УДК 519.958

ПРОХОЖДЕНИЕ И ЗАХВАТ ВОЛН В АКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ПЕРФОРИРОВАННЫМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ

© 2022 г. С. А. Назаров[1,*], Л. Шенель[2,**]

[1] *Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия*
[2] *INRIA/Centre de mathématiques appliquées, Université Paris-Saclay, Palaiseau, France*
**e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*
***e-mail: lucas.chesnel@inria.fr*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 03.02.2021 г.
Принята к публикации 10.03.2021 г.

Изучаются захват и прохождение волн через акустический волновод с семейством перфорированных перегородок. Собственные числа соответствующей спектральной задачи Неймана для оператора Лапласа найдены при условии геометрической симметрии. Почти полное прохождение поршневой волны через систему мелких отверстий (инвертированная аномалия Вайнштейна) достигается путем точной настройки расстояния между перегородками при разнообразной конфигурации соединительных отверстий. Установлен критерий возможности образования названной аномалии. Обсуждаются родственные вопросы, в частности, примитивные волновые фильтры и эффект камеры обскура.

Ключевые слова: акустический волновод, перфорированные стенки, захваченные волны, асимптотика коэффициентов рассеяния, почти полное прохождение волны

DOI: 10.31857/S0032823522010076

1. Постановка задачи. Опишем общую геометрию волновода, однако при некоторых ограничениях, которые будут сниматься в работе по мере надобности. Пусть $\Omega = \omega\times\mathbb{R}$ – цилиндр с сечением ω, областью на плоскости $\mathbb{R}^2$ с липшицевой границей $\partial\omega$ и компактным замыканием $\overline{\omega} = \omega\cup\partial\omega$. Масштабированием сведем характерный размер сечения к единице и сделаем безразмерными системы декартовых координат $x = (y,z)\in\mathbb{R}^3$, $y = (y_1,y_2) := (x_1,x_2)$ и все геометрические параметры. Начало тех или иных координат обозначаем O. Пусть еще ω_* – внутренняя подобласть области ω и $P^1,\dots,P^J$ – попарно различные точки в ней, т.е. $\overline{\omega}_*\subset\omega$ и $P^j\in\omega_*$, $P^j\neq P^k$ при $j\neq k$. Наконец, зафиксируем точки $z^1<\dots<z^N$ на оси аппликат $z = x_3$ и подберем коэффициенты растяжения/сжатия $\gamma_n>0$ и векторы сдвигов $y^n\in\mathbb{R}^2$ так, чтобы

$$\Omega_n = \left\{x : \gamma_n^{-1}\left(y-y^n\right)\in\omega, z\in\Upsilon_n := \left(z^n,z^{n+1}\right)\right\}\supset\omega_*\times\Upsilon_n;\quad n = 1,\dots,N-1 \tag{1.1}$$

Акустический волновод Π^ε с резонатором (рис. 1, а–г) составлен из полубесконечных цилиндрических рукавов

$$\Omega_0 := \Omega^- = \omega\times\left(-\infty,z^1\right),\quad \Omega_N := \Omega^+ = \omega\times\left(z^N,+\infty\right) \tag{1.2}$$

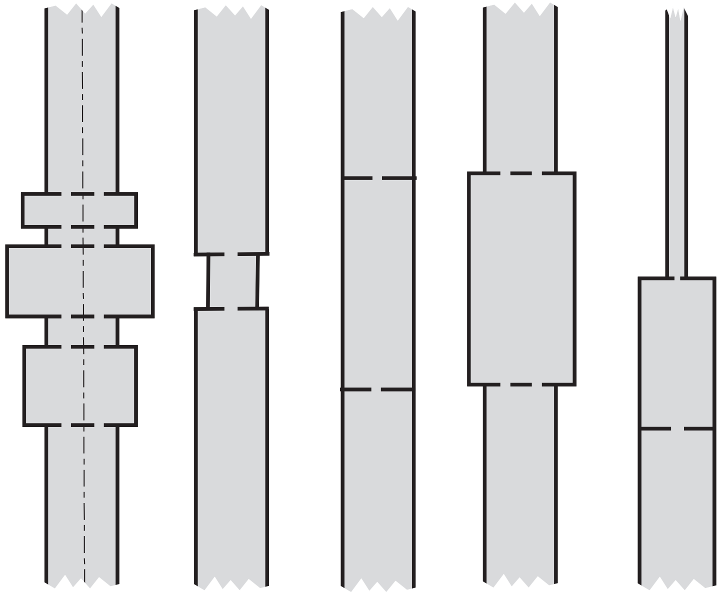

Рис. 1. Волноводы с несколькими (а) или одной (б–д) камерами, отделенными перфорированными перегородками.

и конечных цилиндров (1.1), зауженных или расширенных камер-вставок, которые соединены через мелкие отверстия

$$\theta_j^\varepsilon(z^n) = \left\{x : \varepsilon^{-1}\left(y - P^j\right) \in \theta_j, z = z^n\right\}; \quad j = 1,\dots,J, \quad n = 1,\dots,N-1 \tag{1.3}$$

в поперечных перегородках $\partial\Omega_n \cap \partial\Omega_{n-1}$. При этом $\theta_1,\dots,\theta_J$ – ограниченные липшицевы области на плоскости, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ – малый параметр, а величина $\varepsilon_0 > 0$ зафиксирована так, что замыкания проекций множеств (1.3) на плоскость $\{x : z = 0\}$ попадают вовнутрь области ω_*, т.е. $\overline{\theta_j^\varepsilon}(z^n) \subset \partial\omega_* \times \{z^n\}$.

Гармонические во времени колебания акустической среды в волноводе с жесткими стенками и перфорированными перегородками

$$\Pi_N^\varepsilon = \bigcup_{n=0}^{N} \Omega_n \cup \bigcup_{n=1}^{N}\bigcup_{j=1}^{J} \theta_j^\varepsilon\left(z^n\right) \tag{1.4}$$

описываются при помощи спектральной задачи Неймана для оператора Лапласа Δ_x в дифференциальной форме

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \lambda u^\varepsilon(x), \quad x \in \Pi_N^\varepsilon, \quad \partial_\nu u^\varepsilon(x) = 0; \quad x \in \partial\Pi_N^\varepsilon \tag{1.5}$$

или вариационной форме

$$\left(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon\right)_{\Pi_N^\varepsilon} = \lambda\left(u^\varepsilon, \psi^\varepsilon\right)_{\Pi_N^\varepsilon}; \quad \psi^\varepsilon \in H^1\left(\Pi_N^\varepsilon\right) \tag{1.6}$$

Здесь $\nabla_x = \mathrm{grad}$, ∂_ν – производная вдоль внешней нормали ν, определенная почти всюду на липшицевой поверхности $\partial\Pi_N^\varepsilon$, а u^ε – давление в среде, $\lambda = \kappa^2$ – спектральный параметр и $\kappa > 0$ – частота колебаний (масштабированием постоянная плотность сведена к единице). Наконец, $(\cdot,\cdot)_{\Pi_N^\varepsilon}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2\left(\Pi_N^\varepsilon\right)$ и $H^1\left(\Pi_N^\varepsilon\right)$ – пространство Соболева.

При гладких или кусочно-гладких границах задействованных областей можно оперировать исключительно дифференциальной постановкой (1.5) задачи в обычных или весовых пространствах Соболева ([1] гл. 5 и 6), однако при собственно липшицевых поверхностях приходится иметь дело с интегральным тождеством (1.6). Далее ограничиваемся классическими формулировками возникающих краевых задач, так как переход к обобщенным проводится по стандартной схеме [2].

Левая часть равенства (1.6) – положительная, симметричная и замкнутая в $H^1\left(\Pi^\varepsilon\right)$ форма, а значит, задаче (1.5) ставится в соответствие ([3] гл. 10) положительный самосопряженный оператор A^ε в $L^2\left(\Pi^\varepsilon\right)$, область определения которого шире пространства Соболева $H^2\left(\Pi^\varepsilon\right)$ из-за корневых сингулярностей градиента решения на ребре $\partial\theta_j^\varepsilon(z^n) = \{x : y \in \partial\theta_j^\varepsilon,\ z = z^n\}$ (см. [4, 5] и, например, ([1] гл. 2 и 12)). Непрерывный спектр σ_c^ε оператора A^ε занимает замкнутую полуось $\overline{\mathbb{R}_+} = [0,+\infty)$ и разбивается на участки постоянной кратности собственными числами

$$0 = \Lambda_0 < \Lambda_1 \le \Lambda_2 \le \ldots \le \Lambda_k \le \ldots \to +\infty \tag{1.7}$$

модельной задачи на сечении

$$-\Delta_y U(y) = \Lambda U(y), \quad y \in \omega, \quad \partial_\nu U(y) = 0; \quad y \in \partial\omega \tag{1.8}$$

Дискретный спектр σ_d^ε заведомо пуст, но у оператора A^ε могут быть собственные числа, вкрапленные в непрерывный спектр и образующие точечный спектр σ_p^ε. В разд. 3 при дополнительных условиях симметрии (рис. 1, а)

$$\Pi_N^\varepsilon = \left\{x = (y,z) : (-y_1, y_2, z) \in \Pi_N^\varepsilon\right\} \tag{1.9}$$

и “раздутия” $\gamma_n > 1$ хотя бы одной из камер при помощи приема [6] показано, что множество $\sigma_p^\varepsilon \cap (0,\Lambda_1)$ не пусто. В то же время для уменьшенных камер (рис. 1, б)

$$\gamma_n \le 1, \quad L_n = z^{n+1} - z^n < \pi\Lambda_1^{-1/2}; \quad n = 1,\ldots,N-1 \tag{1.10}$$

на интервале $(0,\Lambda_1)$ собственных чисел оператора A^ε нет – этот факт вытекает из априорных оценок решений в сингулярно возмущенных областях [7]. В общей ситуации, в частности, выше первой положительной точки отсечки Λ_1 строение точечного спектра осталось неизученным.

Зафиксируем спектральный параметр $\lambda = \kappa^2$ в первом интервале $(0,\Lambda_1)$ непрерывного спектра; при этом $\kappa \in (0,\kappa_\dagger)$ и $\kappa_\dagger = \sqrt{\Lambda_1}$. Тогда в прямом бесконечном цилиндре Ω распространяются только поршневые волны, не зависящие от поперечных координат y

$$w^\pm(z) = \alpha e^{\pm i\kappa z}, \quad \kappa = \sqrt{\lambda}, \quad \alpha = (2\kappa|\omega|)^{-1/2} \tag{1.11}$$

Нормирующий множитель α включает площадь $|\omega|$ сечения ω.

Волна w^+, приходящая из бесконечности в рукаве Ω^-, порождает рассеянное акустическое поле и вместе с ним образует решение задачи (1.5)

$$u^\varepsilon(x) = \chi_-(z)\Big(w^+(z) + R^\varepsilon w^-(z)\Big) + \chi_+(z)T^\varepsilon w^+(z) + \tilde{u}^\varepsilon(x) \tag{1.12}$$

При этом R^ε и T^ε — коэффициенты отражения и прохождения при уходящих в рукавах $\Omega^\pm$ волнах (1.11), $\tilde{u}^\varepsilon$ — остаток, затухающий на бесконечности со скоростью $O(e^{-\beta_\lambda |z|})$, $\beta_\lambda = \sqrt{\Lambda_1 - \lambda}$, а $\chi_\pm$ — гладкие срезающие функции, локализующие волны в рукавах $\Omega^\pm$

$$\chi_\pm(z) = 1 \quad \text{при} \quad \pm z > 2z_*, \quad \chi_\pm(z) = 0 \quad \text{при} \quad \pm z < z_*, \quad 0 \le \chi_\pm \le 1$$

Длина $z_* > 0$ зафиксирована так, что $-z_* < z^1 < \ldots < z^{N+1} < z_*$.

