пластического течения) рассматривались в [21], но при этом не учитывались их вязкопластические свойства. Упруговязкопластическое деформирование армированных пластин моделировалось в [22], но тепловой отклик при этом не рассматривался. Структурные модели механики композитов, учитывающие влияние теплового воздействия на упруговязкопластическое поведение материалов композиции, на данный момент времени не разработаны. Согласно терминологии, принятой в [20], такое деформирование КМ будем называть термоупруговязкопластическим. При этом следует принимать во внимание и связанность температурной и механической составляющей динамической задачи.

Для учета возможного ослабленного сопротивления тонкостенных КМ-конструкций поперечному сдвигу и расчета волновых процессов, которые возникают в них при динамическом нагружении, традиционно используют неклассические теории Рейснера [5, 7, 12, 23], Редди [13, 14] или Амбарцумяна [15, 17, 22]. Реже используются более точные теории, как правило, базирующиеся на гипотезе ломаной линии [7, 16].

Численное интегрирование физически и геометрически нелинейных динамических задач для тонкостенных конструкций обычно осуществляют, применяя явные схемы [7, 17, 22, 24] или неявные методы Ньюмарка [9, 25].

Согласно вышеизложенному, настоящее исследование посвящено моделированию термоупруговязкопластического динамического деформирования гибких армированных пластин при учете возможного их слабого сопротивления поперечным сдвигам. Численное решение возникающих при этом связанных термомеханических задач предполагается строить на основе явных пошаговых алгоритмов.

2. Численно-аналитическое моделирование термоупруговязкопластического деформирования КМ. Рассматривается КМ, состоящий из матрицы, регулярно усиленной N семействами волокон в разных направлениях с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq N$). Как и в [21, 22], предполагаем, что малые деформации $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ однородного изотропного k -го материала композиции можно представить в виде упругих $e_{ij}^{(k)}$, несжимаемых пластических $p_{ij}^{(k)}$ и температурных $\delta_{ij}\varepsilon_{\Theta}^{(k)}$ составляющих:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + p_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}\varepsilon_{\Theta}^{(k)}; \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N \quad \left(p_{ii}^{(k)} = 0, \quad \varepsilon_{\Theta}^{(k)} = \int_{t_0}^t \alpha_k \dot{\Theta} dt \right), \quad (2.1)$$

где Θ – температура; α_k – коэффициент линейного температурного расширения k -го компонента композиции ($k = 0$ – связующее, $k \geq 1$ – арматура k -го семейства); t_0 –

начальный момент времени t ; δ_{ij} – символ Кронекера; точка – производная по времени t . Упругие деформации $e_{ij}^{(k)}$ связаны с напряжениями в k -м материале композиции законом Гука

$$\bar{e}_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} / (2G_k), \quad e_0^{(k)} = \sigma_0^{(k)} / (3K_k); \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \sigma_0^{(k)}, & \bar{e}_{ij}^{(k)} &= e_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} e_0^{(k)}, & e_0^{(k)} &= \epsilon_0^{(k)} - \epsilon_{\Theta}^{(k)} \\ \sigma_0^{(k)} &= \frac{1}{3} \sigma_{ll}^{(k)}, & \epsilon_0^{(k)} &= \frac{1}{3} \epsilon_{ll}^{(k)}, & 2G_k &= \frac{E_k}{1 + \nu_k}, & 3K_k &= \frac{E_k}{1 - 2\nu_k}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$s_{ij}^{(k)}$, $\bar{e}_{ij}^{(k)}$ – компоненты девиаторов напряжений и упругих деформаций; $\sigma_0^{(k)}$, $\epsilon_0^{(k)}$, $e_0^{(k)}$ – средние напряжение, деформация и упругая деформация соответственно; E_k , ν_k – модуль Юнга и коэффициент Пуассона k -го компонента. При учете термочувствительности упругих свойств материала величины E_k , ν_k , G_k , K_k и α_k в соотношениях (2.1)–(2.3) являются функциями температуры ($G_k = G_k(\Theta)$ и т.д.).

Пластическое течение k -го материала композиции ассоциировано с поверхностью нагружения $f_k = 0$, соответствующей условию текучести Мизеса [20–22]:

$$f_k(T_k, \chi_k, H_k, \Theta) \equiv T_k^2 - \tau_s^{(k)2}(\chi_k, H_k, \Theta) = 0; \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} T_k &= \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^{(k)} s_{ij}^{(k)}}, & \chi_k &= \int_0^t \sqrt{2 \dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt, & H_k &= \sqrt{2 \xi_{ij}^{(k)} \xi_{ij}^{(k)}}, & \xi_{ij}^{(k)} &= \dot{e}_{ij}^{(k)} + \dot{p}_{ij}^{(k)} \\ & & & & & & i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$\xi_{ij}^{(k)}$ – компоненты девиатора скорости механических составляющих деформаций; χ_k – параметр упрочнения (параметр Одквиста); H_k – интенсивность скоростей деформаций сдвига; $\tau_s^{(k)}$ – мгновенный предел текучести при чистом сдвиге, равный значению интенсивности касательных напряжений T_k при определенных значениях температуры Θ , интенсивности скорости деформаций H_k и накопленной пластической деформации χ_k в текущий момент времени t . Начальная поверхность нагружения $\tau_s^{(k)}(H_k, \Theta) = \tau_s^{(k)}(0, H_k, \Theta)$ – это обычный предел текучести, зависящий от температуры Θ и скорости деформирования H_k [18, 19]. (В этом и следующем разделах, если не оговорено, по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3.)

С одной стороны, в соотношении (2.4) при учете выражений (2.5) функция $\tau_s^{(k)}$ отличается от рассмотренной в [22] дополнительным аргументом Θ ; с другой стороны, $\tau_s^{(k)}$ отличается от случая, рассмотренного в [21], наличием аргумента H_k . Поэтому, повторяя рассуждения из [21, 22], в конечном итоге при учете формул (2.1) и (2.2) получим определяющие уравнения термоупруговязкопластического деформирования k -го компонента композиции, которые для удобства дальнейшего изложения целесообразно записать в матричной форме:

$$\dot{\sigma}_k = \mathbf{Z}_k \dot{\epsilon}_k + \mathbf{Y}_k \dot{\epsilon}_k + \beta_k \dot{\Theta}; \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.6)$$

Здесь и далее:

$$\begin{aligned}
\sigma_k &= \left(\sigma_1^{(k)} \ \sigma_2^{(k)} \ \sigma_3^{(k)} \ \sigma_4^{(k)} \ \sigma_5^{(k)} \ \sigma_6^{(k)} \right)^T \equiv \left(\sigma_{11}^{(k)} \ \sigma_{22}^{(k)} \ \sigma_{33}^{(k)} \ \sigma_{23}^{(k)} \ \sigma_{31}^{(k)} \ \sigma_{12}^{(k)} \right)^T \\
\varepsilon_k &= \left(\varepsilon_1^{(k)} \ \varepsilon_2^{(k)} \ \varepsilon_3^{(k)} \ \varepsilon_4^{(k)} \ \varepsilon_5^{(k)} \ \varepsilon_6^{(k)} \right)^T \equiv \left(\varepsilon_{11}^{(k)} \ \varepsilon_{22}^{(k)} \ \varepsilon_{33}^{(k)} \ 2\varepsilon_{23}^{(k)} \ 2\varepsilon_{31}^{(k)} \ 2\varepsilon_{12}^{(k)} \right)^T \\
s_k &= \left(s_1^{(k)} \ s_2^{(k)} \ s_3^{(k)} \ s_4^{(k)} \ s_5^{(k)} \ s_6^{(k)} \right)^T \equiv \left(s_{11}^{(k)} \ s_{22}^{(k)} \ s_{33}^{(k)} \ s_{23}^{(k)} \ s_{31}^{(k)} \ s_{12}^{(k)} \right)^T \\
\xi_k &= \left(\xi_1^{(k)} \ \xi_2^{(k)} \ \xi_3^{(k)} \ \xi_4^{(k)} \ \xi_5^{(k)} \ \xi_6^{(k)} \right)^T \equiv \left(\xi_{11}^{(k)} \ \xi_{22}^{(k)} \ \xi_{33}^{(k)} \ \xi_{23}^{(k)} \ \xi_{31}^{(k)} \ \xi_{12}^{(k)} \right)^T \\
\mathbf{Z}_k &= \bar{\mathbf{Z}}_k - G_k \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad \mathbf{Y}_k = \tau_H^{(k)} \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k; \quad k = 0, 1, \dots, N,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$\mathbf{Z}_k, \mathbf{Y}_k, \bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$ – симметричные 6×6 -матрицы, $\beta_k = (\beta_i^{(k)})$ – шести-компонентный вектор-столбец, ненулевые элементы которых имеют выражения

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} &= 2\delta_{ij}G_k + \lambda_k, \quad \bar{z}_{il}^{(k)} = G_k \\
\beta_i^{(k)} &= \frac{K_\Theta^{(k)}}{3K_k} \sum_{m=1}^3 \sigma_m^{(k)} + 3K_k \alpha_k + \frac{s_i^{(k)}}{G_k} \left[G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} \left(\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k \right) A_k \right] \\
\beta_l^{(k)} &= \frac{s_l^{(k)}}{G_k} \left[G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} \left(\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k \right) A_k \right] \quad (i, j = \overline{1, 3}, \ l = \overline{4, 6}) \\
\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} &= A_k s_i^{(k)} s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 6}), \quad \lambda_k = \frac{\nu_k E_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$A_k = \frac{c_k G_k}{(G_k + \bar{G}_k) \tau_s^{(k)2}}, \quad K_\Theta^{(k)} = \frac{dK_k}{d\Theta}, \quad G_\Theta^{(k)} = \frac{dG_k}{d\Theta}, \quad \tau_\Theta^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \Theta}$$

$$\tau_H^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial H_k}, \quad \bar{G}_k = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \chi_k}$$

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{при } T_k < \tau_s^{(k)} \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}, \ W_k \leq 0 \\ 1 & \text{при } T_k = \tau_s^{(k)}, \ W_k > 0 \end{cases}$$

$$W_k = G_k s_k^T \dot{\varepsilon}_k + \tau_s^{(k)} G_k^{-1} \left(\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k \right) \dot{\Theta} - 2\tau_s^{(k)} \tau_H^{(k)} H_k^{-1} \xi_k^T \dot{\varepsilon}_k \tag{2.10}$$

$$T_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^{(k)2} + \sum_{i=4}^6 s_i^{(k)2}, \quad H_k^2 = 2 \sum_{i=1}^3 \xi_i^{(k)2} + 4 \sum_{i=4}^6 \xi_i^{(k)2}, \quad 0 \leq k \leq N,$$

\bar{G}_k – касательный модуль сдвига при пластическом деформировании; индекс “т” – операция транспонирования. По повторяющимся индексам l в равенствах (2.9) суммирования нет. Соотношения (2.10) задают функцию переключения, которая при $c_k = 0$ определяет условия термоупругого деформирования, разгрузки или нейтрального нагружения, а при $c_k = 1$ – активное нагружение при пластическом деформировании k -го компонента композиции. Равенства (2.7) задают соответствия между шестью компонентами $f_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 6}$) некоторого вектора-столбца \mathbf{f}_k и компонентами симметричного тензора второго ранга $f_{jl}^{(k)}$ ($j, l = \overline{1, 3}$).

Если пластические свойства материала не зависят от скорости деформирования ($\tau_H^{(k)} \equiv 0$), то уравнения (2.6) при учете соотношений (2.8)–(2.10) редуцируются в определяющие соотношения термоупругопластического деформирования k -го компонента композиции, которые полностью совпадают с уравнениями, полученными в [21]

при отсутствии трансляционного упрочнения. Если же рассматривается изотермическая задача ($\dot{\Theta} \equiv 0$), то уравнение (2.6) редуцируется в матричное соотношение (2.2) из [22]. При $\dot{\Theta} \equiv 0$ равенство (2.6) связывает между собой скорости напряжений $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k$ и деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ и вторые производные по времени от деформаций $\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$. Ранее в [27] на основе теории дислокаций было получено, что определяющее уравнение вязкопластичности в одномерном случае должно связывать между собой скорости напряжения и деформации и вторую производную по времени от деформации. Таким образом, соотношение (2.6) обобщает определяющие уравнения, полученные в [21, 22], и качественно полностью соответствует результатам работы [27].