Технический результат работы — вывод асимптотических формул для коэффициентов рассеяния

$$R^\varepsilon = R^0 + \tilde{R}^\varepsilon, \quad T^\varepsilon = T^0 + \tilde{T}^\varepsilon, \quad \left|\tilde{R}^\varepsilon\right| + \left|\tilde{T}^\varepsilon\right| \le c\varepsilon \tag{1.13}$$

Формулы (1.13) с достаточно явными выражениями для R^0 и T^0 применяются для обеспечения почти полного прохождения поршневой волны через семейство перфорированных перегородок, т.е. достижению равенства $R^0 = 0$. Основное внимание в статье уделяется случаю двух ($N = 2$) перегородок, причем не только для волновода (1.4) с двумя рукавами (1.2), имеющими одинаковое сечение ω (рис. 1, б—г), но и для волновода (рис. 1, д)

$$\Pi_2^\varepsilon = \Omega_\#\left(\ell^\varepsilon\right) \cup \bigcup_\pm \left(\Omega_\pm\left(\ell^\varepsilon\right) \cup \bigcup_{j=1}^{J_\pm} \theta_{j\pm}^\varepsilon\right) \tag{1.14}$$

у которого рукава

$$\Omega_\pm(\ell^\varepsilon) = \left\{x : y \in \omega_\pm, \pm z > \ell^\varepsilon\right\} \tag{1.15}$$

и камера

$$\Omega_1 := \Omega_\#\left(\ell^\varepsilon\right) = \left\{x : y \in \omega_\#, |z| < \ell^\varepsilon\right\} \tag{1.16}$$

имеют неодинаковые сечения $\omega_\pm$, $\omega_\# \subset \mathbb{R}^2$, а перегородки — различающуюся перфорацию

$$\Theta_\pm^\varepsilon\left(\ell^\varepsilon\right) = \left\{x : y \in (\omega_\pm \cap \omega_\#) \setminus \bigcup_{j=1}^{J_\pm} \overline{\theta_{j\pm}^\varepsilon}\right\}, \quad \theta_{j\pm}^\varepsilon = \left\{x : \varepsilon^{-1}\left(y - P_{(\pm)}^j\right), z = \pm\ell^\varepsilon\right\} \tag{1.17}$$

При этом $\omega_\pm \cap \omega_\# \ne \varnothing$ и $P_{(\pm)}^j \in \omega_\pm \cap \omega_\#$, $j = 1, \ldots, J_\pm$. Используемые в формулах (1.14)—(1.17) обозначения вполне аналогичны введенным в начале раздела и не нуждаются в пояснениях. Упомянем лишь, что нормирующий множитель $\alpha_\pm$ в поршневых волнах равен $(2\kappa|\omega_\pm|)^{-1/2}$.

В разд. 2 приводятся известные результаты, относящиеся к случаям $N = J = 1$ (одна перегородка), $N = 2$, $J = 1$ (одна камера) и $N = \infty$ (периодическое семейство перегородок). В отличие от многих предшествующих публикаций используется метод [7] построения асимптотики решений статических и спектральных сингулярно возмущенных краевых задач, приспособленный [8—10] к дифракционным задачам о волноводах. В разд. 4 содержится вспомогательный материал, а в разд. 5 проведен асимптотический анализ решения (1.12) в волноводе Π_2^ε с двумя перегородками, но произволь-

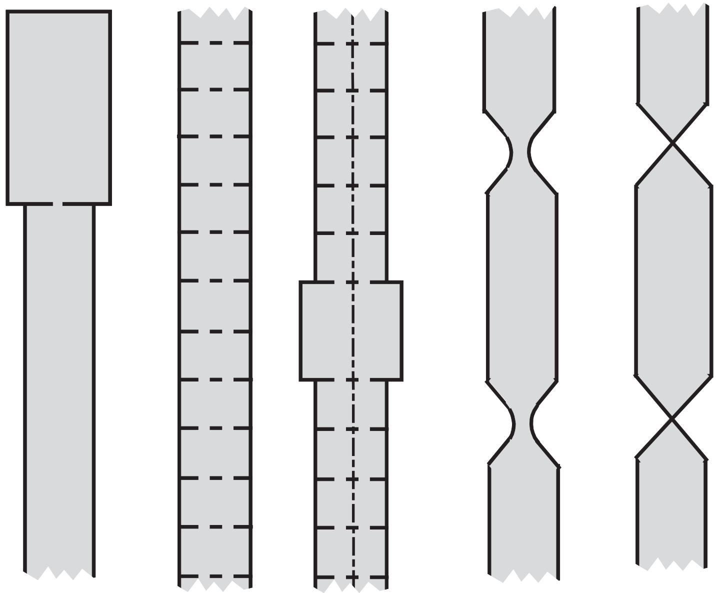

Рис. 2. Камера обскура (а), волноводы с периодическими семействами перфорированных перегородок (б и в) и волноводы с зауженными участками (г и д).

ным количеством отверстий, и как следствие в разд. 6 сформулированы условия, гарантирующие упомянутое почти полное прохождение поршневой волны. Этот эффект, называемый инвертированной аномалией Вайнштейна (терминология [11]), достигается путем подбора полувысоты вставки-камеры (1.16)

$$\ell^{\varepsilon} = \ell^0 + \varepsilon\ell' + \varepsilon^2\ell'' \tag{1.18}$$

Благодаря свойству унитарности матрицы рассеяния названная аномалия распространения волны w^+ в направлении от $-\infty$ к $+\infty$ гарантирует такую же аномалию волны w^- в направлении от $+\infty$ к $-\infty$. Почти полное прохождение отличающихся от поршневых волн не исследовалось.

Многие геометрические ограничения введены в начаде разд. 1 исключительно для предварительной фиксации объекта, но в разд. 5 и 7 обсуждаются разнообразные допустимые изменения геометрии волновода, в частности, широкие трубы, оканчивающиеся “глушителем” (рис. 1, д) или “камерой обскура” (рис. 2, а). Новый результат из разд. 6.2 – критерий (6.9) возможности достижения эффекта почти полного прохождения поршневой волны в волноводе (1.14) с разными рукавами (1.15) и количествами отверстий в двух перегородках. Если $J = 1$, а $\omega_\pm$ и $\theta_{1\pm}$ – круги с радиусами $\rho_\pm^\omega$ и $\rho_\pm^\theta$ соответственно (рис. 1, б), то упомянутый критерий выглядит просто

$$\frac{\rho_+^\theta}{\rho_+^\omega} = \frac{\rho_-^\theta}{\rho_-^\omega} \tag{1.19}$$

В общем случае критерий содержит площади $|\omega_\pm|$ сечений и, что весьма неожиданно, гармонические емкости [12, 13] множеств $\{x \in \mathbb{R}^3 : y \in \overline{\theta_{j\pm}}, z = 0\}$.

2. Известные факты

2.1. Периодический волновод. В рамках теории Флоке–Блоха–Гельфанда (см. [1, 14–17] и др.) существенный спектр σ_e^ε задачи (1.5) в цилиндре Π_∞^ε со счетным периодическим семейством перфорированных перегородок $\{\Theta^\varepsilon(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (рис. 2, б)

$$\Pi_\infty^\varepsilon = \Omega\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\Theta^\varepsilon(n);\quad \Omega = \omega\times\mathbb{R},\quad \mathbb{Z} = \{0,\pm1,\pm2,\ldots\} \tag{2.1}$$

$$\Theta^\varepsilon(n) = \omega(n)\setminus\bigcup_{j=1}^{J}\theta_j^\varepsilon(n);\quad \omega(n) = \omega\times\{n\} \tag{2.2}$$

определяется при помощи преобразования Гельфанда [18] и требует исследовать модельную задачу на ячейке периодичности ϖ^ε

$$\varpi^\varepsilon = \left\{x\in\Pi_\infty^\varepsilon : |z| < \frac{1}{2}\right\} = \left(\omega\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)\setminus\Theta^\varepsilon(0) \tag{2.3}$$

Именно, существенный спектр σ_e^ε – объединение спектральных сегментов

$$\sigma_e^\varepsilon(k) = \left\{M_k^\varepsilon(\tau) : \tau\in[-\pi,\pi]\right\};\quad k\in\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\} \tag{2.4}$$

образованных собственными числами

$$0 \le M_0(\tau) \le M_1(\tau) \le M_2(\tau) \le \ldots \le M_k(\tau) \le \ldots \to +\infty \tag{2.5}$$

модельной спектральной задачи Неймана для оператора Лапласа

$$\begin{aligned} -\Delta_x V^\varepsilon(x;\tau) &= M^\varepsilon(\tau)V^\varepsilon(x;\tau);\quad x\in\varpi^\varepsilon \\ \partial_\nu V^\varepsilon(x;\tau) &= 0,\quad x\in\partial\varpi^\varepsilon\setminus\left(\overline{\omega\left(-\frac{1}{2}\right)}\cup\overline{\omega\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

с зависящими от параметра Флоке $\tau\in\mathbb{R}$ условиями квазипериодичности на торцах $\omega(\pm1/2)$ ячейки (2.3)

$$V^\varepsilon\left(y,+\frac{1}{2};\tau\right) = e^{i\tau}V^\varepsilon\left(y,-\frac{1}{2};\tau\right),\quad \partial_z V^\varepsilon\left(y,+\frac{1}{2};\tau\right) = e^{i\tau}\partial_z V^\varepsilon\left(y,-\frac{1}{2};\tau\right);\quad y\in\omega \tag{2.7}$$

В волноводе (2.1) к единице сведен период, т.е. расстояние между соседними перегородками, а не характерный размер сечения ω. Ячейка периодичности, на которой ставится модельная задача со спектром (2.5), имеет единичную длину, но может быть вырезана из периодической области (2.1) произвольно; например, в случае $\varpi_\bullet^\varepsilon =$ $= \omega\times(0,1)$ условия квазипериодичности устанавливают связь значений решения и его производных только на малых множествах $\theta_j^\varepsilon(0)$ и $\theta_j^\varepsilon(1)$, $j = 1,\ldots,J$, лежащих на торцах $\omega(0)$ и $\omega(1)$, а на оставшейся части границы $\partial\omega_\bullet^\varepsilon$ выставлены краевые условия Неймана.

Вариационная постановка [2] задачи (2.6), (2.7) порождает ([3], гл. 10) положительный самосопряженный оператор $B^\varepsilon(\tau)$ в гильбертовом пространстве $L^2(\varpi)$ с дискретным спектром (2.5). Функции $\tau\mapsto M_k^\varepsilon(\tau)$ непрерывны и 2π-периодичны, т.е. сегменты (2.4) – связные компакты на полуоси $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Для собственных чисел задачи (2.6), (2.7) установлены [19, 20] формулы

$$\left|M_k^\varepsilon(\tau) - M_k^0\right| \le c_k\varepsilon\quad \text{при}\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_k] \tag{2.8}$$

Здесь c_k и ε_k — положительные величины, зависящие от номера k члена последовательности (2.5), а M_k^0 — собственные числа предельной задачи Неймана

$$-\Delta_x V^0(x) = M^0 V^0(x), \quad x \in \varpi^0_\bullet, \quad \partial_\nu V^0(x) = 0; \quad x \in \partial\varpi^0_\bullet$$

Ячейки $\varpi^\varepsilon_\bullet$ и $\varpi^0_\bullet$ совпадают как множества, но на торцах $\omega(0)$ и $\omega(1)$ второй из них уничтожены следы перфорации $\{\theta_j^\varepsilon\}_{j=1}^J$.

Соотношения (2.8) показывают, что длины сегментов (2.4) не превосходят $2c_k\varepsilon$, и в случае $M_k^0 < M_{k+1}^0$ между сегментами $\sigma^\varepsilon(k)$ и $\sigma^\varepsilon(k+1)$ раскрыта лакуна шириной $M_{k+1}^0 - M_k^0 + O(\varepsilon)$. Лакуны называются зонами торможения волн, так как на соответствующих частотах распространение волн в волноводе (2.1) невозможно. Вместе с тем при $\lambda \in \sigma_e^\varepsilon(k)$, т.е. в весьма узких частотных диапазонах (2.4), существуют волны, переносящие энергию без каких-либо потерь вдоль волновода через счетное семейство мелких отверстий. Поэтому спектральные сегменты называются зонами прохождения волн, а сами волны имеют вид

$$w(x) = e^{i\tau n} V(x;\tau), \quad (y, z-n) \in \varpi^\varepsilon; \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.9}$$

При этом $V(\cdot;\tau)$ — собственная функция задачи (2.6), (2.7), отвечающая собственному числу $M(\tau)$ при некотором $\tau \in (-\pi,\pi]$. Функция (2.9) именуется волной Флоке, оказывается гладкой благодаря условиям квазипериодичности (2.7) и в силу равенств (2.6) удовлетворяет задаче (1.5) в периодическом волноводе (2.1).

2.2. Одна перегородка. Исследована [21] дифракция волн в волноводе (1.4) с одной перегородкой и одним малым отверстием в ней, т.е. $N = 1$, $J = 1$, $y^1 = 0$ и $\Pi_1^\varepsilon = (\Omega\setminus\omega(0)) \cup \theta_1^\varepsilon(0)$ (в случае $J > 1$ выводы остаются без существенных изменений). На околопороговых частотах в Π_1^ε обнаружены разнородные аномалии Вайнштейна [22]. Опишем эти эффекты на примере малой частоты вблизи основного порога $\Lambda_0 = 0$ и увеличивающемся, но также малом размере ε отверстия $\theta_1^\varepsilon(0)$. Если отверстие совсем мало и $\varepsilon = o(\kappa)$, то поршневая волна претерпевает почти полное отражение и коэффициент прохождения T^ε — бесконечно малая $O(\varepsilon)$ (прямая аномалия Вайнштейна). В случае "большего" диаметра отверстия, т.е. при $\kappa = o(\varepsilon)$ наблюдается почти полное прохождение волны w^+ (инвертированная аномалия Вайнштейна по терминологии [11]), а именно, для коэффициентов рассеяния (1.13) верны соотношения $R^0 = 0$, $R^\varepsilon = O(\varepsilon)$ и $\left|T^\varepsilon\right| = 1 + O(\varepsilon)$.