Как и в [22], условия активного нагружения k -го материала композиции можно записать в форме, отличной от выражения (2.10):

$$c_k = 1 \quad \text{при} \quad T_k = \tau_s^{(k)}(\chi_k, H_k, \Theta) \quad \text{и} \quad \dot{T}_k - \tau_H^{(k)} \dot{H}_k - \tau_\Theta^{(k)} \dot{\Theta} > 0; \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.11)$$

Из экспериментов известно [18, 19, 26], что $\tau_H^{(k)}(\chi_k, H_k, \Theta) > 0$ и, как правило, $\tau_\Theta^{(k)}(\chi_k, H_k, \Theta) < 0$ (исключение составляют разве что стали в диапазоне температур $0 \leq \Theta \leq 110...120^\circ\text{C}$), поэтому из соотношений (2.11) вытекает: 1) в упругопластическом случае ($\dot{\Theta} \equiv 0$ и $\tau_H^{(k)} \equiv 0$) прирост пластических деформаций возможен только при увеличении интенсивности касательных напряжений ($\dot{T}_k > 0$); 2) при постоянстве T_k ($\dot{T}_k \equiv 0$) и нечувствительности материала к скорости деформирования ($\tau_H^{(k)} \equiv 0$) прирост пластических деформаций возможен только при увеличении температуры ($\dot{\Theta} > 0$); 3) в изотермическом случае ($\dot{\Theta} \equiv 0$) при отсутствии приращений интенсивности напряжений ($\dot{T}_k \equiv 0$) прирост пластических деформаций возможен только при уменьшении скорости деформирования ($\dot{H}_k < 0, 0 \leq k \leq N$). Эти результаты полностью согласуются с известными экспериментальными данными [18, 19, 26].

Как отмечалось во Введении, решение моделируемой задачи предполагается строить с использованием явных численных схем [7, 22, 24, 28], поэтому значения неизвестных функций будем вычислять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\Delta = \text{const} > 0$ – шаг по времени. Имея целью воспользоваться результатами работы [22], считаем, что при $t = t_{n-1}, t_n$ уже известны значения следующих величин

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \dot{\Theta}^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\Theta}(t_{n-1}, \mathbf{r}) \\ \Theta^m(\mathbf{r}) \equiv \Theta(t_m, \mathbf{r}), \quad 0 \leq k \leq N, \quad m = n-1, n, \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где \mathbf{r} – вектор места. По аналогии с [22] преобразуем второе и третье слагаемые в правой части соотношения (2.6), используя формулу трапеций, имеющую второй порядок точности по Δ [29]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{n-1} = \frac{\Delta}{2} \left(\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n + \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{n-1} \right), \quad \Theta^n - \Theta^{n-1} = \frac{\Delta}{2} \left(\dot{\Theta}^n + \dot{\Theta}^{n-1} \right); \quad 0 \leq k \leq N,$$

откуда следует

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n = \frac{2}{\Delta} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{n-1} \right), \quad \dot{\Theta}^n = \frac{2}{\Delta} \left(\Theta^n - \Theta^{n-1} \right); \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.13)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \equiv \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \frac{\Delta}{2} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k, \quad \Theta \equiv \Theta + \frac{\Delta}{2} \dot{\Theta}; \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.14)$$

Из равенств (2.14) при учете предположений (2.12) получаем, что шестикомпонентный вектор-столбец $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ и величины Θ , $\dot{\Theta}$ в правых частях соотношений (2.13) в текущий момент времени t_n уже известны. Подставим выражения (2.13) в правую часть уравнения (2.6), тогда при учете обозначений, аналогичных (2.12), при $t = t_n$ будем иметь

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{B}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \mathbf{p}_k; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (2.15)$$

где

$$\mathbf{B}_k \equiv \mathbf{Z}_k + \frac{2}{\Delta} \mathbf{Y}_k, \quad \mathbf{p}_k \equiv -\frac{2}{\Delta} \mathbf{Y}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \frac{2}{\Delta} \left(\Theta - \dot{\Theta} \right) \mathbf{p}_k; \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.16)$$

\mathbf{B}_k – 6×6 -матрица; \mathbf{p}_k – шестикомпонентный вектор-столбец.

Матричное равенство (2.15) – это искомое определяющее уравнение для термоупруговязкопластического k -го материала композиции. Согласно соотношениям (2.8)–(2.10) и (2.16), матрицы \mathbf{Z}_k , \mathbf{Y}_k , \mathbf{B}_k и векторы-столбцы \mathbf{p}_k , \mathbf{p}_k зависят от решения задачи, поэтому уравнение (2.15) является нелинейным. Для его линеаризации, как и в [22], используем метод, аналогичный методу переменных параметров упругости [24].

Тогда при $t = t_n$ на текущей итерации этого метода элементы матрицы $\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} n \\ b_{ij}^{(k)} \end{pmatrix}$ и

вектора $\mathbf{p}_k = \begin{pmatrix} n \\ p_i^{(k)} \end{pmatrix}$ в определяющем уравнении (2.15) будут известны.

Линеаризованное матричное равенство (2.15) формально полностью совпадает с соотношением (2.10) в [22]. Поэтому, используя для КМ исходные допущения, аналогичные принятым в [22, 30], и повторяя рассуждения из [22], на базе соотношения (2.15) в рассматриваемый момент времени t_n на текущей итерации получим следующее линеаризованное матричное уравнение, характеризующее термоупруговязкопластическое состояние КМ:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

где

$$\mathbf{B} \equiv \left(\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{H} \equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k,$$

$\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – шестикомпонентные векторы-столбцы осредненных напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} в композиции, по структуре аналогичные (2.7); \mathbf{I} – единичная 6×6 -матрица; ω_0 – относительное объемное содержание связующего в представительном элементе композиции; \mathbf{B} , \mathbf{E}_k , \mathbf{C}_k – 6×6 -матрицы; \mathbf{D}_k^{-1} , \mathbf{H}^{-1} – матрицы, обратные 6×6 -матри-

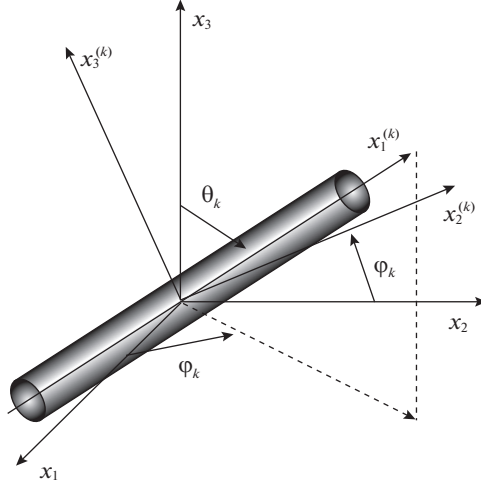


Рис. 1. Локальная система координат, связанная с арматурой k -го семейства.

цам \mathbf{D}_k и \mathbf{H} ; \mathbf{p} , \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k , \mathbf{c}_k – шестикомпонентные векторы-столбцы. Элементы матриц $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$ и вектор-столбцов $\mathbf{c}_k = (c_i^{(k)})$ вычисляются по формулам:

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)} \quad (2.19)$$

$$\zeta_1^{(k)} = 0, \quad \zeta_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}); \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq N$$

$$g_{11}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots \quad (2.20)$$

$$2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N$$

$$l_{11}^{(k)} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{12}^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{13}^{(k)} = \cos \theta_k$$

$$l_{21}^{(k)} = -\sin \varphi_k, \quad l_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad l_{23}^{(k)} = 0 \quad (2.21)$$

$$l_{31}^{(k)} = -\cos \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{32}^{(k)} = -\cos \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{33}^{(k)} = \sin \theta_k; \quad 1 \leq k \leq N$$

Не выписанные в равенствах (2.20) элементы 6×6 -матриц $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$ и $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$ приведены в табл. (21.40) и (21.44) в [30]. Матрицы \mathbf{G}_k и \mathbf{Q}_k определяют преобразования вектор-столбцов $\mathbf{\sigma}_k$ и $\mathbf{\varepsilon}_k$ (см. соотношения (2.7)) при переходе от глобальной прямоугольной системы координат x_j к локальной прямоугольной системе $x_i^{(k)}$, связанной с волокнами k -го семейства. Ось $x_1^{(k)}$ при этом предполагается направленной вдоль арматуры и задается двумя углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис. 1). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = 1, 2, 3$) определяются равенствами (2.21). (В выражениях (2.18) и (2.19) опущен верхний индекс n .)

Как и в [22], при выводе соотношений (2.17) и (2.18) попутно получаем линейризованные матричные равенства

$$\dot{\mathbf{\varepsilon}}_0 = \mathbf{H}^{-1} \dot{\mathbf{\varepsilon}} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \dot{\mathbf{\varepsilon}}_k = \mathbf{E}_k \dot{\mathbf{\varepsilon}}_0 + \mathbf{r}_k; \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.22)$$

Первое равенство (2.22) при $t = t_n$ на данной итерации выражает скорости деформаций связующего материала $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ через скорости осредненных деформаций КМ $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Второе соотношение (2.22) определяет скорости деформаций арматуры k -го семейства $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ через скорости деформаций связующего $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$.

Согласно формулам (2.9), (2.10) и (2.18)–(2.21) в момент времени t_n на текущей итерации матрицы \mathbf{B} , \mathbf{H}^{-1} , \mathbf{E}_k и вектор-столбцы \mathbf{p} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k в равенствах (2.17) и (2.22) известны. Если тепловое воздействие не учитывается ($\dot{\Theta} \equiv 0$), то соотношение (2.17) при учете выражений (2.14), (2.16), (2.18) и (2.19) редуцируется в определяющее уравнение для КМ, полученное в [22] в предположении об упруговязкопластическом поведении компонентов композиции. Следовательно, соотношение (2.17) обобщает структурные уравнения, выведенные в [22].

Предположим, что в текущий момент времени t_n итерационный процесс сошелся с требуемой точностью, т.е. в соотношении (2.17) известны скорости деформаций КМ $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n$. Тогда по формулам (2.22) последовательно определяем скорости деформаций компонентов композиции $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n$, а из равенств (2.15) – скорости напряжений $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n$ в этих же материалах. Используя центральные конечные разности по времени на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, получаем

$$\frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} n+1 & n-1 \\ \boldsymbol{\sigma}_k & - \boldsymbol{\sigma}_k \end{pmatrix} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n, \quad \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} n+1 & n-1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_k & - \boldsymbol{\varepsilon}_k \end{pmatrix} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n; \quad 0 \leq k \leq N, \quad (2.23)$$

где правые части уже вычислены, а в левых частях вектор-столбцы $\boldsymbol{\sigma}_k^{n-1}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{n-1}$ предполагаются уже известными из решения рассматриваемой задачи в предыдущий момент времени t_{n-1} . Следовательно, из равенств (2.23) по явной схеме можем определить напряжения $\boldsymbol{\sigma}_k^{n+1}$ и деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{n+1}$ в k -м компоненте композиции в следующий момент времени t_{n+1} . После этого на основании закона Гука (см. формулы (2.2) и (2.3)) с учетом соответствий (2.7) при $t = t_{n+1}$ можем вычислить и упругие деформации

$$e_{ij}^{(k)} = \frac{1}{E_k} \begin{pmatrix} n+1 & n+1 & n+1 \\ \boldsymbol{\sigma}_{ii}^{(k)} & - \nu_k \boldsymbol{\sigma}_{jj}^{(k)} & - \nu_k \boldsymbol{\sigma}_{ll}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad e_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2G_k} \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(k)} \quad (2.24)$$

$$i \neq j \neq l \neq i, \quad i, j, l = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N,$$

где суммирование по повторяющимся индексам нет.

Из соотношения (2.1) при учете выражения для $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Theta}^{(k)}$ в момент времени t_{n+1} будем иметь

$$P_{ij}^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(k)} - e_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \bar{\alpha}^{(k)} (\Theta - \Theta) - \delta_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{\Theta}^{(k)}, \quad \bar{\alpha}^{(k)} \equiv \frac{1}{2} \left(\alpha^{(k)} + \alpha^{(k)} \right) \quad (2.25)$$

$$i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N,$$

где правые части известны из равенств (2.23), (2.24) и предположения о том, что температура Θ уже определена из уравнения теплового баланса для КМ по явной чис-

ленной схеме (см. ниже), а температурная деформация $\varepsilon_{\Theta}^{(k)}$ известна из решения в предыдущий момент времени t_{n-1} : $\varepsilon_{\Theta}^{(k)} = \varepsilon_{\Theta}^{(k)} + \bar{\alpha}^{(k)}(\Theta - \Theta)$.