Если величины ε и κ сравнимы по порядку, то оба коэффициента рассеяния R^ε и T^ε перестают быть малыми. Изучены [11, 23–26] родственные двумерные и трехмерные задачи, связанные с аномалиями Вайнштейна [22].

2.3. Две перегородки. Далее волноводам Π_2^ε (рис. 1, б—г) уделяется основное внимание.

Описан [27] эффект почти полного прохождения волн в случае $J = 1$, но для волновода Π_2^ε с мягкими стенками (задача Дирихле для уравнения Гельмгольца) при помощи подхода, опирающегося на разложение в ряды Фурье и потому излишне громоздкого. Метод [7] построения асимптотики решений краевых задач в сингулярно возмущенных областях применен [28, 29] для исследования прохождения волн в плоском волноводе с зауженными участками, образующими в пределе при $\varepsilon \to +0$ двойной угол (рис. 2, г и д). Как и в статье [27], на границе назначены условия Дирихле. В указанных публикациях процедуры настройки формы камер для обеспечения почти полного прохождения волн не разрабатывались.

Алгоритмы построения асимптотики в краевых задачах Дирихле и Неймана [7] различаются существенно хотя бы потому, что предельные задачи обладают разными свойствами, а их решения – разным поведением около выделенных особых точек. Поэтому упомянутые результаты неприменимы к рассматриваемой задаче (1.5).

3. Собственные числа

3.1. Захваченные волны. Предположим, что волновод (1.4) обладает плоскостью $\{x : x_1 = 0\}$ зеркальной симметрии (см. формулу (1.9) и рис. 1, а). Сузим задачу (1.5) на половину $\Pi^{\varepsilon}_{N+} = \{x \in \Pi^{\varepsilon}_N : x_1 = y_1 > 0\}$ волновода и на его срединной плоскости $\Gamma^{\varepsilon} = \{x \in \Pi^{\varepsilon}_N : x_1 = 0\}$ назначим исскуственные условия Дирихле [6]

$$\begin{gathered} -\Delta_x u^{\varepsilon}_{+}(x) = \lambda^{\varepsilon}_{+} u^{\varepsilon}_{+}(x); \quad x \in \Pi^{\varepsilon}_{N+} \\ \partial_\nu u^{\varepsilon}_{+}(x) = 0; \quad x \in \partial\Pi^{\varepsilon}_{N+} \setminus \overline{\Gamma^{\varepsilon}}, \quad u^{\varepsilon}_{+}(x) = 0; \quad x \in \Gamma^{\varepsilon} \end{gathered} \tag{3.1}$$

Сечение ω рукавов $\Omega^{\pm}$ наследуют симметрию от самого волновода $\Pi^{\varepsilon}_N \supset \Omega^{\pm}$. Первое собственное число $\Lambda_{0+} > 0$ соответствующей модельной смешанной краевой задачи на половине $\omega_+ = \{y \in \omega : y_1 > 0\}$ сечения

$$\begin{gathered} -\Delta_y U_+(y) = \Lambda_+ U_+(y); \quad y \in \omega_+ \\ \partial_\nu U_+(y) = 0; \quad y \in \partial\omega, \quad y_1 > 0, \quad U_+(y) = 0; \quad y \in \partial\omega, \quad y_1 = 0 \end{gathered}$$

определяет нижнюю грань непрерывного спектра $\sigma^{\varepsilon}_{c+}$ оператора A^{ε}_{+} задачи (3.1) (обозначения аналогичны введенным в разд. 1) и совпадает с каким-то положительным членом Λ_k последовательности (1.7). Например, для прямоугольника $\omega = (-d_1, d_1) \times (-d_2, d_2)$ в случае $d_2 \geq d_1$ имеем $\mathbf{k} = 1$, однако индекс $\mathbf{k}$ можно сделать сколь угодно большим, увеличивая дробь d_1/d_2. В любом случае продолжение по нечетности соответствующей собственной функции U_{0+} задачи (1.9) через среднюю линию $\{y \in \omega : y_1 = 0\}$ фигуры ω есть не что иное, как собственная функция $U_{\mathbf{k}}$ задачи (1.8). Таким образом, непрерывный спектр $\sigma^{\varepsilon}_{c+}$ оператора A^{ε}_{+} задачи (3.1) (обозначения аналогичны введенным в разд. 1) занимает луч $[\Lambda_k, +\infty) \subset \mathbb{R}_+$, а интервал $(0, \Lambda_k) \supset (0, \Lambda_1)$ может содержать собственные числа задачи (3.1), образующие ее дискретный спектр

$$\sigma^{\varepsilon}_{d+} = \left\{\lambda^{\varepsilon}_{0+}, \ldots, \lambda^{\varepsilon}_{\Theta^{\varepsilon}+}\right\} \tag{3.2}$$

Соответствующие собственные функции $u^{\varepsilon}_{0+}, \ldots, u^{\varepsilon}_{Q^{\varepsilon}+}$ ортонормируем в пространстве $L^2(\Pi^{\varepsilon}_{N+})$. Наконец, нечетное продолжение собственных функций задачи (3.1) в Π^{ε}_{N+} через плоскость Γ^{ε} дает собственные функции задачи (1.5) в Π^{ε}_N и тем самым показывает, что множество $\sigma^{\varepsilon}_{d+}$ содержится в точечном спектре σ^{ε}_p, который состоит из собственных чисел оператора A^{ε}, вкрапленных в его непрерывный спектр σ^{ε}_c. Дискретный спектр σ^{ε}_d задачи (1.5) заведомо пуст.

Для того чтобы обнаружить дискретный спектр в задаче (3.1), предположим, что среди коэффициентов $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ в определении (1.1) есть превосходящие единицу. Пусть $\gamma_n > 1$, а число $Q \in \mathbb{N}_0$ и высота $L_n = z^{n+1} - z^n$ цилиндра Ω_n таковы, что

$$\pi^2 Q^2 L_n^{-2} < \left(1 - \gamma_n^{-2}\right)\Lambda_1 \le \pi^2 (Q+1)^2 L_n^{-2} \tag{3.3}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на половине $\Omega_{n+} = \{x \in \Omega_+ : x_1 > 0\}$ цилиндра Ω_n

$$\begin{gathered} -\Delta_x V_+^\varepsilon(x) = M_+^\varepsilon V_+^\varepsilon(x); \quad x \in \Omega_{n+} \\ \partial_\nu V_+^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_{n+} \backslash \overline{\Gamma_n^\varepsilon}, \quad V_+^\varepsilon(x) = 0; \quad x \in \Gamma_n^\varepsilon \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь Γ_n^ε — объединение искусственно образованной поверхности $\Gamma_n^0 = \{x \in \Omega_n : y_1 = 0\}$ и частей отверстий $\theta_j^\varepsilon(n)$ и $\theta_j^\varepsilon(n+1)$, $j = 1, \dots, J$, попадающих на границу $\partial\Omega_{n+}$. При $\varepsilon = 0$ отверстия исчезают и задача (3.4) превращается в предельную спектральную смешанную краевую задачу

$$-\Delta_x V_+^0(x) = M_+^0 V_+^0(x); \quad x \in \Omega_{n+}$$

$$\partial_\nu V_+^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_{n+} \backslash \overline{\Gamma_n^0}, \quad V_+^0(x) = 0; \quad x \in \Gamma_n^0,$$

у которой в силу ограничения (3.3) есть собственные числа

$$M_{nq+}^0 = \gamma_n^{-2}\Lambda_1 + \pi^2 q^2 L_n^{-2} \in (0, \Lambda_1); \quad q = 0, \dots, Q \tag{3.5}$$

Проверено ([7] гл. 9, [30]), что задача (3.4) имеет собственные числа M_{n0+}^ε, ..., M_{nQ+}^ε, подчиненные неравенствам

$$\left|M_{nq+}^\varepsilon - M_{nq+}^0\right| \le c_0 \varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

с некоторыми $c_0 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$. Таким образом, при малом ε упомянутые собственные числа содержатся в интервале $(0, \Lambda_1)$. Соответствующие собственные функции V_{n0+}^ε, ..., V_{nQ+}^ε ортонормируем в пространстве $L^2(\Omega_{n+})$ и продолжим нулем через отверстия $\Gamma_n^\varepsilon \backslash \Gamma_n^0$ на волновод Π_{N+}^ε. Наконец, $\mathscr{L}_n^\varepsilon$ — линейная оболочка указанных продолжений, $\dim \mathscr{L}_n^\varepsilon = Q + 1$.

Для вывода оценки кратности дискретного спектра (3.2)

$$Q^\varepsilon \ge Q \tag{3.6}$$

применим минимальный принцип ([30] теор. 10.2.1)

$$\lambda_{q+}^\varepsilon = \inf_{u_+^\varepsilon \in \mathscr{E}_q^\varepsilon \backslash \{0\}} \frac{\left\|\nabla_x u_+^\varepsilon; L^2(\Pi_{N+}^\varepsilon)\right\|^2}{\left\|u_+^\varepsilon; L^2(\Pi_{N+}^\varepsilon)\right\|^2} \tag{3.7}$$

Здесь $\mathscr{E}_0^\varepsilon = H_0^1(\Pi_{N+}^\varepsilon; \Gamma^\varepsilon) = \{u_+^\varepsilon \in H^1(\Pi_{N+}^\varepsilon) : u_+^\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma^\varepsilon\}$, Γ^ε — срединная плоскость симметричного тела Π_N^ε, и

$$\mathscr{E}_q^\varepsilon = \left\{u_+^\varepsilon \in H_0^1\left(\Pi_{N+}^\varepsilon; \Gamma^\varepsilon\right) : \left(u_+^\varepsilon, u_{p+}^\varepsilon\right)_{\Pi_{N+}^\varepsilon} = 0, p = 0, \dots, q-1\right\}$$

Итак, $\mathscr{L}_n^\varepsilon \subset \mathscr{E}_0^\varepsilon$, и в силу формулы (3.7) при $q = 0$ имеем

$$\lambda_{0+}^\varepsilon \le \inf_{u_+^\varepsilon \in \mathscr{L}_n^\varepsilon \backslash \{0\}} \frac{\left\|\nabla_x u_+^\varepsilon; L^2(\Pi_{N+}^\varepsilon)\right\|^2}{\left\|u_+^\varepsilon; L^2(\Pi_{N+}^\varepsilon)\right\|^2} = \left\|\nabla_x V_{n0+}^\varepsilon; L^2(\Omega_{n+})\right\|^2 = M_{n0+}^0 < \Lambda_1$$

Функции $V^\varepsilon_{n0+},\dots,V^\varepsilon_{nQ+}$ взаимно ортогональны в пространстве $L^2(\Pi^\varepsilon_N)$, и поэтому $\dim \mathcal{L}^\varepsilon_{n1} \ge Q$, где

$$\mathcal{L}^\varepsilon_{nq} = \left\{u^\varepsilon_+ \in \mathcal{L}^\varepsilon_n : \left(u^\varepsilon_+, u^\varepsilon_{p+}\right)_{\Pi^\varepsilon_{N+}} = 0, p = 0,\dots,q-1\right\} \tag{3.8}$$

Следовательно

$$\lambda^\varepsilon_{1+} \le \inf_{u^\varepsilon_+ \in \mathcal{L}^\varepsilon_{n1}\setminus\{0\}} \frac{\left\|\nabla_x u^\varepsilon_+; L^2\left(\Pi^\varepsilon_{N+}\right)\right\|^2}{\left\|u^\varepsilon_+; L^2\left(\Pi^\varepsilon_{N+}\right)\right\|^2} = M^0_{np+} < \Lambda_1$$

Здесь $p = 0$ в случае $V^\varepsilon_{n0+} \in \mathcal{L}^\varepsilon_{n1}$, но $p = 1$ в противном случае, так как какая-то нетривиальная линейная комбинация $c^\varepsilon_0 V^\varepsilon_{n0+} + c^\varepsilon_1 V^\varepsilon_{n1+}$ обязательно содержится в множестве (3.8) при $q = 1$.

Продолжив рассуждения, находим, что $\lambda^\varepsilon_{Q+} \le M^\varepsilon_{nQ+} < \Lambda_1$, и доказываем искомое неравенство (3.6). После этого может оказаться, что $\dim \mathcal{L}^\varepsilon_{nQ} = 0$, а значит, обнаружить еще одно собственное число $\lambda^\varepsilon_{Q+1+} \in \sigma^\varepsilon_{d+}$ по изложенной схеме не удается. Вместе с тем соотношение (3.6) не всегда превращается в равенство. Во-первых, на интервале $(0,\Lambda_1)$ спектр рассмотренной предельной задачи в Ω_{n+}, вообще говоря, не исчерпывается собственными числами (3.5). Во-вторых, среди цилиндров (1.1) могут найтись несколько штук с коэффициентами растяжения $\gamma_n > 1$. Наконец, не все собственные числа в дискретном спектре σ^ε_d удается найти по изложенной схеме.

В любой ситуации при указанной симметрии волновода (1.4) увеличение размеров хотя бы одного из цилиндров (1.1) позволяет по прежней схеме образовать любое заданное наперед количество собственных чисел задачи (1.5), вкрапленных в ее непрерывный спектр.

3.2. Отсутствие точечного спектра. Для применения известных априорных оценок будем считать, что контуры $\partial\omega$ и $\partial\theta^1,\dots,\partial\theta^J$ гладкие. Пусть еще Π^ε_N – цилиндр Ω с перегородками $\Theta^\varepsilon(z^1)$, ..., $\Theta^\varepsilon(z^N)$ (рис. 1, б), т.е. y^1, ..., $y^N = 0 \in \mathbb{R}^2$ и $\Omega_n = \omega\times\Upsilon_n$, где $\Upsilon_n = (z^n, z^{n+1})$, $n = 1,\dots,N-1$ и $\Upsilon_0 = (-\infty, z^1)$, $\Upsilon_N = (z^N, +\infty)$. Вставки (1.1) невысокие, что обеспечено вторым требованием (1.10), а первое выполнено потому, что $\gamma_1 = \dots\gamma_{N-1} = 1$ по построению.

Предположим, что у задачи (1.5) есть собственное число

$$\lambda^\varepsilon = (\kappa^\varepsilon)^2 \in (\delta, \Lambda_1 - \delta) \quad \text{при малом} \quad \delta > 0 \tag{3.9}$$

Соответствующую собственную функцию u^ε нормируем в пространстве $L^2(\Pi^\varepsilon)$ и разобьем ее на компоненты

$$u^\varepsilon_0(z) = \frac{1}{|\omega|}\int_\omega u^\varepsilon(y,z)dy, \quad u^\varepsilon_\perp(y,z) = u^\varepsilon(y,z) - u^\varepsilon_0(z), \quad \int_\omega u^\varepsilon_\perp(y,z)dy = 0$$

$$1 = \left\|u^\varepsilon; L^2\left(\Pi^\varepsilon_N\right)\right\|^2 = \left\|u^\varepsilon_\perp; L^2\left(\Pi^\varepsilon_N\right)\right\|^2 + |\omega|\left\|u^\varepsilon_0; L^2(\Upsilon)\right\|^2 \tag{3.10}$$

$$\left\|\nabla_x u^\varepsilon_\perp; L^2(\Pi^\varepsilon_N)\right\|^2 + |\omega|\left\|\partial_z u^\varepsilon_0; L^2(\Upsilon)\right\|^2 = \left\|\nabla_x u^\varepsilon; L^2\left(\Pi^\varepsilon_N\right)\right\|^2 = \lambda^\varepsilon\left\|u^\varepsilon; L^2\left(\Pi^\varepsilon_N\right)\right\|^2 \le \Lambda_1$$

Условие ортогональности в списке (3.10) обеспечивает неравенство Пуанкаре

$$\left\|\nabla_x u_\perp^\varepsilon; L^2(\omega(z))\right\|^2 \geq \Lambda_1 \left\|u_\perp^\varepsilon; L^2(\omega(z))\right\|^2 \quad \forall z \in \Upsilon = \bigcup_{n=0}^{N} \Upsilon_n \tag{3.11}$$

Кроме того, при $n = 1, \ldots, N-1$ одномерное неравенство Харди [31], записанное в сферических координатах, влечет за собой весовую оценку

$$\sum_{k=n,n+1} \left\|r_{jk}^{-1} u_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_n)\right\|^2 \leq C_n \left\|u_\perp^\varepsilon; H^1(\Omega_n)\right\|^2; \quad r_{jk} = \left(\left|y - P^j\right|^2 + \left|z - z^k\right|^2\right)^{1/2} \tag{3.12}$$

Подставим в интегральное тождество (1.6) пробную функцию $\psi_n \in C_c^\infty(\Upsilon_n)$, не зависящую от переменных y и продолженную нулем с камеры Ω_n на весь волновод Π_N^ε. В результате получим соотношение

$$|\omega| \int_{\Upsilon_n} \partial_z u_0^\varepsilon(z) \overline{\partial_z \psi_n(z)} dz = \lambda^\varepsilon |\omega| \int_{\Upsilon_n} u_0^\varepsilon(z) \overline{\psi_n(z)} dz$$

Интегралы по множеству Ω_n, содержащие произведения $u_\perp^\varepsilon(y,z)\psi_n(z)$ и $\partial_z u_\perp^\varepsilon(y,z)\partial_z\psi_n(z)$ исчезли по причине условия ортогональности в списке (3.10), которое сохраняется при почти всех $z \in \Upsilon_n$ и для производной $\partial_z u_\perp^\varepsilon$. Следовательно

$$\begin{gathered} -\partial_z^2 u_0^\varepsilon(z) = \lambda^\varepsilon u_0^\varepsilon(z); \quad z \in \Upsilon_n \Rightarrow u_0^\varepsilon \in H^2(\Upsilon_n) \\ u_0^\varepsilon(z) = a_{n+}^\varepsilon e^{+i\kappa^\varepsilon z} + a_{n-}^\varepsilon e^{-i\kappa^\varepsilon z}; \quad n = 0, \ldots, N \end{gathered} \tag{3.13}$$

$$u_0^\varepsilon \in L^2(\Upsilon) \Rightarrow a_{0\pm}^\varepsilon = a_{N\pm}^\varepsilon = 0 \tag{3.14}$$

Поскольку λ^ε не является собственным числом задачи Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения (3.13) в силу предположений (1.10) и (3.9), справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \left\|u_0^\varepsilon; H^2(\Upsilon_n)\right\|^2 + \left|I_n^\varepsilon\right| \leq c\left(\left|F_{n+}^\varepsilon\right|^2 + \left|F_{n+1-}^\varepsilon\right|^2\right); \quad n = 1, \ldots, N-1 \\ F_{m\pm}^\varepsilon = \partial_z u_0^\varepsilon\left(z^m \pm 0\right), \quad I_n^\varepsilon = \int_{\Upsilon_n} \left(\left|\partial_z u_0^\varepsilon(z)\right|^2 - \lambda^\varepsilon \left|u_0^\varepsilon(z)\right|^2\right) dz \end{gathered} \tag{3.15}$$

В силу соотношений (1.5), (3.13) и (3.15) функция $u_\perp^\varepsilon$ удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{gathered} -\Delta_x u_\perp^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u_\perp^\varepsilon(x); \quad x \in \Omega_n, \quad \partial_\nu u_\perp^\varepsilon(x) = 0; \quad x \in \partial\omega_n \times \Upsilon_n \\ -\partial_z u_\perp^\varepsilon\left(y, z^n + 0\right) = F_{n+}^\varepsilon, \quad \partial_z u_\perp^\varepsilon\left(y, z^{n+1} - 0\right) = -F_{n+1-}^\varepsilon; \quad (y, 0) \in \Theta^\varepsilon(0) \end{gathered} \tag{3.16}$$

Приведем несколько известных априорных оценок [7] решений эллиптических краевых задач в сингулярно возмущенных областях применительно к краевой задаче (3.16), правые части которой временно зафиксируем. Прежде всего, поскольку гладкие ребра $\partial\omega \times \{z^n\}$ и $\partial\omega \times \{z^{n+1}\}$ на границе $\partial\Omega_n$ имеют раствор $\pi/2$, а точки (P^j, z^n) и (P^j, z^{n+1}) являются вершинами конусов $\mathbb{R}_\pm^3$, локальные весовые оценки решений задачи Неймана ([1] гл. 9 §4, 32–34) показывают, что

$$\begin{gathered} \left\|r_n^\beta \nabla_x^2 u_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_n \backslash \mathcal{B}_{\varepsilon R}(n))\right\| \leq c_{\beta n}\left((1 + \lambda^\varepsilon)\left\|u_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_n)\right\| + \left|F_{n+}^\varepsilon\right| + \left|F_{n+1-}^\varepsilon\right|\right) \\ \beta \in (0,1), \quad r_n = \min\left\{r_{jk} \mid j = 1, \ldots, J, k = n, n+1\right\} \end{gathered}$$

$$\mathcal{B}_{\varepsilon R}(n) = \bigcup_{k=n,n+1} \bigcup_{j=1}^{J} \mathbb{B}^3_{\varepsilon R}\left(P^j, z^k\right); \quad \mathbb{B}^3_{\rho}(\mathcal{P}) = \{x : |x - \mathcal{P}| < \rho\}$$

Радиус $R > 0$ выбран так, чтобы $\overline{\theta_j} \subset \mathbb{B}^2_R(\mathbb{O}) = \{y : |y| < R\}$ при $j = 1,\ldots,J$.

Обработаем окрестности отверстий $\overline{\theta^{\varepsilon}_j(n)}$. Сделаем растяжение координат

$$x \mapsto \xi^{jn} = \left(\eta^{jn}, \zeta^{jn}\right) = \left(\varepsilon^{-1}\left(y - P^j\right), \varepsilon^{-1}\left(z - z^n\right)\right) \tag{3.17}$$

Замена (3.17) переводит множество $\Pi^{\varepsilon}_N \cap \mathbb{B}_{\varepsilon R}(P^j, z^n)$ в пересечение шара $\mathbb{B}^3_R(\mathbb{O})$ и двух полупространств $\mathbb{R}^3_{\pm} = \{\xi : \pm\xi_3 > 0\}$, соединенных через отверстие $\theta_j(0) = \{\xi : \eta \in \theta_j, \xi_3 = 0\}$

$$\Xi^j = \mathbb{R}^3_+ \cup \theta_j(0) \cup \mathbb{R}^3_- \tag{3.18}$$

На ребре $\partial\theta_j \times \{0\}$ трещины $\overline{\theta_j}$ градиент решения задачи Неймана приобретает сингулярность $O(\rho_{\theta}^{-1/2})$, где ρ_{θ} – расстояние до ребра. Это обстоятельство предопределяет весовой показатель $\beta_{\theta} \in (-1/2, 0)$ в локальной оценке ([1] гл. 10 и 12 § 8, [32–34])

$$\begin{gathered}\left\|\rho_{\theta}^{\beta_{\theta}} \nabla_{\xi} \mathbf{u}^{\varepsilon}_{jn}; L^2\left(\Xi^j \cap \mathbb{B}^3_{2R}(\mathbb{O})\right)\right\| + \left\|\rho_{\theta}^{\beta_{\theta}+1} \nabla^2_{\xi} \mathbf{u}^{\varepsilon}_{jn}; L^2\left(\Xi^j \cap \mathbb{B}^3_{2R}(\mathbb{O})\right)\right\| \le \\ \le c_{\beta n}\left[\left(1 + \varepsilon^2\lambda^{\varepsilon}\right)\left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}_{jn}; L^2\left(\Xi^j \cap \mathbb{B}^3_{3R}(\mathbb{O})\right)\right\| + \varepsilon\sum_{\pm}\left|F^{\varepsilon}_{n\pm}\right|\right]\end{gathered} \tag{3.19}$$

для функции $\xi^{jn} \mapsto \mathbf{u}^{\varepsilon}_{jn}(\xi^{jn}) = u^{\varepsilon}_{\perp}(P^j + \varepsilon\eta^{jn}, z^n + \varepsilon\zeta^{jn})$, подчиненной уравнению $-\Delta_{\xi}\mathbf{u}^{\varepsilon}_{jn} = \varepsilon^2\lambda^{\varepsilon}\mathbf{u}^{\varepsilon}_{jn}$ и краевым условиям $\pm\partial_{\zeta}\mathbf{u}^{\varepsilon}_{jn} = \mp\varepsilon F^{\varepsilon}_{n\pm}$ соответственно на примыкающих к отверстию частях бесконечного множества (3.18) и его границы.