Согласно второму соотношению (2.5), для вычисления параметра Одквиста χ_k при $t = t_{n+1}$ имеем равенство

$$\chi_k = \int_0^{t_{n+1}} \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt = \chi_k + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sqrt{2dp_{ij}^{(k)} dp_{ij}^{(k)}} \approx \chi_k + \sqrt{2\Delta p_{ij}^{(k)} \Delta p_{ij}^{(k)}}, \quad (2.26)$$

где

$$\Delta p_{ij}^{(k)} \equiv p_{ij}^{(k)} - p_{ij}^{(k)}; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.27)$$

В правой части выражений (2.27) значения пластических деформаций уже известны (см. соотношение (2.25)), а значит в равенстве (2.26) известно последнее слагаемое. Таким образом, по формуле (2.26) при учете выражений (2.23)–(2.25) и (2.27) можно рассчитать величину параметра Одквиста χ_k при $t = t_{n+1}$. С вычислительной точки зрения такой способ определения величины χ_k удобен тем, что в следующий момент времени t_{n+1} он не требует уточнения параметра Одквиста в процессе итерационной процедуры по методу переменных параметров упругости.

3. Теплофизическая структурная модель армированного материала. При моделировании динамического термоупруговязкопластического деформирования КМ необходимо учитывать связанность механической и теплофизической задач. Поэтому кроме определяющих механических соотношений (2.17) необходимо использовать закон теплопроводности Фурье для КМ, который в матричной форме можно записать так [31]:

$$\mathbf{q} = -\Lambda \mathbf{g}, \quad (3.1)$$

где

$$\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3)^T, \quad \mathbf{g} = (g_1 \ g_2 \ g_3)^T = \text{grad } \Theta, \quad \Lambda = \left(\omega_0 \Lambda_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{L}_k^T \Lambda_k \bar{\mathbf{E}}_k \right) \bar{\mathbf{H}} \quad (3.2)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \left(\omega_0 \bar{\mathbf{I}} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{L}_k^T \bar{\mathbf{E}}_k \right)^{-1}, \quad \bar{\mathbf{E}}_k = \bar{\mathbf{V}}_k^{-1} \bar{\mathbf{C}}_k; \quad 1 \leq k \leq N,$$

q_i, g_i – компоненты вектора теплового потока и градиента температуры Θ ; $\Lambda = (\lambda_{ij})$ – симметричная 3×3 -матрица эффективных коэффициентов теплопроводности КМ; $\Lambda_k = (\lambda_{ij}^{(k)})$ – то же для k -го компонента композиции (в случае изотропного материала $\lambda_{ij}^{(k)} = \delta_{ij} \lambda_k, i, j = 1, 2, 3, 0 \leq k \leq N$); $\bar{\mathbf{I}}$ – единичная 3×3 -матрица; $\mathbf{L}_k = (l_{ij}^{(k)})$ – ортогональная 3×3 -матрица направляющих косинусов $l_{ij}^{(k)}$ (см. выражения (2.21)); $\bar{\mathbf{V}}_k^{-1}$ – матрица, обратная 3×3 -матрице $\bar{\mathbf{V}}_k$; $\bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{E}}_k, \bar{\mathbf{C}}_k$ – 3×3 -матрицы, причем элементы $\bar{b}_{ij}^{(k)}$ и $\bar{c}_{ij}^{(k)}$ матриц $\bar{\mathbf{V}}_k$ и $\bar{\mathbf{C}}_k$ вычисляются по формулам

$$\bar{b}_{11}^{(k)} = 1, \quad \bar{b}_{ii}^{(k)} = 0, \quad \bar{b}_{ij}^{(k)} = \lambda_{ij}^{(k)}, \quad \bar{c}_{1j}^{(k)} = l_{1j}^{(k)}, \quad \bar{c}_{ij}^{(k)} = l_{im}^{(k)} \lambda_{mj}^{(0)} \quad (3.3)$$

$$i = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad 1 \leq k \leq N$$

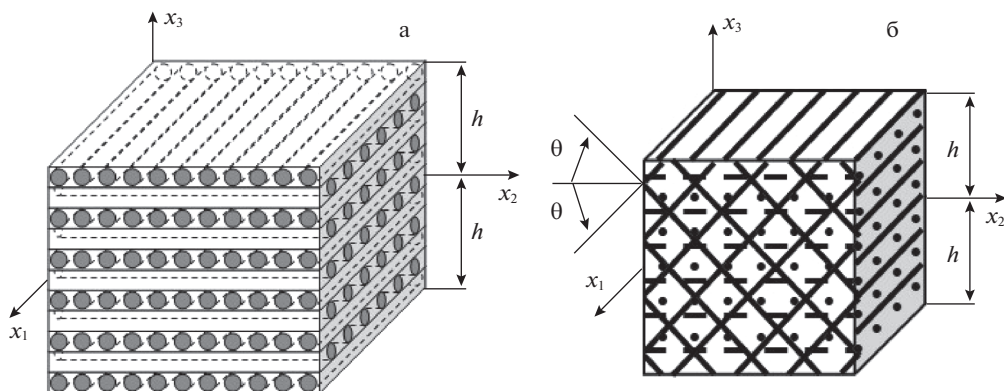


Рис. 2. Элемент КМ-пластины с ортогональной 2D-структурой армирования (а) и с пространственной 4D-структурой армирования (б).

Если материалы композиции термочувствительны, то $\lambda_{ij}^{(k)} = \lambda_{ij}^{(k)}(\Theta)$ ($0 \leq k \leq N$), поэтому согласно формулам (3.2), (3.3) и эффективные коэффициенты КМ в выражении (3.1) зависят от температуры ($\Lambda = \Lambda(\Theta)$, $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(\Theta)$, $i, j = 1, 2, 3$).

4. Постановка задачи термоупруговязкопластического изгибного деформирования КМ-пластины. Рассматриваем динамическое поведение КМ-пластины толщиной $2h$ (рис. 2), с которой свяжем декартову прямоугольную систему координат x_i : плоскость Ox_1x_2 — срединная; ось Ox_3 — поперечная ($|x_3| \leq h$). Конструкция может быть армирована плоско-перекрестно (рис. 2а) или пространственно (рис. 2б). Структура армирования в направлении Ox_3 квазиоднородна.

Для моделирования волновых процессов и возможного слабого сопротивления гибкой КМ-пластины поперечному сдвигу (например в случаях плоско-перекрестных структур армирования или в случае пространственной структуры армирования, изображенной на рис. 2б, при сдвиге в плоскости Ox_1x_3) используем теорию Амбарцумяна [15, 17, 22], а геометрическую нелинейность задачи учтем в приближении Кармана.

Замечание. В [22] было показано, что в случае упруговязкопластического деформирования гибкой пластины с произвольными пространственными структурами армирования не удастся построить явную схему типа “крест” при использовании теории Амбарцумяна, если на лицевых поверхностях касательными внешними силами нельзя пренебречь. Очевидно, что этот результат переносится и на более общий случай термоупруговязкопластического деформирования КМ-пластин. В связи с этим в настоящем исследовании рассматриваем только частные случаи пространственных структур армирования и нагружения КМ-конструкций, при которых можно использовать явную численную схему типа “крест”. Поэтому далее предполагаем: исследуется частный, но практически важный случай нагружения пластины, когда на лицевых поверхностях можно пренебречь внешними касательными силами; структура пространственного армирования такова, что если волокно некоторого k -го семейства имеет наклонное направление ($0 < \theta_k < \pi/2$; см. соотношения (2.21) и рис. 1), то обязательно найдется другое m -е семейство наклонных волокон с параметрами армирования $\theta_m = \pi - \theta_k$, $\varphi_m = \varphi_k$ и $\omega_m = \omega_k$ ($1 \leq k, m \leq N$, $m \neq k$), изготовленных из того же материала, что и волокна k -го семейства. Структуры с такой особенностью армирования часто встречаются на практике [32]. В частности, к ним относится структура армиро-

вания, изображенная на рис. 2б, а также структуры с ортогональным пространственным армированием [32] или структуры с плоско-перекрестным армированием [26] (см. рис. 2а).

Согласно этому замечанию, в рамках теории Амбарцумяна осредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек КМ-пластины U_i аппроксимируем формулами [15, 22]:

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \frac{x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2)(\partial_i \varepsilon_{j3}^0 + \partial_j \varepsilon_{i3}^0) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}); \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad i, j = 1, 2$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \frac{2x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2) \varepsilon_{i3}^0 \quad (4.2)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2,$$

где u_i – перемещения точек отсчетной плоскости ($x_3 = 0$) в тангенциальных направлениях x_i ; w – прогиб; ε_{i3}^0 – деформации поперечных сдвигов в точках отсчетной плоскости; \mathbf{x} – вектор места точек этой плоскости; ∂_i – оператор частного дифференцирования по координате x_i ; Ω – область, занимаемая конструкцией в плане. В равенствах (4.1) и (4.2) неизвестны функции u_i , w и ε_{i3}^0 ($i = 1, 2$).

В данной работе моделируется механическое поведение КМ-пластины как гибкой тонкостенной системы, поэтому поперечное нормальное напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с прилежностью для практических приложений точно можно аппроксимировать так [12]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad (4.3)$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – нормальные напряжения на нижней (–) и верхней (+) лицевых плоскостях, которые известны из силовых граничных условий.

Матричное определяющее уравнение (2.17) – это система шести алгебраических уравнений. Согласно соотношениям соответствия, аналогичным (2.7), из третьего уравнения этой системы в дискретный момент времени t_n определяем скорость поперечной линейной деформации композиции

$$\dot{\varepsilon}_{33}^n \equiv \dot{\varepsilon}_3 = \frac{1}{n} \left(\dot{\sigma}_3 - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i}^n \dot{\varepsilon}_i - p_3 \right), \quad (4.4)$$

где b_{3i} , p_3 ($i = \overline{1, 6}$) – элементы матрицы \mathbf{B} и вектор-столбца \mathbf{p} в равенстве (2.17); производная $\dot{\sigma}_3$ известна из выражения (4.3) после дифференцирования по t . Скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_i$ в правой части равенства (4.4) получаются после дифференцирования по времени формул (4.1), т.е. выражаются через двумерные функции w , \dot{w} , \dot{u}_l и $\dot{\varepsilon}_{l3}^0$ ($l = 1, 2$).

К кинематическим соотношениям (4.1) и (4.2) необходимо добавить двумерные уравнения движения гибкой пластины и соответствующие им начальные и граничные условия, которые общеизвестны [15] (см. формулы (16)–(19) в [17]), поэтому не будем их здесь приводить.

В случае связанности механической и теплофизической задач термоупруговязкопластического деформирования армированных пластин дополнительно необходимо использовать уравнение теплового баланса для КМ [33, 34]:

$$\rho c \dot{\Theta} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + W(t, \mathbf{r}), \quad (4.5)$$

где

$$\rho \equiv \sum_{k=0}^N \omega_k \rho_k, \quad c \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^N \omega_k c_k \rho_k, \quad W(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (4.6)$$

ρ_k , ρ – объемная плотность k -го компонента композиции и КМ; c_k , c – удельная теплоемкость тех же материалов; W – плотность мощности механической диссипации КМ. Связь между осредненным вектором теплового потока \mathbf{q} и температурой композиции Θ задается законом Фурье (3.1) при учете выражений (3.2) и (3.3).

Предполагаем, что на лицевых поверхностях пластины заданы комбинации тепловых граничных условий II и III рода [35]:

$$\begin{aligned} q_3^{(+)}(t, \mathbf{x}) &\equiv q_3(t, \mathbf{x}, h) = \alpha^{(+)} \left(\Theta - \Theta_{\infty}^{(+)} \right) \Big|_{x_3=h} + q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}) \\ q_3^{(-)}(t, \mathbf{x}) &\equiv q_3(t, \mathbf{x}, -h) = -\alpha^{(-)} \left(\Theta - \Theta_{\infty}^{(-)} \right) \Big|_{x_3=-h} + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\alpha^{(\pm)}$ – коэффициенты теплоотдачи со стороны верхней (+) и нижней (–) лицевых плоскостей; $\Theta_{\infty}^{(\pm)}$ – температуры окружающей среды со стороны тех же поверхностей; $q_{\infty}^{(\pm)}$ – заданные проекции на ось Ox_3 внешних тепловых потоков через те же поверхности.

На торцевой поверхности Ω_* могут быть заданы тепловые граничные условия общего вида

$$\begin{aligned} q_1 n_1 + q_2 n_2 &= \alpha_* (\Theta - \Theta_{\infty}^*) + q_{\infty}^*(t, \mathbf{r}); \quad \mathbf{x} \in \Gamma \\ |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0 \quad (n_1 = \cos \beta, \quad n_2 = \sin \beta), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где α_* , Θ_{∞}^* , q_{∞}^* имеют тот же смысл, что и аналогичные величины в равенствах (4.7), только на торцевой поверхности; Γ – контур, ограничивающий область Ω ; β – угол, задающий направление внешней нормали к Γ . В формулах (4.7) и (4.8) q_i ($i = \overline{1,3}$) – компоненты вектора \mathbf{q} (см. выражения (3.2)). Помимо граничных условий (4.7) и (4.8) в момент времени t_0 необходимо задать начальное условие для температуры Θ .

Для понижения размерности уравнения (4.5) аппроксимируем температуру пластины Θ полиномом M -й степени по поперечной координате x_3 :

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^M \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (4.9)$$

где Θ_l ($0 \leq l \leq M$) – искомые двумерные функции; $\Theta^0 = \text{const}$ – температура естественного состояния КМ-конструкции.

Согласно сделанному замечанию, при рассматриваемых структурах армирования ось Ox_3 совпадает с одним из главных направлений теплофизической анизотропии КМ, поэтому

$$\lambda_{3i} = \lambda_{i3} \equiv 0; \quad i = 1, 2, \quad (4.10)$$

где λ_{ij} – элементы матрицы Λ в законе Фурье (3.1).

Подставим разложение (4.9) в граничные условия (4.7) и используем соотношение (3.1) при учете равенств (4.10), тогда после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} -\sum_{l=0}^M (-1)^l h^{l-1} \left(l \lambda_{33}^{(-)} + h \alpha^{(-)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) &= \alpha^{(-)} \left(\Theta_{\infty}^{(-)} - \Theta^0 \right) + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}) \\ \sum_{l=0}^M h^{l-1} \left(l \lambda_{33}^{(+)} + h \alpha^{(+)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) &= \alpha^{(+)} \left(\Theta_{\infty}^{(+)} - \Theta^0 \right) - q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$\lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33}|_{\Theta=\Theta(t,\mathbf{x},\pm h)}, \quad (4.12)$$

$\lambda_{33}^{(\pm)}$ – коэффициенты поперечной теплопроводности КМ на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях. Соотношение (4.12) справедливо в случае термочувствительности коэффициента $\lambda_{33} = \lambda_{33}(\mathbf{x}; \Theta)$; в противном случае $\lambda_{33}^{(+)} = \lambda_{33}^{(-)} = \lambda_{33}(\mathbf{x})$ в силу однородности структуры армирования по толщине пластины.

Система двух уравнений (4.11) при учете соотношений (4.10) и (4.12) содержит $M + 1$ неизвестных двумерных функции $\Theta_l(t, \mathbf{x})$ ($0 \leq l \leq M$). Для замыкания этой системы используем обобщенный метод Галеркина [36], т.е. проинтегрируем уравнение теплового баланса (4.5) по толщине пластины с весами x_3^m ($0 \leq m \leq M - 2$), тогда получим

$$\rho \dot{U}^{(m)} = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}(t, \mathbf{x}) \quad (4.13)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq M - 2,$$

где

$$U^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3$$

$$\bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m \Big|_{-h}^h - m \int_{-h}^h q_3(t, \mathbf{r}) x_3^{m-1} dx_3 =$$

$$= h^m \left[q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)} \right] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}), \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 \quad (i = \overline{1, 3})$$

$$W^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h W(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3, \quad \frac{\partial U}{\partial \Theta} = c(\Theta),$$

U – удельная внутренняя энергия КМ.

Анализ экспериментальных данных показывает [18, 37], что с приемлемой для практических приложений точностью в достаточно широком диапазоне температур теплоемкость k -го компонента композиции c_k можно аппроксимировать квадратной параболой от разности $\Theta - \Theta^0$ (могут быть использованы и более сложные зависимости $c_k(\Theta - \Theta^0)$, это не принципиально). Тогда согласно второму равенству (4.6) удельную теплоемкость композиции в случае учета термочувствительности можно представить в виде

$$c(\mathbf{x}; \Theta - \Theta^0) = C_0(\mathbf{x}) + C_1(\mathbf{x})(\Theta - \Theta^0) + C_2(\mathbf{x})(\Theta - \Theta^0)^2; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.15)$$

где

$$C_i(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^N c_i^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}); \quad i = 0, 1, 2, \quad (4.16)$$

$c_i^{(k)}$ – коэффициенты разложения удельной теплоемкости k -го компонента композиции $c_k(\Theta - \Theta^0)$ по формуле, аналогичной (4.15).

Из последней формулы (4.14) при учете выражений (4.15) и (4.16) получаем

$$U(\mathbf{x}; \Theta - \Theta^0) = U_0 + C_0(\mathbf{x})(\Theta - \Theta^0) + \frac{C_1(\mathbf{x})}{2}(\Theta - \Theta^0)^2 + \frac{C_2(\mathbf{x})}{3}(\Theta - \Theta^0)^3, \quad (4.17)$$

где U_0 – величина, не зависящая от температуры. Так как далее интерес представляет температура КМ Θ , а не внутренняя энергия U , то величину U_0 , соответствующую температуре Θ^0 , можно задать произвольно, например для удобства равной нулю.

Подставим разложение (4.17) в первое равенство (4.14) и учтем формулу (4.9), тогда получим

$$\begin{aligned} & C_0 \sum_{i=0}^M H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j + \\ & + \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M \sum_{l=0}^M H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq M-2,$$

где

$$H(s) \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} [1 - (-1)^{s+1}] \quad (4.19)$$

Если в текущий момент времени t из каких-то соображений известны значения функций $U^{(m)}$, то система нелинейных (в случае учета термочувствительности) уравнений (4.11) и (4.18) при учете выражений (4.12) и (4.19) замкнута относительно функций $\Theta_l(t, \mathbf{x})$, $0 \leq l \leq M$.

Для получения граничных условий, соответствующих двумерным уравнениям теплового баланса (4.13), необходимо проинтегрировать равенство (4.8) по толщине пластины с весами x_3^m , тогда с учетом обозначений (4.14) и разложения (4.9) получим

$$\begin{aligned} Q_1^{(m)} n_1 + Q_2^{(m)} n_2 - \alpha_* \sum_{l=0}^M H(l+m) \Theta_l = -\alpha_* H(m) (\Theta_\infty^* - \Theta^0) + Q_\infty^{(m)}(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq M-2,$$

где

$$Q_\infty^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_\infty^*(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3; \quad 0 \leq m \leq M-2 \quad (4.21)$$

Начальные условия для уравнений (4.13) имеют вид

$$U^{(m)}(t_0, \mathbf{x}) = U_0^{(m)}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq M-2, \quad (4.22)$$

где $U_0^{(m)}$ – известные двумерные функции, которые вычисляются по первой формуле (4.14) при учете выражения (4.17), в котором Θ необходимо заменить известной начальной температурой пластины $\Theta_0^*(\mathbf{r})$.

Из замкнутой системы двумерных уравнений (4.11) и (4.13) при учете соотношений (4.14) и (4.18) следует, что число M в разложении (4.9) должно быть не меньше двух ($M \geq 2$), если учитываются теплофизические граничные условия на лицевых поверхностях пластины (см. равенства (4.11)).

5. Метод расчета. Как отмечалось во Введении, для интегрирования рассматриваемой задачи будем использовать явные пошаговые численные схемы, определяя решение в дискретные моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). В связи с этим считаем, что при $t = t_m$ помимо функций (2.12) уже известны также и значения следующих величин

$$u_l^m(\mathbf{x}) \equiv u_l(t_m, \mathbf{x}), \quad w^m(\mathbf{x}) \equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad \gamma_l^m(\mathbf{x}) \equiv \gamma_l(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r})$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad U^{(r)}(\mathbf{x}) \equiv U^{(r)}(t_n, \mathbf{x}), \quad q_i(\mathbf{r}) \equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), \\
 \Theta_s(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_s(t_n, \mathbf{x}), \quad q_\infty^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \\
 \varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \chi^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \chi^{(k)}(t_m, \mathbf{r}); \quad l = 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \\
 m = n - 1, n, \quad 0 \leq r \leq M - 2, \quad 0 \leq s \leq M, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

где

$$\gamma_i(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{i3}^0 - \partial_i w; \quad i = 1, 2 \tag{5.2}$$

– введены для удобства изложения функции [17, 22].

Производные по времени в механической составляющей исследуемой связанной термоупруговязкопластической задачи (за исключением левой части первого равенства (2.13)) будем аппроксимировать центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, что позволяет разработать явную численную схему. Заменяя вторые производные по времени от кинематических переменных w , u_i и γ_i в уравнениях движения гибкой КМ-пластины их конечно-разностными аналогами и учитывая выражения (5.2) и обозначения, аналогичные (5.1), получим [22]

$$\begin{aligned}
 \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{l=1}^2 \partial_l \left(F_{l3} + \sum_{j=1}^2 F_{lj} \partial_j w^n \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \\
 \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(F_{ij} - F_{j3} \partial_j w^n \right) - \left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \partial_i w^n \\
 \frac{2h^3\rho}{3\Delta^2} \left(\gamma_i^{n+1} - 2\gamma_i^n + \gamma_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3}; \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n = 1, 2, 3, \dots,
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

где

$$F_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} dx_3, \quad F_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3; \quad i, j = 1, 2, \tag{5.4}$$

Δ – шаг по времени; плотность ρ определена первой формулой (4.6). Объемные силы в КМ-пластине не учитываются.

Используя выражения (5.4) и предположения (5.1) в данный момент времени t_n можно вычислить все силовые факторы F_{ij} , F_{i3} , M_{ij} и внешние нагрузки $\sigma_{33}^{(\pm)}$, входящие в правые части равенств (5.3). Следовательно, при учете соответствующих граничных условий [15, 17, 22] из уравнений (5.3) можно вычислить по явной схеме значения неизвестных функций w^{n+1} , u_i^{n+1} и γ_i^{n+1} в следующий момент времени t_{n+1} . После этого по формулам (4.1) при учете равенств (5.2) определяем осредненные деформации композиции ε_{ij}^{n+1} . Согласно соотношениям (4.1) и (5.1), деформации ε_{ij}^{n-1} уже известны при $t = t_{n-1}$, поэтому на основании формул численного дифференцирования по t при учете выражения (4.4) можно вычислить и скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$ в каждой точке пластины в момент времени t_n . Далее по формулам (2.22) при учете соответствий (2.7) опре-

деляем скорости деформаций компонентов композиции $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n$, а из соотношений (2.15) при учете формул (2.16) – скорости напряжений $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n$. Используя аппроксимации (2.23) при учете предположений (5.1), вычисляем напряжения $\boldsymbol{\sigma}_k^{n+1}$ и деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{n+1}$ в k -м компоненте композиции, затем по формуле (2.26) при учете соотношений (2.24), (2.25) и (2.27) определяем значение параметра Одквиста $\chi^{(k)}$ в том же материале в следующий момент времени при t_{n+1} . Согласно равенствам (2.10) и (2.13) параметр переключения $c^{(k)}$ при $t = t_n$ зависит от $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n$, поэтому в текущий момент времени t_n определяющее соотношение (2.15) (или (2.6)) необходимо итерационно уточнять по методу переменных параметров упругости [24]. Проведенные расчеты показывают, что для получения приемлемой в практических приложениях точности достаточно использовать две итерации на каждом шаге по времени.

Для интегрирования теплофизической составляющей рассматриваемой задачи будем также использовать явную схему, но на двухточечном шаблоне по времени $\{t_n, t_{n+1}\}$. Тогда система двумерных уравнений теплового баланса (4.13) при учете обозначений, аналогичных (5.1), примет вид [28]:

$$\frac{\rho}{\Delta} \left(U^{(m)} - U^{(m)} \right) = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq M - 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

На основании формул (4.14) при учете предположений (5.1) в текущий момент времени t_n можно вычислить правые части в равенствах (5.5), а затем по явной схеме при учете соотношений (4.20), (4.21) определяем значения функций $U^{(m)}$ в следующий момент времени t_{n+1} . Далее, рассматривая при $t = t_{n+1}$ уравнения (4.11) и (4.18) (в которых правые части уже известны) при учете обозначений (4.12) и (4.19), определяем коэффициенты разложения температуры $\Theta_l(\mathbf{x})$ ($0 \leq l \leq M$) в формуле (4.9). В случае учета термочувствительности материалов композиции система уравнений (4.11) и (4.18) нелинейна. Для ее линеаризации можно использовать метод переменных теплофизических параметров, аналогичный методу переменных параметров упругости [24]. Расчеты показали, что для сходимости такого итерационного процесса с приемлемой для приложений точностью достаточно использовать две–три итерации.