Итак, составляющая $u^{\varepsilon}_{\perp}$, а значит, и само решение u^{ε} принадлежат весовому классу Соболева с показателем гладкости два. В то же время из-за упомянутых сингулярностей на ребрах трещин нормальные производные $\partial_z u^{\varepsilon}(\cdot, z^n)$ и $-\partial_z u^{\varepsilon}(\cdot, z^{n+1})$ на торцах камеры Ω_n не попадают в пространство $L^2(\omega)$, но все-таки принадлежат пространству $L^q(\omega)$ с показателем $q \in [1, 2)$. В итоге гладкая на интервале $\Upsilon_n \ni z$ функция

$$z \mapsto \int_{\omega} \partial_z u^{\varepsilon}(y, z)dy$$

по крайней мере непрерывна в концевых точках z^n и z^{n+1}. Имеем

$$0 = \int_{\Theta^{\varepsilon}(z^n \pm 0)} \partial_z u^{\varepsilon}\left(y, z^n \pm 0\right)dy = \left|\Theta^{\varepsilon}\left(z^n\right)\right| \partial_z u^{\varepsilon}_0\left(y, z^n \pm 0\right) - \sum_{j=1}^{J}\int_{\theta^{\varepsilon}_j} \partial_z u^{\varepsilon}_{\perp}\left(y, z^n\right)dy$$

$$\begin{gathered}\left|\int_{\theta^{\varepsilon}_j} \partial_z u^{\varepsilon}_{\perp}\left(y, z^n\right)dy\right| = \varepsilon\left|\int_{\theta_j} \partial_{\zeta}\mathbf{u}^{\varepsilon}_{jn}\left(\eta, z^n\right)d\eta\right| \le \varepsilon\left(\int_{\theta_j}\rho_{\theta}^{-2\beta_{\theta}-1}d\eta\right)^{1/2}\left\|\rho_{\theta}^{\beta_{\theta}+1/2}\mathbf{u}^{\varepsilon}_{jn}(\cdot, z^n); L^2(\theta_j)\right\| \le \\ \le c_{\beta_{\theta} j}\varepsilon\left[\left\|\rho_{\theta}^{\beta_{\theta}}\nabla_{\xi}\mathbf{u}^{\varepsilon}_{jn}; L^2\left(\Xi^j \cap \mathbb{B}^3_{2R}(\mathbb{O})\right)\right\| + \left\|\rho_{\theta}^{\beta_{\theta}+1}\nabla^2_{\xi}\mathbf{u}^{\varepsilon}_{jn}; L^2\left(\Xi_j \cap \mathbb{B}^3_{2R}(\mathbb{O})\right)\right\|\right] \le \\ \le c_{\beta_{\theta} jn}\varepsilon\left[\left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}_{jn}; L^2\left(\Xi^j \cap \mathbb{B}^3_{3R}(\mathbb{O})\right)\right\| + \varepsilon\sum_{\pm}\left|F^{\varepsilon}_{n\pm}\right|\right] \le\end{gathered}$$

$$\leq c_{\beta_\theta jn}\varepsilon\left[\varepsilon^{-3/2}\left\|u_\perp^\varepsilon; L^2\left(\Pi_N^\varepsilon \cap \mathbb{B}^3_{3\varepsilon R}(P^j, z^n)\right)\right\| + \varepsilon\sum_\pm\left|F_{n\pm}^\varepsilon\right|\right] \leq$$

$$\leq c_{\beta_\theta jn}\left[\varepsilon^{1/2}\left\|u_\perp^\varepsilon; H^1\left(\Pi_N^\varepsilon\right)\right\| + \varepsilon^2\sum_\pm\left|F_{n\pm}^\varepsilon\right|\right]$$

При этом сначала воспользовались неравенством Коши—Буняковского и сходимостью интеграла от выражения $\rho_\theta^{-2\beta_\theta-1}$ с показателем $\beta_\theta < 0$ по области $\theta_j \in \mathbb{R}^2$, затем сделали обратную замену координат (3.17) и применили известное следовое весовое неравенство Кондратьева ([1] гл. 9 § 4, [35]) вместе с оценкой (3.19) и, наконец, учли неравенство Харди (3.12) и тот факт, что $r_{jn} \leq c_j\varepsilon$ при $x \in \mathbb{B}^3_{3\varepsilon R}(P^j, z^n)$.

Просуммируем полученные соотношения по $n = 1,\ldots,N$ и при малом ε придем к ключевой оценке

$$\mathbf{F}^\varepsilon := \sum_{n=1}^{N}\left|F_{n\pm}^\varepsilon\right| \leq C\varepsilon^{1/2}\left\|u_\perp^\varepsilon; H^1(\Pi_N^\varepsilon)\right\| \tag{3.20}$$

Согласно определениям (3.10) интегральное тождество (1.6) с ингредиентами $\lambda = \lambda^\varepsilon$ и $\psi^\varepsilon = u^\varepsilon$ принимает вид

$$\left\|\nabla_x u_\perp^\varepsilon; L^2\left(\Pi_N^\varepsilon\right)\right\|^2 - \lambda^\varepsilon\left\|u_\perp^\varepsilon; H^1\left(\Pi_N^\varepsilon\right)\right\|^2 = \lambda^\varepsilon|\omega|\left\|u_0^\varepsilon; L^2(\Upsilon)\right\|^2 - |\omega|\left\|\partial_z u_0^\varepsilon; L^2(\Upsilon)\right\|^2 \tag{3.21}$$

В силу формул (3.9) и (3.11) левая часть равенства (3.21) больше величины $\delta\left\|u_\perp^\varepsilon; H^1(\Pi_N^\varepsilon)\right\|^2$. Вместе с тем соотношения (3.15) и (3.20) показывают, что правая часть равенства (3.21) мажорируется величиной $c_F\sqrt{\varepsilon}\left\|u_\perp^\varepsilon; H^1(\Pi_N^\varepsilon)\right\|^2$. В результате при малом ε выводим равенства $\left\|u_\perp^\varepsilon; L^2(\Pi_N^\varepsilon)\right\| = 0$ и $u_\perp^\varepsilon = 0$, и при учете формул (3.14) находим, что $u^\varepsilon = 0$ на объединении рукавов $\Omega_0 \cup \Omega_N$, а значит, и всюду на волноводе Π_N^ε по теореме о единственности продолжения [36]. В итоге видим, что сделанное изначально предположение ложно, и при указанных ограничениях на интервале $(0, \Lambda_1)$ собственных чисел (3.9) у оператора A^ε задачи (1.5) нет.

3.3. Несколько замечаний. Схему проверки отсутствия собственных чисел на интервале $(0, \Lambda_1)$ непрерывного спектра σ_c^ε оператора A^ε нетрудно приспособить к волноводу (1.4), у которого вставки (1.1) имеют коэффициенты сжатия $\gamma_n \leq 1$ и любых допустимых векторах сдвигов $y^n \in \mathbb{R}^2$, $n = 1,\ldots,N$. Более того, расположение отверстий в перегородках $\partial\Omega_n \cap \partial\Omega_{n-1}$ и их форма также не играют существенной роли.

Если нарушить ограничения (1.10) или (3.9), то перестанут быть верными неравенства (3.11), (3.15) и ход доказательства нарушится.

Если возмутить одну или несколько ячеек (рис. 2, в) периодического волновода (2.1) в предположении (1.9) о его зеркальной симметрии, то по схеме из разд. 3 (1°) нетрудно образовать собственные числа, попадающие как вовнутрь лакун (дискретный спектр $\sigma_{d\infty}^\varepsilon$), так и на сегменты (2.4) (точечный спектр $\sigma_{p\infty}^\varepsilon \backslash \sigma_{d\infty}^\varepsilon$). Известны [37—40] приемы образования таких собственных без предположения о симметрии при помощи малых сингулярных возмущений задачи.

4. Специальные решения вспомогательных задач

4.1. Пограничный слой. Растяжение координат (3.17) и формальный переход к $\varepsilon = 0$ переделывают волновод (1.4) в бесконечную область (3.18). В данном разделе индексы j и n у символов ξ^{jn} и Ξ^j не пишем.

Поскольку $\Delta_x + \kappa^2 = \varepsilon^{-2}(\Delta_\xi + \varepsilon^2\kappa^2)$ в растянутых координатах (3.17), поведение поля u^ε около отверстий (1.3) описывается при помощи решений предельной задачи Неймана для уравнения Лапласа

$$-\Delta_\xi Z(\xi) = 0; \quad \xi \in \Xi, \quad \mp\partial_\zeta Z(\eta, \pm 0) = 0; \quad \eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\theta(0)} \tag{4.1}$$

В рамках метода сращиваемых асимптотических разложений ([7] гл. 2, [41, 42]) требуется перечислить все ограниченные решения задачи (4.1). Одно из них очевидно – константа. Еще одно определено равенством

$$\mathbf{Z}(\xi) = \begin{cases} 1 - \mathbf{P}(\xi), & \zeta > 0 \\ -1 + \mathbf{P}(\xi), & \zeta < 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Здесь $\mathbf{P}$ – емкостной потенциал двумерного множества $\overline{\theta(0)}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, т.е. затухающее на бесконечности решение задачи Дирихле во внешности плоской трещины

$$-\Delta_\xi \mathbf{P}(\xi) = 0; \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\theta(0)}, \quad \mathbf{P}(\xi) = 1; \quad \xi \in \overline{\theta(0)} \tag{4.3}$$

Функция $\mathbf{P}$ четна по переменной $\zeta = \xi_3$, а значит, функция $\mathbf{Z}$ нечетна. Согласно краевому условию в задаче (4.3) функция $\mathbf{Z}$ обращается в нуль на трещине $\theta(0)$, имеет непрерывную производную $\partial\mathbf{Z}/\partial\xi_3$ и потому оказывается гладкой всюду в области Ξ, кроме ребра $\partial\theta \times \{0\}$. Наконец, в силу определения емкостного потенциала (см. [12, 13] и др.) справедливо представление

$$\mathbf{Z}(\xi) = \pm 1 \mp \frac{C(\theta)}{2\pi|\xi|} \pm \sum_{p=1,2} \frac{C_p(\theta)\eta_p}{2\pi|\xi|^3} + O\left(|\xi|^{-3}\right); \quad |\xi| \to \infty, \quad \pm\zeta > 0 \tag{4.4}$$

При этом $(2\pi|\xi|)^{-1}$ – функция Грина задачи Неймана для оператора Δ_ξ в полупространстве $\mathbb{R}^3_\pm$ с особенностью в начале координат O, коэффициенты $C_1(\theta)$ и $C_2(\theta)$, имеющие отношение к тензору поляризации [12] множества $\overline{\theta(0)} \subset \mathbb{R}^3$, востребованы не будут, и

$$C(\theta) = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus \theta(0)} |\nabla_\xi \mathbf{P}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \operatorname{cap}_3 \theta > 0 \tag{4.5}$$

Кроме того, $\operatorname{cap}_3 \theta$ – гармоническая емкость [12, 13] множества $\overline{\theta(0)} \subset \mathbb{R}^3$.

Доказано ([34] § 2 и 5, [43, 44]), что всякое ограниченное решение задачи (4.1) – линейная комбинация $c_0 + c_1\mathbf{Z}^j$.

В следующих разделах используются обозначения $\mathbf{Z}^j$ и $C(\theta_j)$, $j = 1, \ldots, J$.

4.2. Полубесконечный цилиндр. Рассмотрим задачу Неймана в зафиксированном полуцилиндре $\Omega_\sqcup = \omega \times \mathbb{R}_+$

$$\begin{gathered} -\Delta_x u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega_\sqcup, \quad \partial_\nu u(x) = 0; \quad x \in \partial\omega \times \mathbb{R}_+ \\ -\partial_z u(y, 0) = g(y); \quad y \in \omega \end{gathered} \tag{4.6}$$

У однородной ($g = 0$) задачи (4.6) есть единственное ограниченное решение, порожденное приходящей волной w^-

$$Y(x) = w^-(x) + w^+(x) = \alpha\left(e^{-i\kappa z} + e^{+i\kappa z}\right) \tag{4.7}$$

Таким образом, условие существования затухающего решения задачи (4.6) имеет вид

$$\int_\omega g(y)dy = 0 \tag{4.8}$$

При $z \to +\infty$ решение $u(y,z)$ – бесконечно малая $O(e^{-\beta_1 z})$, $\beta_1 = \sqrt{\Lambda_1 - \lambda}$.

В рамках теории обобщенных функций [45] задача (4.6) с правой частью

$$g(y) = \delta\left(y - P^j\right) - |\omega|^{-1}, \tag{4.9}$$

содержащей дельта-функцию Дирака и потому удовлетворяющей условию (4.8), имеет затухающее решение G^j – обобщенную функцию Грина, которая допускает представление

$$G^j(x) = \chi^j(x)(2\pi r_j)^{-1} + \tilde{G}^j(x), \quad e^{\beta_1 z}\left|\tilde{G}^j(x)\right| \le c_j \tag{4.10}$$

Здесь $r_j = \left(\left|y - P^j\right|^2 + z^2\right)^{1/2}$, χ^j – гладкая срезающая функция с малым носителем, равная единице в окрестности точки P^j, $\chi^j\chi^k = 0$ при $j \neq k$. Числовая $(J \times J)$-матрица G с элементами $G_{jk} = \tilde{G}^j(P^k)$ симметрична.

4.3. Составной конечный цилиндр. В цилиндре $\Omega_\#(\ell) = \omega_\# \times (-\ell, \ell)$, определенном по формуле (1.16), рассмотрим краевую задачу с условиями скачков на срединной плоскости $\omega_\#(0) = \omega_\# \times \{0\}$

$$-\Delta_x v(x) = \lambda v(x); \quad x \in \Omega_\# \backslash \omega_\#(0) \tag{4.11}$$

$$\partial_\nu v(x) = 0; \quad x \in \partial\omega_\# \times ((-\ell, 0) \cup (0, +\ell)) \tag{4.12}$$

$$\pm\partial_z v(y, 0) = h_\pm(y); \quad y \in \omega_\# \tag{4.13}$$

$$[v](y) = h_0(y), \quad [\partial_z v](y) = h_1(y); \quad y \in \omega_\# \tag{4.14}$$

Здесь $[v](y) = v(y, +0) - v(y, -0)$ – скачок функции v, и γ, ℓ – положительные параметры.