Согласно структуре левых частей уравнений (5.3) и (5.5), для начала расчетов по предложенной численной схеме необходимо предварительно знать функции w^m, u_i^m, γ_i^m ($m = 0, 1$) и $U^{(l)}$. При этом функции w^0, u_i^0, γ_i^0 и $U^{(l)}$ ($0 \leq l \leq M - 2$) определяются из начальных условий (см. равенства (4.22) и формулы (18) в [17]). Если при $t = t_0$ КМ-плата покоится в естественном состоянии и внешние нагрузки отсутствуют ($\sigma_{33}^{(+)} = \sigma_{33}^{(-)} = 0$), то по формуле Тейлора с точностью Δ^3 получаем $w^1 \approx u_i^1 \approx 0, \gamma_i^1 \approx 0, i = 1, 2$ [17, 22].

Заменяя в уравнениях (5.3) и (5.5) производные $\partial_i(\bullet)$ их конечно-разностными аналогами и присоединяя к этим уравнениям необходимые граничные условия (см. равенства (4.20) и (4.21), а также формулы (19) в [17]) окончательно получим явную по-

шаговую схему численного интегрирования связанной задачи термоупруговязкопластического деформирования гибкой КМ-пластины.

6. Обсуждение результатов расчетов. В качестве конкретных примеров рассмотрим неизотермическое динамическое поведение прямоугольных удлиненных пластин (Ω : $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$, $a = 3b$) толщиной $2h = 2$ см и разной ширины $2b$. По всему контуру Γ конструкции жестко закреплены ($w = u_i = 0$, $\gamma_i = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, $t \geq t_0$ [22]) и в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ покоятся ($w = u_i = 0$, $\gamma_i = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $t = t_0$, $i = 1, 2$ [22]) при температуре естественного состояния ($\Theta = \Theta^0 = \text{const}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $|x_3| \leq h$, $t = t_0$). Со стороны нижних лицевых поверхностей пластины нагружаются давлением, порожденным воздушной взрывной волной [25]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} = p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max} \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max} \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\alpha = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad p(t_{\min}) = 0.01 p_{\max},$$

где смысл параметров нагрузки p_{\max} , t_{\max} , t_{\min} и α вполне очевиден и подробно описан в [22]. Из последних соотношений (6.1) следует, что при $t > t_{\min}$ колебания КМ-конструкций можно рассматривать как свободные. Согласно экспериментальным данным [25], в расчетах примем $t_{\max} = 0.1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс.

Через лицевые поверхности ($x_3 = \pm h$) реализуется конвективный теплообмен с окружающей средой ($q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$) в условиях естественной конвекции ($\alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м² К) [38]) при температуре воздуха, равной температуре естественного состояния пластин: $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$ (см. равенства (4.7) и (4.11)). На торцевых поверхностях заданы граничные условия I рода, причем температура конструкций поддерживается равной температуре их естественного состояния: $\alpha_* \rightarrow \infty$, $\Theta_{\infty}^* = \Theta^0$ (см. соотношения (4.8), (4.20) и (4.21)).

Пластины изготовлены из высокопрочного магниевое сплава ВТ65 [18] и армированы высокопрочной стальной проволокой У8А [26] (металлокомпозиция) или из эпоксидной смолы [39] и усилены стекловолокнами [26] (стеклопластик). Упруглопластическое деформирование материалов композиции на стадии активного нагружения при постоянстве скорости деформации $\dot{\epsilon}$ и температуры Θ характеризуется диаграммой с линейным упрочнением

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \epsilon, & |\epsilon| \leq \epsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E^{(k)} \\ \text{sign}(\epsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\epsilon - \text{sign}(\epsilon) \epsilon_s^{(k)}); & |\epsilon| > \epsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases} \quad (6.2)$$

где σ и ϵ – напряжение и деформация при растяжении – сжатии, $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta, \dot{\epsilon})$ – модуль упрочнения k -го компонента композиции, $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta, \dot{\epsilon})$ – предел текучести того же материала при фиксированной температуре ($\Theta = \text{const}$) и скорости деформации ($\dot{\epsilon} = \text{const}$). Физико-механические характеристики материалов композиции приведены в табл. 1, где $\bar{c} = \sqrt{E/\rho}$ – скорость звука, $\bar{a} = 2\lambda/(c\rho)$ – удвоенная температуропроводность, а в скобках указана температура (Θ , °С), при которой определено значение соответствующей характеристики. Во второй и третьей частях табл. 1 (для $\dot{\epsilon} = 0.417$ с⁻¹ и $\dot{\epsilon} = 104$ с⁻¹) приведены только те значения характеристик пластических свойств материалов, которые отличаются от данных, указанных в первой части (при $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4}$ с⁻¹). При этом предполагается, что в рассматриваемом диапазоне изменения скорости деформации $\dot{\epsilon}$ теплофизические и упругие характеристики компонентов

композиции практически не зависят от $\dot{\epsilon}$ [18, 19]. Зависимости всех физико-механических характеристик от температуры Θ в расчетах аппроксимировались линейно по данным, представленным в табл. 1, а аппроксимации зависимостей характеристик пластических свойств от $\dot{\epsilon}$ подробно описаны в [22].

Для проведения расчетов по пространственным переменным x_1 и x_2 вводилась равномерная сетка $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50$, а шаг по времени Δ выбирался равным 0.25 мкс. Рассматривались относительно тонкие ($b = 50$ см, $h/b = 1/50$) и относительно толстые ($b = 10$ см, $h/b = 1/10$) КМ-пластины, для которых

$$\begin{aligned} \Delta x_1/\Delta = 40 \text{ км/с}, \quad 2h/\Delta = 80 \text{ км/с}, \quad (\Delta x_1)^2/\Delta = 400 \text{ м}^2/\text{с} \quad \text{при} \quad b = 50 \text{ см} \\ \Delta x_1/\Delta = 8 \text{ км/с}, \quad 2h/\Delta = 80 \text{ км/с}, \quad (\Delta x_1)^2/\Delta = 16 \text{ м}^2/\text{с} \quad \text{при} \quad b = 10 \text{ см} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Для обеспечения устойчивости явной схемы (5.3) необходимо выполнение условий Куранта–Фридрихса–Леви: $\Delta x_1/\Delta \geq \bar{c}$ и $2h/\Delta \geq \bar{c}$ [7], а для устойчивости явной схемы (5.5) необходимо, чтобы $(\Delta x_1)^2/\Delta \geq \bar{a}$ [28]. Согласно числовым данным, полученным в (6.3), указанные отношения существенно превосходят соответствующие значения \bar{c} и \bar{a} для материалов композиций, представленные в табл. 1. Следовательно, аналогичные необходимые условия устойчивости явной схемы (5.3)–(5.5) будут с запасом выполняться и для рассматриваемых композиций. Отметим, что схема (5.5) имеет первый порядок точности по Δ [28], однако малый шаг по времени ($\Delta = 0.25$ мкс), гарантирующий устойчивость всей численной схемы в целом (см. уравнения (5.3) и (5.5)), обеспечивает вполне приемлемую для практических расчетов точность.

Структуры армирования однородны, т.е. $\omega_k = \text{const}$, $\theta_k = \text{const}$, $\varphi_k = \text{const}$, $1 \leq k \leq N$ (см. рис. 1). Рассматриваются два типа структур: 1) плоское ортогональное армирование (рис. 2а), когда два ($N = 2$) семейства волокон уложены по направлениям Ox_1 и Ox_2 с плотностями армирования $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.3$; 2) пространственное 4D-армирование (рис. 2б), когда два первых семейства волокон укладываются по направлениям Ox_1 и Ox_2 , а третье и четвертое семейства – наклонно по направлениям, определяемым углами (см. рис. 1): $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$, $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$ (на рис. 2б угол $\theta = \pi/4$). Во второй структуре плотности армирования имеют значения: $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 0.2$, $\omega_3 = \omega_4 = 0.05$. В обоих случаях армирования общий расход арматуры одинаков.

Для выяснения вопроса о выборе значения M в разложении (4.9), обеспечивающем приемлемую точность расчетов температуры Θ , рассмотрим зависимости от M максимальных значений $\Theta_{\max}(M) = \max_{t,r} \Theta(t, r; M)$ ($|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$, $|x_3| \leq h$; расчеты проводились на интервале времени $0 \leq t \leq 0.1$ с). На рис. 3 изображены указанные зависимости для относительно тонких ($b = 50$ см) стеклопластиковых пластин (рис. 3а), рассчитанные при $p_{\max} = 4$ МПа (см. соотношения (6.1)), для относительно толстых ($b = 10$ см) стеклопластиковых конструкций при $p_{\max} = 7$ МПа (рис. 3б) и для относительно тонких металлокомпозитных пластин при $p_{\max} = 10$ МПа (рис. 3в). При указанных нагрузках p_{\max} во всех КМ-конструкциях возникают пластические деформации. На рис. 3 значению $M = 0$ условно соответствует случай, когда тепловое влияние вообще не учитывается, поэтому принято, что $\Theta_{\max}(0) = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$. Номера кривых на рис. 3 совпадают с номерами структур армирования; кривые, номера которых помечены штрихом, рассчитаны без учета влияния скорости деформирования на пластические свойства материалов композиции – термоупругопластический расчет (при этом

Таблица 1. Физико-механические характеристики материалов композиций [18, 26, 39]

| Характеристика материала | Эпоксидная смола | Стекланные волокна | Магнийевый сплав ВМ65 (Mg) | Стальная проволока У8А |
|--|--|--|---|---|
| $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ | | | | |
| ρ , кг/м ³ | 1210.0 (20) 1208.0 (40) | 2520.0 (20) 2519.6 (80) | 1800.0 (20) 1796.2 (100) | 7800.0 (20) 7791.8 (100) |
| E , ГПа | 2.8 (20) 2.3 (40) | 86.8 (20) 86.3 (80) | 43.0 (20) 38.5 (100) | 210.0 (20) 195.0 (100) |
| ν | 0.330 (20) 0.333 (40) | 0.250 (20) 0.254 (80) | 0.330 (20) 0.334 (100) | 0.300 (20) 0.305 (100) |
| σ_s , МПа | 20 (20) 18 (40) | 4500 (20) 4400 (80) | 267 (20) 219 (100) | 3968 (20) 3971 (200) |
| E_s , ГПа | 1.114 (20) 0.783 (40) | 6.230 (20) 5.168 (80) | 0.379 (20) 0.367 (100) | 6.973 (20) 5.014 (200) |
| λ , Вт/(м К) | 0.243 (20) 0.240 (40) | 0.89 (20) 0.86 (80) | 117.23 (20) 121.42 (100) | 42.7 (20) 41.7 (100) |
| $\alpha \times 10^6$, К ⁻¹ | 68.1 (20) 70.3 (40) | 2.5 (20) 2.6 (80) | 20.9 (20) 22.6 (100) | 12.3 (20) 13.2 (100) |
| c , кДж/(кг К) | 1.54 (20) 1.60 (40) | 0.800 (20) 0.839 (80) | 1.032 (20) 1.054 (100) | 0.485 (20) 0.488 (100) |
| \bar{c} , м/с | 1521 (20) 1380 (40) | 5869 (20) 5852 (80) | 4888 (20) 4635 (100) | 5189 (20) 5003 (100) |
| \bar{a} , м ² /с | 2.60×10^{-7} (20) 2.48×10^{-7} (40) | 8.80×10^{-7} (20) 8.14×10^{-7} (80) | 1.27×10^{-4} (20) 1.29×10^{-4} (100) | 2.26×10^{-5} (20) 2.19×10^{-5} (100) |
| $\dot{\epsilon} = 0.417 \text{ c}^{-1}$ | | | | |
| σ_s , МПа | – – | – – | 306 (20) 243 (100) | – – |
| E_s , МПа | – – | – – | 0.589 (20) 0.596 (100) | – – |
| $\dot{\epsilon} = 104.0 \text{ c}^{-1}$ | | | | |
| σ_s МПа | 22.0 (20) 19.5 (40) | 4600 (20) 4550 (80) | 385 (20) 340 (100) | 4100 (20) 4075 (200) |
| E_s , ГПа | 1.238 (20) 0.853 (40) | 6.314 (20) 5.458 (80) | 1.010 (20) 0.625 (100) | 7.035 (20) 6.158 (200) |

использовались данные из табл. 1, соответствующие случаю квазистатического нагружения: $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$). Кривые 2 и 2' на рис. 3б визуальнo почти не различаются.

Поведение всех кривых на рис. 3 свидетельствует о том, что при переходе от значения $M = 6$ к $M = 7$ приращение величины Θ_{\max} становится практически пренебрежимо малым. При значениях $M \geq 8$ линеаризованная система уравнений (4.11) и (4.18) (при учете выражений (4.19)), из которой в каждый момент времени определяются коэффициенты разложения температуры (4.9), является плохо обусловленной, в резуль-

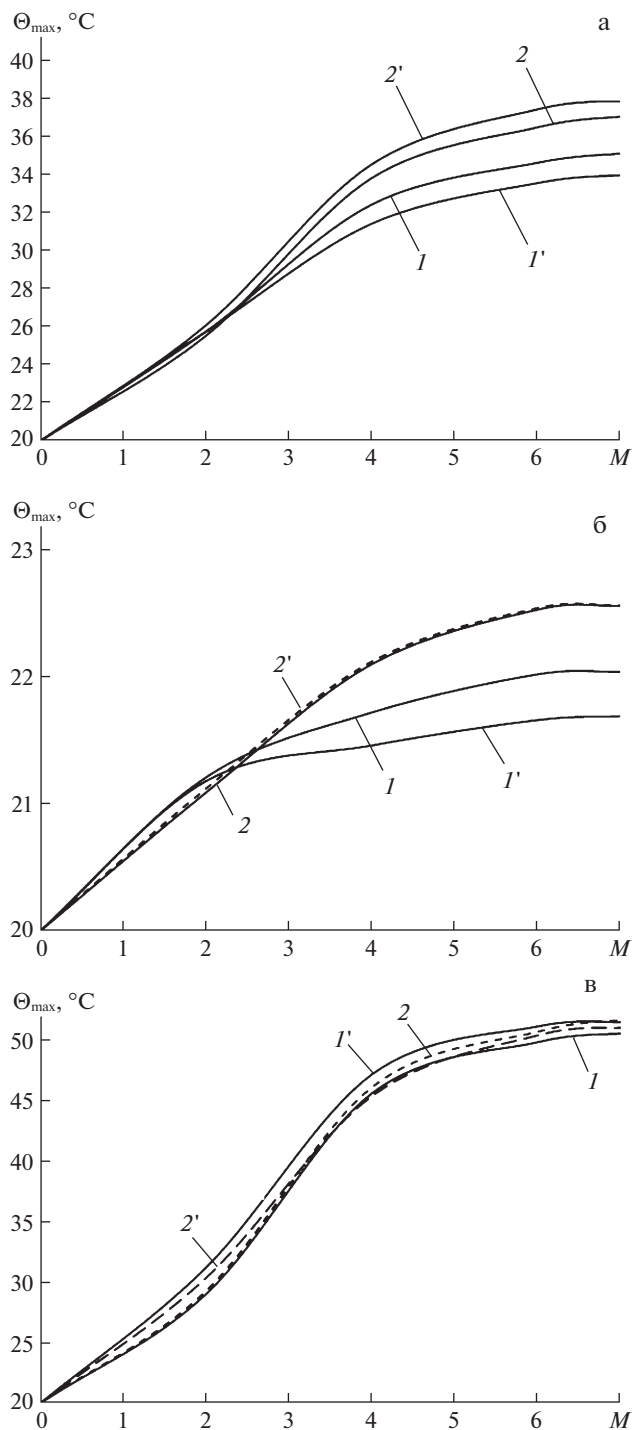


Рис. 3. Зависимость максимального значения температуры от порядка аппроксимирующего полинома в относительно тонкой (а) и толстой (б) стеклопластиковых пластинах и в относительно тонкой металлокомпозитной конструкции (в).

тате чего зависимость $\Theta_{\max}(M)$ становится расходящейся. Поэтому кривые на рис. 3 при $M \geq 8$ не изображены.

Традиционно принято считать, что для проведения практических расчетов с приемлемой точностью в тонкостенных конструкциях вполне достаточно использовать линейное ($M = 1$) или квадратичное ($M = 2$) распределение температуры по их толщине [5, 14]. Сравнение же ординат точек на кривых рис. 3 при $M = 1$ или $M = 2$ и при $M = 7$ показывает, что в случаях неупругого динамического изгибного деформирования КМ-пластин линейное и квадратичное распределение температуры в них приводит к существенному занижению максимальных расчетных значений температуры. Для получения же адекватных расчетов температурных полей в таких случаях деформирования тонкостенных КМ-конструкций температуру в них по толщине следует аппроксимировать полиномами 6-го или 7-го порядков (см. разложение (4.9) при $M = 6$ или $M = 7$).

Для получения более наглядного представления о различии температурных полей, рассчитанных в рассматриваемых КМ-пластинах при $M = 2$ и $M = 7$, на рис. 4 изображены осцилляции наибольших значений температуры $\Theta_m(t; M) = \max_{\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r}; M)$ в зависимости от времени t . Кривые на рис. 4а–в рассчитаны для тех же КМ-конструкций, что и на рис. 3а–в соответственно, но на рис. 4, чтобы его не загромождать, представлены зависимости $\Theta_m(t; M)$ только для пластин с 2D-структурами армирования. Все кривые на рис. 4 рассчитаны по термоупруговязкопластической теории; сплошные кривые 1 соответствуют случаю $M = 2$, а штриховые линии 2 – $M = 7$. Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 4 свидетельствует о том, что расчет зависимости $\Theta_m(t; M)$ в простейшем случае при $M = 2$ лишь качественно (причем весьма приближенно), но не количественно, позволяет определить осцилляции максимальных значений температуры в рассматриваемых КМ-пластинах.

Поведение кривых на рис. 4а и 4в демонстрирует, что максимальные значения температуры в относительно тонких КМ-конструкциях достигаются в моменты времени (на рис. 4а – при $t \approx 31$ мс, а на рис. 4в – при $t \approx 18$ мс), которые много больше времени действия внешней интенсивной кратковременной нагрузки, т.е. значительно больше $t_{\min} = 2$ мс (см. выражения (6.1)). Отметим, что в некоторых расчетах, выполненных при $M = 2$ и $M = 7$, наблюдалось существенное различие моментов времени, в которые достигается наибольшее значение температуры Θ_{\max} . Следовательно, использование простейшей аппроксимации температуры по толщине КМ-пластины (при $M = 2$) может приводить к неверному определению момента времени, в который температура конструкции достигает максимального значения.

Поведение же кривых на рис. 4б показывает, что в случае относительно толстых стеклопластиковых пластин зависимости $\Theta_m(t; M)$ при разных M достигают своих наибольших значений на первой осцилляции, т.е. в моменты времени, близкие к $t_{\min} = 2$ мс. Качественно аналогичное поведение зависимостей $\Theta_m(t; M)$ при $M = 2$ и $M = 7$ наблюдается и в случае относительно толстых металлокомпозитных пластин (при $p_{\max} = 50$ МПа), поэтому соответствующие кривые на рис. 4 не приведены.

На рис. 5 изображены осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций связующего материала $\epsilon_*^{(0)}$ рассматриваемых композиций ($\epsilon_m^{(0)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \epsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r})$, $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$, $|x_3| \leq h$). Кривые на рис. 5а–в получены для тех же КМ-пластин, что и на рис. 3а–в соответственно. Номера кривых на рис. 5 имеют тот же смысл, что и на рис. 3. Все кривые на рис. 5 рассчитаны при значении $M = 7$ (см. разложение (4.9)).

В работе [22] рассматривались только относительно толстые КМ-пластины. На рис. 5а, 5в и 5г представлены результаты расчетов относительно тонких стеклопласти-

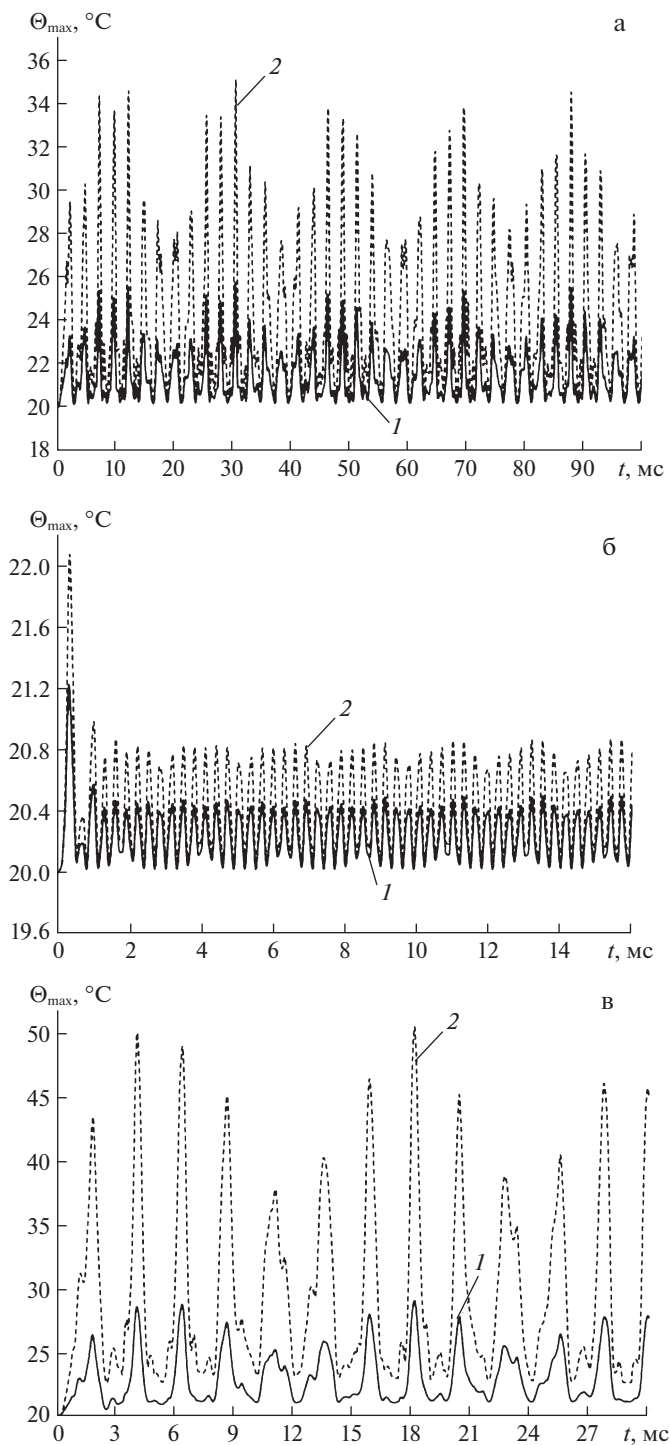


Рис. 4. Зависимости от времени наибольших значений температуры в относительно тонкой (а) и толстой (б) стеклопластиковых пластинах и в относительно тонкой металлокомпозитной конструкции (в), рассчитанные с использованием разных аппроксимаций температурного поля в поперечном направлении.