Предположим, что $\lambda_q = (2\ell)^{-1}\pi^2 q^2$ – простое собственное число задачи (4.11)–(4.14) при некотором $q \in \mathbb{N}$. Условие разрешимости задачи (4.11)–(4.14) с параметром $\lambda = \lambda_q$ и собственной функцией

$$\mathbf{v}(z) = \cos\left(\frac{\pi q}{2\ell}(z + \ell)\right) \tag{4.15}$$

имеет вид

$$0 = \int_{\omega_\#}\left(h_-(y) + (-1)^q h_+(y) - \cos\left(\frac{\pi}{2}q\right)h_1(y) - \frac{\pi q}{2\ell}\sin\left(\frac{\pi}{2}q\right)h_0(y)\right)dy \tag{4.16}$$

Далее понадобятся сингулярные правые части краевых условий (4.13)

$$h_\pm(y) = h_{\mathrm{reg}\pm}(y) + h_{\mathrm{dir}\pm}(y), \quad h_{\mathrm{dir}\pm}(y) = \sum_{j=1}^{J} b_\pm^j \delta\left(y - P^j\right) \tag{4.17}$$

При этом $h_{\mathrm{reg}\pm}$ – гладкие функции на множестве $\overline{\omega_\#}$. Согласно предназначению дельта-функции интегралы из соотношения (4.16) превращаются в суммы

$$\int_{\omega_\#} h_\pm(y)dy = \int_{\omega_\#} h_{\mathrm{reg}\pm}(y)dy + \sum_{j=1}^{J} b_\pm^j \tag{4.18}$$

5. Асимптотика коэффициентов рассеяния. Пусть Π_2^ε (рис. 1, б и в) – волновод (1.4) с двумя перфорированными перегородками и одной вставкой (см. формулы (1.16), (1.17), разд. 2.3 и рис. 1, б–г), причем высота $2\ell^\varepsilon$ удовлетворяет соотношению (1.18), в котором величины ℓ', ℓ'' подлежат определению и

$$\ell := \ell^0 = \frac{\pi q}{2\kappa}, \quad \kappa = \sqrt{\lambda} \in (0, \kappa_\dagger); \quad q \in \mathbb{N} \tag{5.1}$$

При этом $N = 2$, но число отверстий $J \in \mathbb{N}$ произвольно, а положение точек $z^1 = -\ell^\varepsilon$, $z^2 = \ell^\varepsilon$ зависит от малого параметра ε, в частности, $L_1 = 2\ell^\varepsilon$.

Асимптотические разложения на рукавах (1.2)

$$u^\varepsilon(x) = \alpha(e^{i\kappa(z+\ell^\varepsilon)} + R^0 e^{-i\kappa(z+\ell^\varepsilon)}) + u_-^0(y, -z-\ell^\varepsilon) + \ldots \tag{5.2}$$

$$u^\varepsilon(x) = \alpha T^0 e^{+i\kappa(z-\ell^\varepsilon)} + u_+^0\left(y, z-\ell^\varepsilon\right) + \ldots \tag{5.3}$$

дополним разложением на цилиндрической вставке (1.16)

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} a^0 \mathbf{v}(z) + \varepsilon^0 (a'\mathbf{v}(z) + v_\varepsilon'(x)) + \varepsilon v_\varepsilon''(x) + \ldots \tag{5.4}$$

При этом $\mathbf{v}$ – собственная функция (4.15), числа R^0, T^0, a^0 и функции $u_\pm^0$, v_ε' подлежат определению, а многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные в предпринимаемом анализе. Слагаемые разложений (5.2)–(5.4) зависят от малого параметра ε, что позволит определить их как решения задач (4.6) и (4.11)–(4.14) в фиксированных областях $\Omega_\sqcup$ и $\Omega_\#(\ell)$ соответственно.

Воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений ([7] гл. 2, [41, 42]) и, интерпретируя разложения (5.2)–(5.4) как внешние, согласуем их с внутренними разложениями около отверстий $\theta_j^\varepsilon(\pm\ell^\varepsilon)$, заданных формулой (1.3) и использующих растянутые координаты $\xi^{\varepsilon j\pm} = (\varepsilon^{-1}(y - P^j), \varepsilon^{-1}(z \mp \ell^\varepsilon))$ (ср. определение (3.17) с $z^n = \pm\ell^\varepsilon$)

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} Z_\pm^{j0}\left(\xi^{\varepsilon j\pm}\right) + Z_\pm^{j'}\left(\xi^{\varepsilon j\pm}\right) + \ldots \tag{5.5}$$

В силу формулы (4.15) для главного члена разложения (5.4) верны соотношения

$$a^0 \mathbf{v}\left(y, \pm\ell^\varepsilon\right) = a^0 (\mp 1)^q \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 (\kappa\ell')^2 + O\left(\varepsilon^3\right)\right) \tag{5.6}$$

$$a^0 \partial_z \mathbf{v}\left(y, \pm\ell^\varepsilon\right) = \varepsilon a^0 (\mp 1)^{q+1} \kappa^2 \left(\ell' + \varepsilon\ell'' + O(\varepsilon^2)\right) \tag{5.7}$$

Поскольку функции (5.2) и (5.3) остаются ограниченными на рукавах при $\varepsilon \to +0$, первое слагаемое суммы (5.5) затухает при $\xi_3^{\varepsilon j\pm} \to \pm\infty$ и, являясь решением задачи (4.1) в области Ξ^j, согласно представлениям (4.4) и (5.6) принимает вид

$$Z_\pm^{j0}\left(\xi^{\varepsilon j\pm}\right) = \frac{a^0}{2} (\mp 1)^{q+1} \left(1 \mp \mathbf{Z}^j\left(\xi^{\varepsilon j\pm}\right)\right) + \ldots \tag{5.8}$$

Здесь $\mathbf{Z}^j$ – гармоническая функция (4.2) в области (3.18), и ее представление (4.16) включает коэффициент $C(\theta_j)$, находящийся в связи (4.15) с гармонической емкостью трещины $\overline{\theta_j(0)}$. Таким образом, выполнены разложения

$$\left|\xi^{\varepsilon j\pm}\right| \to \infty:\; Z_{\pm}^{j0}\left(\xi^{\varepsilon j\pm}\right) = \frac{a^0}{2}(\mp 1)^q \begin{cases} 2 - C(\theta_j)\left(2\pi\left|\xi^{\varepsilon j\pm}\right|\right)^{-1} + \ldots, & \pm\xi_3^{\varepsilon j\pm} < 0 \\ C(\theta_j)\left(2\pi\left|\xi^{\varepsilon j\pm}\right|\right)^{-1} + \ldots, & \pm\xi_3^{\varepsilon j\pm} > 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

При этом многоточие заменяет величины $O\left(\left|\xi^{\varepsilon j\pm}\right|^{-2}\right)$, которые находятся согласно формуле (4.4), но в дальнейших вычислениях значимой роли не играют.

В силу соотношения

$$\left|\xi^{\varepsilon j\pm}\right|^{-1} = \varepsilon r_{\varepsilon j\pm}^{-1} := \varepsilon\left(\left|y - P^j\right|^2 + \left|z \mp \ell^{\varepsilon}\right|^2\right)^{-1/2} \tag{5.10}$$

процедура согласования разложений (5.2), (5.3) и (5.9) (нижняя строка) показывает, что поправочные члены $u_{\pm}^0$ суть обладающие сингулярностями $a^0(\mp 1)^q C(\theta_j)(4\pi r_j)^{-1}$ решения задачи (4.6) в цилиндре $\Omega_{\sqcup}$ с правыми частями

$$\begin{aligned} g_-(y) &= i\kappa\alpha\left(R^0 - 1\right) + \frac{a^0}{2}\sum_{j=1}^{J} C(\theta_j)\delta\left(y - P^j\right) \\ g_+(y) &= i\kappa\alpha T^0 + \frac{a^0}{2}(-1)^q \sum_{j=1}^{J} C(\theta_j)\delta(y - P^j) \end{aligned} \tag{5.11}$$

Поршневые волны (1.11), помещенные в правые части разложений (5.2) и (5.3), имеют множителями первые члены асимптотики коэффициентов рассеяния (1.13) и поэтому в главном учитывают поведение функции (1.12) на бесконечности в волноводе (1.14), а значит, поля $u_{\pm}^0(y,z)$ должны исчезать при $z \to +\infty$. Следовательно, учет сингулярных составляющих у данных Неймана (5.11) приводит к равенству

$$u_{\pm}^0(x) = \frac{a^0}{2}(\mp 1)^q \sum_{j=1}^{J} C(\theta_j) G^j(x) \tag{5.12}$$

Здесь G^j – обобщенные функции Грина с требуемым поведением (4.10) при $r_j \to +0$. Постоянные составляющие $i\kappa\alpha(R^0 - 1)$ и $i\kappa\alpha T^0$ в формулах (5.11) компенсировать затухающими решениями задачи (4.6) нельзя, однако данное Неймана (4.9) функции Грина также содержит регулярную составляющую $-|\omega|^{-1}$, а значит, суммы (5.12) действительно удовлетворяет указанным задачам при условиях

$$R^0 - 1 = \frac{ia^0\mathbf{C}}{2\alpha\kappa|\omega|} = ia^0\alpha\mathbf{C}, \quad T^0 = ia^0(-1)^q\alpha\mathbf{C} \tag{5.13}$$

$$\mathbf{C} := \sum_{j=1}^{J} C(\theta_j) > 0, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\kappa|\omega|}} \tag{5.14}$$

Кроме того, около точек $(P^j, 0) \in \partial\Omega_{\sqcup}$ верны представления

$$u_{\pm}^0(x) := a^0\mathbf{u}_{\pm}^0(x) = a^0 C(\theta_j)(4\pi r_j)^{-1} + a^0\mathbf{u}_{j\pm}^0 + O(r_j); \quad r_j \to +0 \tag{5.15}$$

$$\mathbf{u}^0_{j\pm} = \frac{1}{2}(\mp 1)^q \sum_{j=1}^{J} C(\theta_j)\mathcal{G}_{jk} \in \mathbb{R} \tag{5.16}$$

Согласование разложений (5.4) и (5.9) (верхняя строка) вместе с соотношением (5.7) приводят к задаче (4.11)–(4.14) в фиксированном цилиндре $\Omega^\gamma(\ell)$ для предельного ($\varepsilon = 0$) поправочного слагаемого v_0' на вставке $\Omega^\gamma(\ell^\varepsilon)$ переменной высоты. Правые части этой задачи имеют вид

$$h_0' = h_1' = 0, \quad h_\pm'(y) = a^0(\mp 1)^q \left[\kappa^2 \ell' - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} C(\theta_j)\delta\left(y - P^j\right)\right]; \quad y \in \omega_\# \tag{5.17}$$

При этом в краевых условиях на торцах $\omega_\#(-\ell)$ и $\omega_\#(+\ell)$ учтены невязки, порожденные сдвигом границ $\omega_\#(-\ell^\varepsilon)$ и $\omega_\#(+\ell^\varepsilon)$, а также сингулярности, привнесенные согласованием с главными членами (5.8) внутренних разложений около отверстий $\theta_j^\varepsilon(\pm\ell^\varepsilon)$. Выберем слагаемое

$$\ell' = \left(2\kappa^2 \left|\omega_\#\right|\right)^{-1} \mathbf{C} > 0 \tag{5.18}$$

в формуле (1.18) для полувысоты ℓ^ε цилиндрической вставки $\Omega_\#(\ell^\varepsilon)$. При нарушении равенства (5.18) искомый эффект пропадает (см. разд. 8.2). Согласно определению (5.18) условие разрешимости (4.16) задачи (4.11)–(4.14) с правыми частями (5.17) (см. формулы (4.17) и (4.18)) выполнено, а значит, существует ее решение

$$\begin{gathered} v_0'(x) := a^0\mathbf{v}_0'(x) = \frac{a^0}{2}C(\theta_j)(2\pi r_{j\pm})^{-1} + a^0\mathbf{v}'_{j\pm} + O(r_{j\pm}) \\ r_{j\pm} = \left(\left|y - P^j\right|^2 + \left|z \mp \ell\right|^2\right)^{1/2} \to 0, \end{gathered} \tag{5.19}$$

которое определено с точностью до слагаемого $a'\mathbf{v}$ и может быть подчинено условию ортогональности, фиксирующему постоянные $\mathbf{v}'_{j\pm} \in \mathbb{R}$ в представлении (5.19)

$$\int\limits_{\Omega_\#(\ell)} \cos\left(\frac{\pi q}{2\ell}z\right)\mathbf{v}'(x)dx = 0$$

В силу соотношения (5.18) множитель a' при собственной функции (4.15), присутствующий в формуле (5.4), не влияет на изучаемые главные члены асимптотики поля (1.12).

Составим задачу для третьего члена v_0'' разложения (5.4). Поскольку торцы $\omega_\#(\pm\ell^\varepsilon)$ цилиндра $\Omega_\#(\ell^\varepsilon)$ смещаются при $\varepsilon \to +0$, сингулярности $O(r_{j\pm})^{-1}$ самой функции (5.19) порождают невязки порядка $r_{\varepsilon j\pm}^{-3}$ в краевых условиях Неймана на торцах $\omega_\#(\pm\ell^\varepsilon)$ цилиндра $\Omega_\#(\ell^\varepsilon)$ (ср. формулы (5.19) и (5.10)). Для устранения нежелательных – слишком сильных – сингулярностей положим

$$v_\varepsilon'(y,z) = a^0 \begin{cases} \mathbf{v}_0'(y, z - \varepsilon\ell' - \varepsilon^2\ell''), & z > 0 \\ \mathbf{v}_0'(y, z + \varepsilon\ell' + \varepsilon^2\ell''), & z < 0 \end{cases} \tag{5.20}$$

Функция (5.20) задана на самой вставке $\Omega_\#(\ell^\varepsilon)$, и ее сингулярности сосредоточены в “правильных” точках $(P^j, \pm\ell^\varepsilon)$, а значит, могут быть согласованы с внутренними разложениями (5.5). Вместе с тем функция v_ε' и ее производные приобрели скачки на срединном сечении $\omega_{\#}(0)$, которые нужно компенсировать очередным асимптотическим членом v_ε'' – подчиним его условиям сопряжения (5.5), где

$$h_0''(y) = 2\ell' a^0 \partial_z \mathbf{v}_0'(y,0), \quad h_1''(y) = 2\ell' a^0 \partial_z^2 \mathbf{v}_0'(y,0) \tag{5.21}$$

Формулы (5.7) и (5.4) предоставляют регулярные составляющие правых частей условий Неймана (4.13)

$$h_{\mathrm{reg}\pm}''(y) = (\mp 1)^q \kappa^2 \left(a'\ell' + a^0 \ell''\right) \tag{5.22}$$

Появление в этих краевых условиях суммы $h_{\mathrm{dir}\pm}''$ дельта-функций Дирака и их производных обусловлено согласованием внешних и внутренних разложений около отверстий. Учитывая слагаемые $O(1)$ при $r_j \to +0$ в выражениях (5.15) и (5.20) выводим условия на бесконечности

$$Z_\pm^{j'}\left(\xi^{\varepsilon j\pm}\right) = S_\pm + a^0 \mathbf{u}_{j\pm}^0 + o(1); \quad \left|\xi_3^{\varepsilon j\pm}\right| \to \infty, \quad \pm\xi_3^{\varepsilon j\pm} > 0$$

$$Z_\pm^{j'}\left(\xi^{\varepsilon j\pm}\right) = a^0 \mathbf{v}'_{j\pm} + a'(\mp 1)^q + o(1); \quad \left|\xi_3^{\varepsilon j\pm}\right| \to \infty, \quad \mp\,\xi_3^{\varepsilon j\pm} > 0 \tag{5.23}$$

$$S_+ = \alpha T^0, \quad S_- = \alpha\left(1 + R^0\right)$$

Здесь величины $\mathbf{u}_{j\pm}^0$ и $\mathbf{v}'_{j\pm}$ взяты из формул (5.16) и (5.19) соответственно. Таким образом, представление (4.4) решений $\mathbf{Z}^j$ задачи (4.1) в области Ξ^j показывает, что

$$Z_\pm^{j'}\left(\xi^{\varepsilon j\pm}\right) = B_{j\pm}^+ + B_{j\pm}^- \mathbf{Z}^j\left(\xi^{\varepsilon j\pm}\right) \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} B_{j+}^{\vartheta} &= \frac{1}{2} S_+ + \frac{a^0}{2}\left(\mathbf{u}_{j+}^0 + \vartheta \mathbf{v}'_{j+}\right) + \vartheta \frac{a'}{2}(-1)^q \\ B_{j-}^{\vartheta} &= \frac{\vartheta}{2} S_\pm + \frac{a^0}{2}\left(\vartheta \mathbf{u}_{j-}^0 + \mathbf{v}'_{j-}\right) + \frac{a'}{2}, \quad \vartheta = \pm \end{aligned} \tag{5.25}$$

Продолжим процедуру согласования и извлечем слагаемые $O\left(\left|\xi^{\varepsilon j\pm}\right|^{-2}\right)$ и $O\left(\left|\xi^{\varepsilon j\pm}\right|^{-1}\right)$ соответственно из членов $Z_\pm^{j0}\left(\xi^{\varepsilon j\pm}\right)$ и $Z_\pm^{j'}\left(\xi^{\varepsilon j\pm}\right)$ разложения (4.4), которые предписывают функции v_0'' поведение около точек $(P^j, \pm\ell)$. В результате согласно особенности (4.10) функции Грина и данным Неймана (4.9) для нее находим сингулярную составляющую правой части краевого условия (4.13)

$$h_{\mathrm{dir}\pm}''(y) = \pm\sum_{j=1}^{J} B_{j\pm}^- C(\theta_j)\delta\left(y - P^j\right) \mp \frac{a^0}{2}(\mp 1)^q \sum_{j=1}^{J}\sum_{p=1,2} C_p(\theta_j)\frac{\partial\delta}{\partial y_p}\left(y - P^j\right) \tag{5.26}$$

Как и ранее в формуле (5.17), дельта-функции Дирака и их производные – результат процедуры согласования при учете слагаемых порядков $\left|\xi^{\varepsilon j\pm}\right|^{-1} = \varepsilon r_{\varepsilon j\pm}^{-1}$ и $\varepsilon^{-1}\left|\xi^{\varepsilon j\pm}\right|^{-2} = \varepsilon r_{\varepsilon j\pm}^{-2}$ соответственно из разложений функций (5.24) и (5.8), полученных согласно представлениям (4.4) и (5.8), (5.24). Вместе с тем производные $\partial\delta/\partial y_p$, порождающие сингулярности $O(r_{\varepsilon j\pm}^{-2})$ внутри камеры $\Omega_{\#}(\ell^\varepsilon)$, не сказываются на условии (4.16) разрешимости задачи (4.11)–(4.14) с правыми частями (5.21), (5.22) и (5.26), так как собственная функция (4.15) не зависит от переменных y и дифференцирование уничтожает ее следы на торцах $\omega_{\#}(\pm\ell)$. Кроме того, определение (5.18) поправки в представлении (1.18) размера ℓ^ε уничтожает в названном условии разрешимости коэффициент a', фигурировавший в формулах (5.4) и (5.22). В силу соотношений (5.23) и (5.25) оно принимает вид

$$\frac{\alpha}{2}\mathbf{C}\left((-1)^q T^0 + 1 + R^0\right) + a^0\left(\mathbf{B}(\kappa) + \kappa^2 |\omega_\#| \ell''\right) = 0 \tag{5.27}$$

$$\mathbf{B}(\kappa) = \frac{1}{2}\sum_{\pm}\sum_{j=1}^{J}(\mp 1)^q\left(\mathbf{u}^0_{j\pm} - \mathbf{v}'_{j\pm}\right)C(\theta_j) -$$
$$- 2\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\mathbf{C}\int_\omega (\cos\left(\frac{\pi}{2}q\right)\partial_z \mathbf{v}'_0(y,0) + \frac{\pi q}{2\ell}\sin\left(\frac{\pi}{2}q\right)\partial_z^2 \mathbf{v}'_0(y,0))\,dy \tag{5.28}$$

Величина $\mathbf{B}(\kappa)$, получающаяся при вычислении интеграла (4.16) с подынтегральными выражениями (5.21), (5.22) и (5.26), из которых удалены коэффициенты $S_\pm$, a', ℓ'', а множитель ℓ' заменен выражением (5.18), зависит от выбранной частоты κ и формы волновода Π^0_2, т.е. от областей ω, $\omega_\#$, $\theta_1, \ldots, \theta_J$, точек $P^1, \ldots, P^J$ и размеров ℓ, ℓ'. Вместе с тем явная формула для функции $\kappa \mapsto \mathbf{B}(\kappa)$ недоступна без применения численных методов, так как она определяется через вспомогательные решения $\mathbf{u}^0_\pm$ и $\mathbf{v}'_0$, точнее их скалярные характеристики из соотношений (5.12), (5.15), (5.19) и (5.25). Единственное используемое далее важное свойство: функции $\mathbf{u}^0_\pm$ и $\mathbf{v}'_0$, а вместе с ними и число $\mathbf{B}(\kappa)$ вещественны.

6. Почти полное прохождение поршневой волны. Покажем, как можно добиться равенств

$$R^0 = 0, \quad T^0 = (-1)^{q+1} \tag{6.1}$$

в представлениях (1.13) коэффициентов рассеяния. При учете соотношений (5.13) и (6.1) имеем

$$a^0 = i\alpha^{-1}\mathbf{C}^{-1} \tag{6.2}$$

Коэффициент (6.2) чисто мнимый, а число (5.28) вещественное. Таким образом, соотношение

$$\ell'' = -\left(2\kappa^2|\omega_\#|\right)^{-1}\mathbf{B}(\kappa) \tag{6.3}$$

уничтожает мнимую часть выражения (5.27). Его вещественная часть исчезает в силу равенств (6.1). Итак, последнее из нужных требований соблюдено.

Определение высоты $2\ell^\varepsilon$ вставки $\Omega^\gamma(\ell^\varepsilon)$ по формулам (1.18), (5.1) и (5.18), (6.3) следует интерпретировать как настройку параметров волновода для обеспечения почти полного прохождения поршневой волны через две перфорированные перегородки. Поскольку поправка (5.18) положительна, найденная высота $2\ell^\varepsilon$ больше критической $\pi q/\kappa$.

Обсудим несколько вариантов изменения геометрии волновода Π^ε_2.

6.1. Нарушение настройки. Пусть $t \neq 0$ — вещественный параметр, и в противоположность формуле (6.3)

$$\ell'' = t - \left(2\kappa^2|\omega_\#|\right)^{-1}\mathbf{B}(\kappa) \tag{6.4}$$

Теперь, решив систему линейных уравнений (5.13) и (5.27), находим

$$R^0(t) = 1 - \frac{i\alpha^2\mathbf{C}^2}{t + i\alpha^2\mathbf{C}^2}, \quad T^0(t) = (-1)^{q+1}\frac{i\alpha^2\mathbf{C}^2}{t + i\alpha^2\mathbf{C}^2}, \quad a^0 = -\frac{\alpha\mathbf{C}}{t + i\alpha^2\mathbf{C}^2} \tag{6.5}$$

Графики функций $\mathbb{R} \ni t \mapsto R^0(t)$, $T^0(t)$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ суть окружности с радиусом $\frac{1}{2}$ и центрами в точках $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(-1)^{q+1}$ на вещественной оси. В случае $t = 0$ получаем равенства (6.1), но $R^0(t) \to 1$, $T^0(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Наконец, модули коэффициентов отражения и прохождения

$$\left|R^0(t)\right| = 1 - \frac{\alpha^4 \mathbf{C}^4}{t^2 + \alpha^4 \mathbf{C}^4}, \quad \left|T^0(t)\right| = \frac{\alpha^4 \mathbf{C}^4}{t^2 + \alpha^4 \mathbf{C}^4}$$

соответственно монотонно возрастает и убывает при увеличении переменной $|t|$. Приведенные формулы показывают, как при изменении высоты вставки (1.1), $n = 1$, почти полное прохождение поршневой волны превращается в ее почти полное отражение.

Формула (6.4) означает искажение настройки высоты вставки на втором шаге асимптотической процедуры. Сделаем то же на первом шаге (5.18), а именно положим

$$\ell' = t - \alpha^2 \gamma^{-2} \mathbf{C}, \quad t \neq 0$$

Тогда задача (4.11)—(4.14) с правыми частями (5.17) разрешима только в случае $a^0 = 0$, а значит, представление (5.4) теряет главный асимптотический член $O(\varepsilon^{-1})$ и поэтому реализуется почти полное отражение поршневой волны.