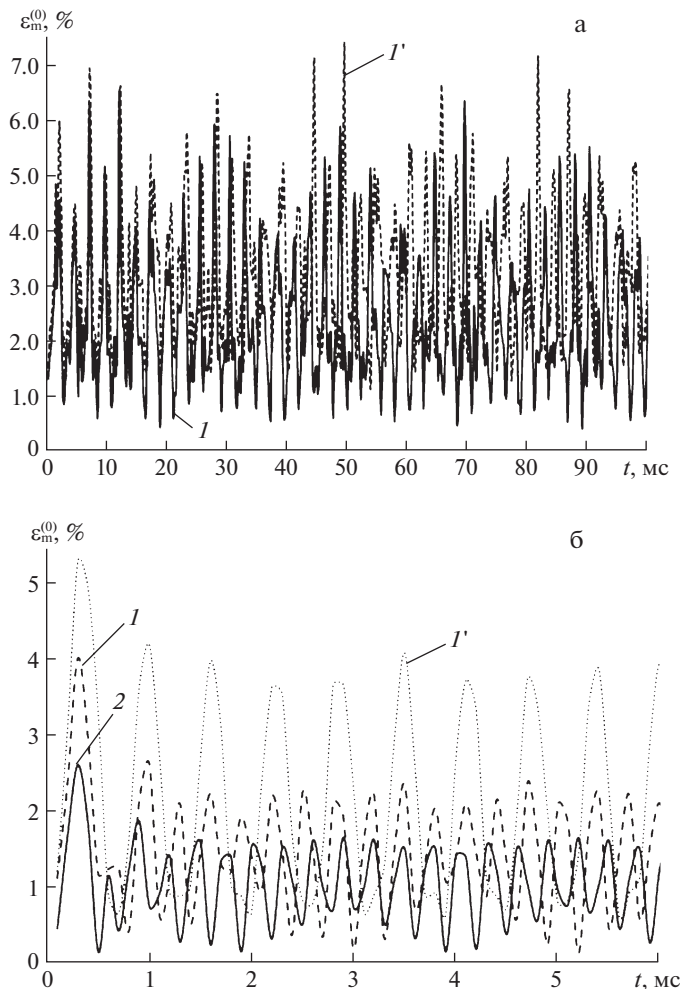


Рис. 5. Зависимость от времени максимального значения интенсивности деформаций связующего в относительно тонкой (а) и толстой (б) стеклопластиковых пластинах и в относительно тонкой металлокомпозитной конструкции при 2D-структуре (в) и при 4D-структуре армирования (г).

ковых и металлокомпозитных пластин соответственно, а на рис. 5б — относительно толстых стеклопластиковых конструкций. Сравнение кривых I и I' на рис. 5а–в показывает, что расчет по термоупругопластической теории (кривые I') приводит к существенному завышению наибольших значений $\varepsilon_m^{(0)}$ как в относительно тонких, так и в относительно толстых КМ-пластинах по сравнению с расчетами, выполненными по термоупруговязкопластической теории (кривые I), даже в случаях, когда пластические свойства компонентов композиции весьма слабо зависят от скорости деформирования, как это имеет место в случае стеклопластиковой композиции (см. табл. 1).

Несмотря на то, что кривые I и I' на рис. 5а–в существенно различаются, аналогичные кривые I и I' на рис. 3а–в различаются незначительно. Следовательно, неучет чувствительности пластических свойств материалов композиции к скорости дефор-

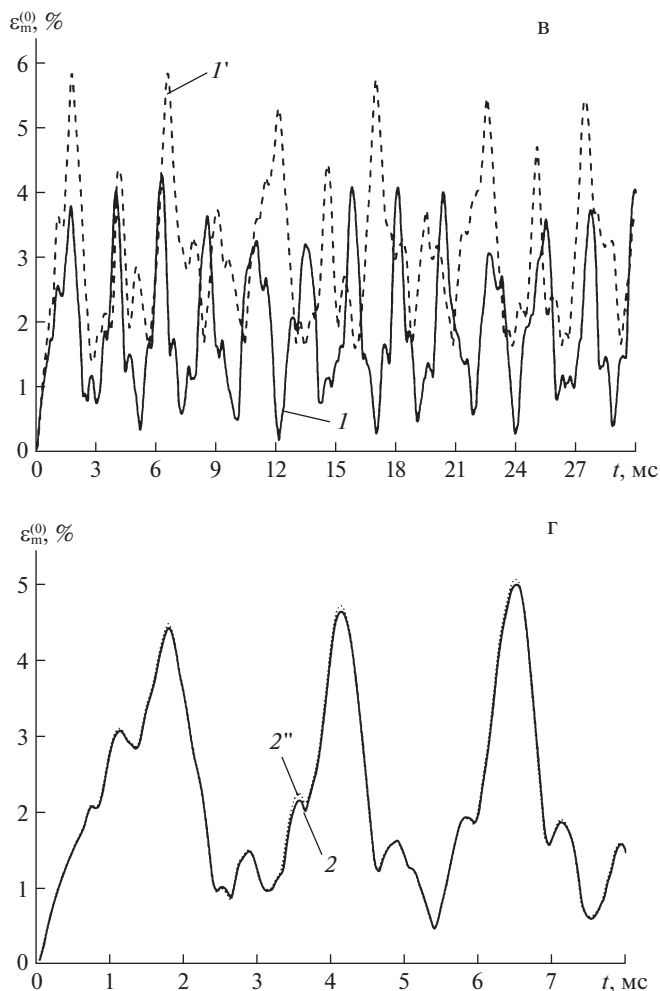


Рис. 5. Окончание

мирования не оказывает настолько существенного влияния на температурное поле в КМ-конструкции, как на деформированное состояние компонентов композиции в них.

Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 5б свидетельствует о том, что в относительно толстой стеклопластиковой пластине замена традиционной 2D-структуры армирования (см. рис. 2а) на пространственную структуру 4D-армирования (см. рис. 2б) позволяет существенно уменьшить интенсивность деформаций связующего материала, но при этом, согласно поведению кривых 1 и 2 на рис. 3б, увеличивается максимальное значение температуры Θ_{\max} в КМ-пластине. Однако это увеличение значения Θ_{\max} невелико и составляет примерно 0.5°C .

Аналогичная замена структур армирования в относительно тонкой стеклопластиковой пластине также приводит к уменьшению наибольшего значения интенсивности деформаций связующего материала в ней. Однако это уменьшение практически пренебрежимо мало, поэтому соответствующая кривая 2 на рис. 5а не изображена, чтобы его не загромождать. В случаях металлокомпозитных пластин как относительно тон-

ких, так и относительно толстых указанная замена структур армирования является неэффективной, так как приводит к увеличению интенсивности деформаций связующего материала (ср. поведение кривых 1 и 2 на рис. 5в и 5г).

Поведение кривых на рис. 4а–в и 5а–в качественно схоже. Так, на рис. 5б наибольшее значение зависимости $\epsilon_m^{(0)}(t)$ достигается на первой осцилляции при $t \approx 0.4$ мс; аналогично и на рис. 4б наибольшее значение зависимости $\Theta_m(t)$ достигается на первой осцилляции в тот же момент времени, т.е. примерно тогда, когда внешняя нагрузка достигает своего наибольшего значения (см. формулу (6.1)). Наибольшие же значения величин Θ_m и $\epsilon_m^{(0)}$ на рис. 4а, 4в, 5а и 5в достигаются в моменты времени, существенно превосходящие значение t_{\min} , т.е. после прекращения действия внешней нагрузки. При этом моменты времени, в которые достигаются наибольшие значения величин Θ_m и $\epsilon_m^{(0)}$ не совпадают.

Тот факт, что при нелинейном динамическом деформировании тонкостенных КМ-конструкций деформации могут достигать своих наибольших значений значительно позже времени прекращения действия кратковременной интенсивной нагрузки, был обнаружен еще в [12] для упругих оболочек.

Сравнение кривых с одинаковыми номерами на рис. 5а и 5б показывает, что наибольшие значения интенсивности деформаций связующего материала в стеклопластиковых пластинах разной относительной толщины сопоставимы между собой. Однако сопоставление аналогичных кривых на рис. 3а и 3б свидетельствует о том, что относительно толстая конструкция (см. рис. 3б) нагревается существенно меньше, чем относительно тонкая (см. рис. 3а). Объясняется это тем, что в относительно толстой КМ-конструкции наиболее интенсивное деформирование материалов компонентов композиции происходит в узких зонах в окрестности жестко закрепленных кромок. При этом в указанных зонах доминируют деформации поперечных сдвигов. В относительно же тонких пластинах наиболее интенсивно деформируется основная часть конструкции (удаленная от опорных кромок), в которой доминируют изгибные деформации. Поэтому в относительно тонких КМ-пластинах механическая энергия более активно диссипирует в тепловую энергию, чем в относительно толстых конструкциях даже при сопоставимых уровнях максимальных деформаций в их компонентах композиции.

Все обсуждаемые выше результаты были получены при учете термочувствительности компонентов композиции. Расчеты, проведенные без учета термочувствительности (при использовании значений характеристик компонентов композиции, приведенных в табл. 1 для температуры естественного состояния $\Theta^0 = 20^\circ\text{C}$), показывают, что зависимости $\Theta_m(t)$ и $\epsilon_m^{(0)}(t)$ при этом визуально не отличаются от кривых, изображенных на рис. 3, 4а–в и 5а–в. Объясняется это малым приращением температуры при динамическом деформировании КМ-пластин (всего на 2...30°C) под воздействием воздушной взрывной волны. Подчеркнем, что аналогичный (порядка 10°C) уровень нагрева образцов из однородных материалов наблюдается и в экспериментах по ударному нагружению [19].

В связи с малым уровнем нагрева рассматриваемых конструкций целесообразно сравнить полученные выше результаты с расчетами, выполненными по упруговязкопластической теории [22], т.е. при полном неучете теплового воздействия. Было установлено, что для рассматриваемых КМ-пластин результаты таких расчетов по прогибам (соответствующие зависимости не изображены) визуально не отличаются от расчетов, выполненных по термоупруговязкопластической теории. Однако для зависимостей $\epsilon_m^{(0)}(t)$ наблюдается некоторое различие. Так, кривая 2 на рис. 5г получена при учете теплового воздействия, а кривая 2' – без учета этого воздействия. Видно,

что в этом случае уже в окрестности начального момента времени проявляется заметное различие в поведении кривых 2 и $2'$, однако ординаты точек глобальных максимумов на этих кривых, которые достигаются в момент времени $t = 6.5$ мс, различаются всего на 1.4%. Аналогичное пренебрежимо малое различие зависимостей $\epsilon_m^{(0)}(t)$, рассчитанных с учетом и без учета теплового воздействия, наблюдается во всех остальных рассмотренных выше случаях, причем с увеличением времени это различие становится все более заметным, но по-прежнему остается пренебрежимо малым.

На рис. 5 не приведены зависимости $\epsilon_m^{(k)}(t)$ для арматуры k -го семейства ($1 \leq k \leq N$), потому что они качественно аналогичны кривым, изображенным на рис. 5 для связующего материала, но имеют меньшие значения по оси ординат. Например, для арматуры второго семейства ($k = 2$), которая испытывает наибольшие деформации, максимальные значения $\epsilon_m^{(2)}$ примерно в 1.5 раза меньше, чем для зависимостей, приведенных на рис. 5.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что расчет неупругого динамического поведения изгибаемых КМ-пластин при нагружении их воздушной взрывной волной можно проводить без учета влияния тепловых полей, которые возникают за счет механической диссипации энергии в таких КМ-конструкциях.

Заключение. Разработанная структурная модель, ориентированная на использование явных пошаговых схем, позволяет численно-аналитически моделировать поведение термоупруговязкопластически деформируемых КМ волокнистого строения в рамках теории течения с изотропным упрочнением, когда функция нагружения чувствительна к изменению температуры и скорости деформирования материала композиции. Полученные условия термоупругого деформирования, разгрузки, нейтрального и активного нагружения компонентов композиции с учетом изменения температуры и скорости деформирования позволяют проводить расчеты в условиях переменного во времени термосилового нагружения КМ.

Разработанная модель термоупруговязкопластического деформирования гибких пластин с произвольными структурами армирования позволяет учитывать возможное слабое сопротивление таких КМ-конструкций поперечным сдвигам и связанность теплофизической и механической составляющих задачи. Разработанный численный метод позволяет по явной схеме интегрировать сформулированную связанную начально-краевую задачу. Установлено, что величину шага по времени следует выбирать из необходимого условия устойчивости Куранта–Фридрикса–Леви для волнового уравнения, а не из необходимого условия устойчивости явной численной схемы для уравнения теплового баланса.

Установлено, что для адекватного расчета температурных полей в динамически изгибаемых неупругих КМ-пластинах температуру в поперечном направлении следует аппроксимировать полиномами 6–7-го порядков.

Проведенные расчеты показали, что при поперечном нагружении КМ-пластин воздушной взрывной волной стеклопластиковые конструкции нагреваются на 2...18°C, а металлокомпозитные – на 30°C, причем относительно тонкие пластины нагреваются сильнее, чем относительно толстые (даже при сопоставимых величинах наибольших значений интенсивностей деформаций компонентов композиции). Замена плоской ортогональной структуры армирования (рис. 2а) на пространственную структуру армирования (рис. 2б) при сохранении общего расхода волокон в относительно толстой стеклопластиковой пластине позволяет уменьшить интенсивность деформаций связующего материала на 35.1%, однако максимальное значение температуры при такой замене возрастает, хотя и незначительно (от 2 до 2.5°C). Аналогичная замена структур армирования в относительно тонких стеклопластиковых, а также относительно тонких и относительно толстых металлокомпозитных пластинах является неэффектив-

ной, так как приводит к увеличению интенсивности деформаций связующего материала и к увеличению приращения температуры в них.

Для проведения адекватных динамических расчетов неупруго деформируемых изгибаемых КМ-пластин под действием нагрузки, порожденной воздушной взрывной волной, можно вполне обоснованно не учитывать влияние теплового воздействия, если отсутствуют дополнительные источники нагрева или охлаждения немеханического происхождения. Однако при этом нельзя пренебрегать чувствительностью пластических свойств материалов композиции к скорости их деформирования как в относительно толстых [22], так и в относительно тонких КМ-конструкциях.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // Compos. Struct. 2001. V. 53. № 1. P. 21–42.
2. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // Composites. 2001. Part A32. P. 901–910.
3. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction // Progr. in Aerospace Sci. 2005. V. 41. № 2. P. 143–151.
4. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // Frontiers Mech. Eng. 2013. V. 8. № 2. P. 187–200.
5. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андришин В.А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
6. Димитриенко Ю.И. Механика композитных конструкций при высоких температурах. М.: Физматлит, 2019. 448 с.
7. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
8. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Compos. Struct. 2010. V. 93. P. 14–31.
9. Kazancı Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // Int. J. Non-Linear Mech. 2011. V. 46. P. 807–817.
10. Morinière F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. A review // Int. J. Impact Eng. 2014. V. 67. P. 27–38.
11. Mao-hong Yu. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // ASME. Appl. Mech. Rev. 2002. V. 55. № 3. P. 169–200.
12. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
13. Reddy J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. New York: CRC Press, 2004. 831 p.
14. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Acad. Publ., 2013. 93 с.
15. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
16. Пикун В.В. Механика оболочек. Владивосток: Дальнаука, 2009. 536 с.
17. Янковский А.П. Упругопластическое деформирование гибких пластин с пространственными структурами армирования // ПМТФ. 2018. Т. 59. № 6. С. 112–122.
18. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. Гольденблата И.И. М.: Машиностроение, 1965. 567 с.
19. Белл Дж. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. II. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
20. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред, М.: Мир, 1979. 302 с.
21. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. М.: Физматлит, 2004. 144 с.

22. Янковский А.П. Моделирование упругопластического изгиба пространственно-армированных пластин при учете чувствительности компонентов композиции к изменению скорости деформирования // ПММ. 2019. Т. 83. № 4. С. 660–686.
23. Reissner E. The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. V. 12. № 2. P. 69–77.
24. Хажинский Г.М. Модели деформирования и разрушения металлов. М: Научный мир, 2011. 231 с.
25. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comput.&Struct. 1987. V. 26. № 1/2. P. 1–15.
26. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Карпиноса Д.М. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
27. Simmons J.A., Hauser F.E., Dorn J.E. Mathematical theories of plastic deformation under impulsive loading // Univ. Calif. Publ. in Engng. 1962. № 2. P. 177–230.
28. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
29. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
30. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопrotивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
31. Янковский А.П. Моделирование процессов теплопроводности в пространственно-армированных композитах с произвольной ориентацией волокон // Прикл. физика. 2011. № 3. С. 32–38.
32. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
33. Киселев С.П. Механика сплошных сред. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. 164 с.
34. Грешнов В.М. Физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов. М.: Физматлит, 2018. 232 с.
35. Кудинов А.А. Тепломассообмен. М.: ИНФРА-М, 2012. 375 с.
36. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
37. Новицкий Л.А., Кожевников И.Г. Теплофизические свойства материалов при низких температурах. Справочник. М.: Машиностроение, 1975. 216 с.
38. Луканин В.Н., Шатров М.Г. и др. Теплотехника. М.: Высш. шк., 2003. 671 с.
39. Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1 / Под. ред. Любина Дж. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.

Modeling of Thermo-Elastic-Visco-Plastic Deformation of Flexible Reinforced Plates

A.P. Yankovskii[#]

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia

[#]*e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

A model of thermo-elastic-visco-plastic deformation of a composite material criss-cross-reinforced with continuous fibers in arbitrary directions has been developed. The materials of the components of the composition are isotropic; their plastic deformation is described by the theory of flow with isotropic hardening. The dependences of the loading functions on temperature and strain rate of these materials are taken into account. A mathematical model of thermo-elastic-visco-plastic bending behavior of reinforced plates has been built. The weak resistance to transverse shears of such thin-walled structures is taken into account in the framework of Ambartsumyan's theory. Geometric nonlinearity is taken into account in the Karman approximation. The connectedness of the mechanical and thermophysical components of the problem of dynamic inelastic deformation of composite plates is taken into account. The temperature across the thickness of the constructions is approximated by polynomials of different orders. An explicit numerical scheme is used to solve the formulated two-dimensional problem. The thermo-elastic-visco-plastic behavior of plane-cross and spatially reinforced fiberglass and metal-composite plates, dynamically bent under the action of an air blast wave, has been investigated. It is shown that in order to adequately deter-

mine the temperature in such structures, it must be approximated by polynomials of the 6–7th order in the thickness of the plates. It has been demonstrated that relatively thin composite plates heat up by 15...30°C, and relatively thick ones – by 1.5...2.5°C. Due to such a low level of heating of reinforced constructions, their dynamic calculation under the action of loads such as an air blast wave can be carried out without taking into account the thermal effect if there are no additional heat sources of non-mechanical origin. In this case, it is necessary to take into account the sensitivity of the plastic properties of the components of the composition to the rate of their deformation.

Keywords: flexible plates, spatial reinforcement, thermoelastoviscoplastic deformation, coupled problems, Ambartsumyan's bending theory, explosive loads, explicit numerical scheme

REFERENCES

1. *Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K.* Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21–42.
2. *Bannister M.* Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Composites*, 2001, pt. A 32, pp. 901–910.
3. *Soutis C.* Fibre reinforced composites in aircraft construction // *Progr. in Aerospace Sci.*, 2005, vol. 41, no. 2, pp. 143–151.
4. *Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Frontiers Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200.
5. *Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A.* Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells. (Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh cilindricheskikh obolochek) Moscow: Fizmatlit, 2014. 408 p. (in Russian)
6. *Dimitrienko Yu.I.* Mechanics of Composite Structures at High Temperatures. (Mekhanika kompozitnykh konstruksiy pri vysokikh temperaturakh) Moscow: Fizmatlit, 2019. 448 p. (in Russian)
7. *Abrosimov N.A., Bazhenov V.G.* Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs. (Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstrukcij) Nizhny Novgorod: Univ. Press, 2002. 400 p. (in Russian)
8. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Composite Struct.*, 2010, vol. 93, pp. 14–31.
9. *Kazanci Z.* Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non-Lin. Mech.*, 2011, vol. 46, pp. 807–817.
10. *Morinière F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R.* Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. A review // *Int. J. Impact Eng.*, 2014, vol. 67, pp. 27–38.
11. *Mao-hong Yu.* Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // *ASME. Appl. Mech. Rev.*, 2002, vol. 55, no. 3, pp. 169–200.
12. *Bogdanovich A.E.* Nonlinear Problems of the Dynamics of Cylindrical Composite Shells. (Nelinejnye zadachi dinamiki cilindricheskikh kompozitnykh obolochek) Riga: Zinatne, 1987. 295 p. (in Russian)
13. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. N.Y.: CRC Press, 2004, 831 p.
14. *Andreev A.N.* Elasticity and Thermo-Elasticity Layered Composite Shells. Mathematical Model and Some Aspects of the Numerical Analysis. (Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaja model i nekotorye aspekty chislennogo analiza) Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Acad. Publ., 2013. 93 p. (in Russian)
15. *Ambarcumian S.A.* The Theory of Anisotropic Plates. Strength, Stability and Fluctuations (Teoria anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebania) Moscow: Nauka, 1987. 360 p. (in Russian)
16. *Pikul' V.V.* Mechanics of Shells (Mekhanika obolochek). Vladivostok: Dal'nauka, 2009. 536 p. (in Russian)
17. *Yankovskii A.P.* Elastic-plastic deformation of flexible plates with spatial reinforcement structures // *J. Appl. Mech. & Techn. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 6, pp. 1058–1066.
18. *Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M.* Calculations on Strength, Stability and Fluctuations in Conditions of High Temperatures. (Raschety na prochnost',

- ustoychivost' i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur) Moscow: Mashinostroenie, 1965. 567 p. (in Russian).
19. Encyclopedia of Physics Vol. VIa/1, Mechanics of Solids I / Ed. by *Truesdell C.* Heidelberg: Springer, 1973.
 20. *Kolarov D., Baltov A., Boncheva N.* Mechanics of Plastic Mediums. (Mekhanika plasticheskikh sred). Moscow: Mir, 1979. 302 p. (in Russian)
 21. *Bondar' V.S.* Inelasticity. Variants of the Theory. (Neuprugost'. Varianty teorii) Moscow: Fizmatlit, 2004. 144 p. (in Russian)
 22. *Yankovskii A.P.* Modeling the Elasto-Visco-Plastic Bending of Space-Reinforced Plates Taking into Account Sensitivity of Components of the Composition to Strain Rate (Modelirovaniye uprugoplasticheskogo izgiba prostranstvenno-armirovannykh plastin pri uchete chuvstvitel'nosti komponentov kompozitsii k izmeneniyu skorosti deformirovaniya) // JAMM, 2019, vol. 83, no. 4, pp. 660–686. (in Russian)
 23. *Reissner E.* The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech., 1945, vol. 12, no. 2, pp. 69–77.
 24. *Khazhinskii G.M.* Model of Deformation and Fracture of Metals. (Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov) Moscow: Nauchny mir, 2011. 231 p. (in Russian)
 25. *Houlston R., DesRochers C.G.* Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comput.&Struct., 1987, vol. 26, no. 1/2, pp. 1–15.
 26. Composite Materials. Handbook. (Kompozitsionnye materialy. Spravochnik) / Ed. by *Karpinos D.M.* Kiev: Naukova dumka, 1985. 592 p. (in Russian)
 27. *Simmons J.A., Hauser F.E., Dorn J.E.* Mathematical theories of plastic deformation under impulsive loading // Univ. California. Publ. in Engng., 1962, no. 2, pp. 177–230.
 28. *Richtmyer R.D., Morton K.W.* Difference Methods for Initial-Value Problems. N.Y.: Wiley, 1967.
 29. *Dekker K., Verwer J.G.* Stability of Runge–Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equation. Amsterdam: North-Holland, 1984. 308 p.
 30. *Malmmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A.* Resistance of Rigid Polymeric Materials. (Soprotivlenie zhyestkikh polimernykh materialov) Riga: Zinatne, 1972. 500 p. (in Russian)
 31. *Yankovskii A.P.* Modelling of processes of thermal conductivity in spatially reinforced composites with any orientation of fibres // Appl. Phys., 2011, no. 3, pp. 32–38. (in Russian)
 32. Spatially Reinforced Composite Materials. (Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy: Spravochnik.) / Ed. by *Tarnopol'skii Yu.M., Zhigun I.G., Poliakov V.A.* Moscow: Mashinostroenie, 1987. 224 p. (in Russian)
 33. *Kiselev S.P.* Continuum Mechanics. (Mekhanika sploshnykh sred) Novosibirsk: NSTU, 2017. 164 p. (in Russian)
 34. *Greshnov V.M.* Physical and Mathematical Theory of Large Irreversible Deformations of Metals. (Fiziko-matematicheskaya teoriya bol'shikh neobratimyykh deformatsiy metallov) Moscow: Fizmatlit, 2018. 232 p. (in Russian)
 35. *Kudinov A.A.* Heat and Mass Transfer. (Teplomassoobmen) Moscow: INFRA-M, 2012. 375 p. (in Russian)
 36. *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. Oxford : Pergamon Press, 1982.
 37. *Novitsky L.A., Kozhevnikov I.G.* Thermophysical Properties of Materials at Low Temperatures. Handbook. (Teplofizicheskiye svoystva materialov pri nizkikh temperaturakh. Spravochnik) Moscow: Mech. Engng., 1975. 216 p. (in Russian)
 38. *Lukanin V.N., Shatrov M.G. et al.* Heat Engineering. (Teplotekhnika) Moscow: Higher School, 2003. 671 p. (in Russian)
 39. Handbook of Composites / Ed. by *G. Lubin.* N.Y.: Springer, 1982. 786 p.