6.2. Разные перфорация перегородок и сечения рукавов. Пусть $P_\vartheta^1, \ldots, P_\vartheta^{J_\vartheta}$ — два ($\vartheta = \pm$) семейства попарно различных точек в области ω_*, и $\theta^\varepsilon_{j\pm}(\pm\ell^\varepsilon)$ — отверстия, определенные аналогами формул (1.3) по фиксированным областям $\theta_{j\pm} \subset \mathbb{R}^2$; здесь $J_\pm \in \mathbb{N}$ и $j = 1, \ldots, J_\pm$. Повторим с понятными изменениями выкладки из разд. 4 применительно к измененному волноводу (1.14) (рис. 1, д), у которого рукава (1.15) имеют неодинаковые сечения $\omega_\pm$ и перегородки (1.17) перфорированы по-разному. В результате получим заменители формул (5.27) и (5.13), (5.14)

$$R^0 - 1 = ia^0 \alpha_- \mathbf{C}_-, \quad T^0 = ia^0(-1)^q \alpha_+ \mathbf{C}_+ \tag{6.6}$$

$$\frac{1}{2}\Big((-1)^q T^0 \alpha_+ \mathbf{C}_+ + \left(1 + R^0\right)\alpha_- \mathbf{C}_-\Big) + a^0\left(\mathbf{B}_\#(\kappa) + 2\kappa^2 \left|\omega_\#\right| \ell''\right) = 0 \tag{6.7}$$

$$\mathbf{C}_\pm = \sum_{j=1}^{J_\pm} C(\theta_{j\pm}), \quad \alpha_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\kappa|\omega_\pm|}} \tag{6.8}$$

Новая перфорация перегородок (1.17) приводит к сингулярным составляющим

$$g_{\mathrm{dir}\pm}(y) = \frac{a^0}{2}(\mp 1)^q \sum_{j=1}^{J_\pm} C(\theta_{j\pm})\delta\left(y - P^j_{(\pm)}\right)$$

в правых частях (5.11) краевых условий Неймана в задаче (4.11)—(4.14) для $u^0_\pm$ и, соответственно, к равенствам (6.6), проистекающим от условия (4.8) ее разрешимости. Похожие изменения происходят и в сингулярных составляющих (5.26) задачи (4.11)—(4.14) для v_0'' и в коэффициентах при T^0, $1 + R^0$ и a^0 в формуле (6.7). Модифицированное выражение (5.28), обозначенное $\mathbf{B}_\#(\kappa)$, появляется в формуле (6.7) и, следовательно, в условии (6.4), однако для существования решения (6.1) полученной системы алгебраических уравнений для T^0 и R^0 требуется еще одно ограничение

$$\frac{1}{\sqrt{|\omega_+|}} \sum_{j=1}^{J_+} \mathrm{cap}_3 \theta_{j+} = \frac{1}{\sqrt{|\omega_-|}} \sum_{j=1}^{J_-} \mathrm{cap}_3 \theta_{j-} \tag{6.9}$$

Равенство (6.9) следует интерпретировать как критерий возможности обеспечить эффект почти полного прохождения поршневой волны в волноводе (1.14) путем настройки высоты $2\ell^{\varepsilon}$ камеры. В критерии фигурируют площади $|\omega_{\pm}|$ сечений рукавов и гармонические емкости [12] двумерных трещин $\{x : y \in \overline{\theta_{j\pm}}, z = 0\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, определенные по емкостному потенциалу $\mathbf{P}$ согласно формулам (4.3) и (4.5).

Если требование (6.9) нарушено, то при соблюдении условия (6.3) с заменой $\mathbf{B}(\kappa) \mapsto \mathbf{B}_{\#}(\kappa)$ находим

$$R^0(\varphi) = \frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}, \quad T^0(\varphi) = \frac{2(-1)^q\varphi}{1+\varphi^2}, \quad \varphi = \frac{\alpha_+\mathbf{C}_+}{\alpha_-\mathbf{C}_-}$$

Таким образом, наблюдаются значимые как отражение, так и прохождение волн, однако при слабой проницаемости одной из перегородок ($\varphi \to +0$ или $\varphi \to +\infty$) легко предсказуемо почти полное отражение, т.е. $\left|R^0(\varphi)\right| \to 1$.

6.3. Волновые фильтры и дампферы. Отсутствие в ограничении (6.9) частоты κ позволяет создать примитивный волновой фильтр (рис. 1, д), в котором

$$\Omega_{\#}\left(\ell^{\varepsilon}\right) = \omega_- \times \left(-\ell^{\varepsilon}, \ell^{\varepsilon}\right), \quad J = 1, \quad |\omega_+|^{-1/2}\operatorname{cap}_3\theta_{1+} = |\omega_-|^{-1/2}\operatorname{cap}_3\theta_{1-}$$

Именно, если расстояние $2\ell^{\varepsilon}$ между первой перегородкой $\Theta^{\varepsilon}(-\ell^{\varepsilon}) = \omega_-(-\ell^{\varepsilon})\backslash\overline{\theta^{\varepsilon}_{1+}}$ и "выхлопной трубой" $\omega_+(\ell^{\varepsilon}) = \omega_+ \times (\ell^{\varepsilon}, +\infty)$ подобрано согласно модифицированным формулам (1.18), (5.1), (5.18), (6.3) (ср. соотношения (6.6)–(6.8) и (5.13), (5.27), (5.14)) при заданной частоте $\kappa_* := \kappa \in (0, \min\Lambda_{1\pm}^{1/2})$, где $\Lambda_{1\pm}$ – первые положительные собственные числа задач (1.8) в областях $\omega_{\pm}$, то поршневая волна с волновым числом $\alpha_* = (2\kappa_*|\omega_-|)^{-1/2}$ почти не отражается, однако при изменении волнового числа (вариации частоты) настройка камеры $\Omega_{\#}(\ell^{\varepsilon})$ пропадает, и она работает как "глушитель", т.е. почти полностью отражает волну.

Если $\omega_{\pm}$ и $\theta_{\pm}$ – круги с радиусами $\rho^{\omega}_{\pm}$ и $\rho^{\theta}_{\pm}$ соответственно, то простейшее свойство линейности гармонической емкости [12] показывает, что критерий (6.9) почти полного прохождения соблюдается при ограничении (1.19).

7. Замечания

7.1. Полные асимптотические разложения. Развитие изложенной асимптотической процедуры позволяет построить бесконечные ряды для коэффициентов рассеяния R^{ε} и T^{ε}. Вместе с тем в рамках метода сращиваемых разложений [41, 42] на следующих шагах итерационных процессов в асимптотические конструкции привлекаются решения предельных задач в областях $\Omega_{\sqcup}$, $\Omega_{\#}(\ell)$ и Ξ_j из разд. 4 с все более и более сильными сингулярностями в точках $(P^j, 0)$, $(P^j, \pm\ell)$ и на бесконечности. Это обстоятельство значительно усложняет реализацию процедуры согласования. Более простым оказывается метод составных разложений [7, 46, 47], в котором на каждом шаге требуется решать задачи с фиксированным поведением вблизи особых точек. Показано ([7] гл. 2, [48]), как старшие асимптотические члены, полученные при помощи метода сращивания, переделываются в члены, пригодные для метода составных разложений. В частности, в рамках последнего метода задачи в цилиндрах $\Omega_{\#}(\ell)$ и $\Omega_{\sqcup}$ всегда решаются в классе ограниченных и затухающих на бесконечности функций, а сингулярности использованных в разд. 5 решений $u_{\pm}^{0}$ и v_0' присоединяются к решениям задач в неограниченных областях $\Xi^1,\dots,\Xi^J$, которым (решениям) предписывается затухание со скоростью $O\left(\left|\xi^j\right|^{-1}\right)$.

Младшие члены асимптотики понадобятся наверняка при попытке обеспечить почти полное прохождение волн, отличающихся от поршневых и приобретающих зависимость от поперечных координат $y = (y_1, y_2)$. Например, если амплитудная часть $U(y)$ волны $e^{i\mu z}U(y)$ обращается в нуль в точке P^j, вокруг которой образованы отверстия $\theta_j^{\varepsilon}(z^n)$ в перегородках, то в задаче (4.1) о пограничном слое нужно учесть специальные решения, которые имеют отношение к тензору поляризации [12 прил. G] трещины $\overline{\theta_j(0)}$, включают коэффициенты $C_1(\theta_j)$ и $C_2(\theta_j)$, уже фигурировавшие в формулах (4.4) и (5.26). При этом производные дельта-функции Дирака в краевых условиях (4.13) оказывают влияние на условия разрешимости (4.16) задачи (4.11)–(4.14) в случае зависимости собственной функции v от поперечных переменных y. В результате критерий (6.9) возможности почти полного прохождения поршневых волн (1.11) существенно изменяется для волн иного строения.

7.2. Обоснование асимптотики. Общие методы исследования сингулярно возмущенных статических и спектральных краевых задач [7] требуют лишь незначительных изменений при переходе к дифракционным задачам о распространении волн в волноводах с цилиндрическими выходами на бесконечность. При этом полезной оказывается техника весовых пространств с отделенной асимптотикой ([1] гл. 6, 7, § 3) (см. также [49, 50] для уравнения Гельмгольца в квантовых и акустических волноводах). Нормы в таких пространствах включают модули коэффициентов рассеяния и поэтому для проверки соотношений (1.11) достаточно из построенных членов асимптотических разложений (5.2)–(5.5) соорудить подходящее глобальное асимптотическое приближение к решению (1.12) задачи (1.5), обработать появившуюся малую невязку в вариационной задаче (1.6) и применить равномерные по параметру ε априорные оценки решений. Нужные асимптотические конструкции для обоих методов сращиваемых и составных разложений известны ([7] гл. 2). Благодаря возможности нахождения младших членов асимптотик заботиться о точности априорных оценок не нужно (ср. подход [47]), но метод [7] все-таки предоставляет асимптотически точные оценки.

7.3. Вариация частоты. Изменим постановку вопроса, а именно, зафиксируем высоту L вставки (1.15) и попытаемся найти частоту

$$\kappa(\varepsilon) = \kappa^0 + \varepsilon\kappa' + \varepsilon^2\kappa'' + O\left(\varepsilon^3\right), \tag{7.1}$$

при которой происходит почти полное прохождение поршневых волн (1.11) в волноводе Π_2^{ε} с рукавами (1.17) одинакового сечения ω.

При помощи соотношений (1.18), (5.1) и (5.18) находим два первых члена разложения (7.1)

$$\kappa^0 = \frac{\pi q}{L}, \qquad \kappa' = \frac{\mathbf{C}}{\pi q\left|\omega_{\#}\right|}$$

К сожалению, явную формулу для коэффициента κ'' в третьем члене представления (1.18) получить не удается, так как величина $\mathbf{B}(\kappa)$ сложным образом зависит от частоты κ: в выражении (5.28) присутствуют интегралы от решений $\mathbf{u}_{\pm}^{0}$ и $\mathbf{v}_0'$ краевых задач для оператора Гельмгольца $\Delta_x + \kappa^2$.

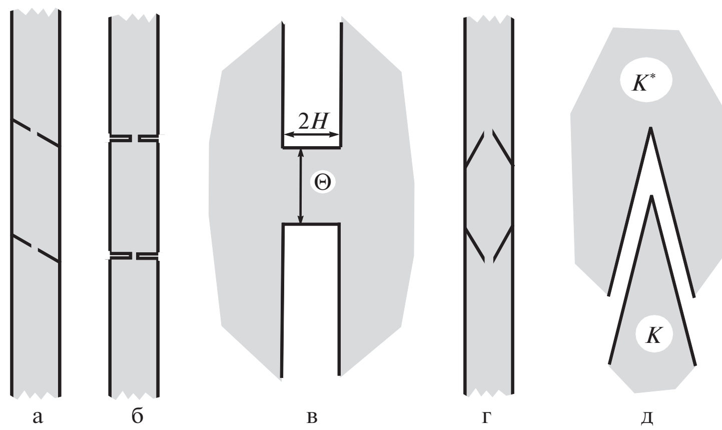

Рис. 3. Иные формы волноводов с перфорированными перегородками (а, б, г) и области для описания пограничных слоев (в и д).

8. Варианты, обобщения и следствия

8.1. Изменение геометрии перфорированных перегородок. Разработаны общие алгоритмы, позволяющие приспособить предложенные асимптотические процедуры к цилиндрическим волноводам с препятствиями, изображенными на рис. 3, а и б. Вместе с тем по сравнению с волноводами на рис. 1, а—г, вспомогательные решения предельных задач из разд. 4 теряют явный вид. Например, в случае косых перегородок (рис. 3, а) искажается дифракционное поле (4.7), и коэффициент отражения в полубесконечном цилиндре $\Omega_\angle$ со скошенным торцом отличен от единицы, а в случае утолщенных перегородок (рис. 3, б) вместо решения (4.2), найденного по емкостному потенциалу $\mathbf{P}$, используется решение Z задачи (4.1) в полупространствах, соединенных через трубу $\theta_j \times [-H_n, H_n]$ (рис. 3, в)

$$\Xi^j = \left|\xi : \eta \in \mathbb{R}^2, |\zeta| > H_n\right| \cup \{\xi : \eta \in \theta_j, |\zeta| \le H_n\}$$

с зафиксированным поведением на бесконечности

$$\mathbf{Z}(\xi) = \pm 1 \mp C(\theta_j, H_n)|\xi|^{-2} + O\left(|\xi|^{-2}\right); \quad |\xi| \to \infty, \quad \pm\zeta > 2H_n > 0$$

Здесь $2\varepsilon H_n$ – толщина перегородки с номером $n = 1, \ldots, N$, $H_n > 0$, а $C(\theta_j, H_n)$ – величина, зависящая от формы отверстия θ_j и от длины $2H_n$ трубы, однако не выражающаяся через классические объекты гармонического анализа.

Для конических перегородок с отверстиями диаметром $O(\varepsilon)$ в вершинах (рис. 3, г) алгоритм построения асимптотики изменяется мало (ср. публикации [28, 29] для двумерной задачи Дирихле, рис. 2, г и д), однако разложение ведется по степеням малого параметра ε с показателями, определенными по сингулярностям решений ([43, 51], гл. 7) задачи Неймана для оператора Лапласа в выпуклом конусе $\mathbf{K}$ и его дополнении $\mathbf{K}^* = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathbf{K}}$ (рис. 3, д). Впрочем для подобных задач разработанная в данной статье процедура настройки параметров волновода ранее не применялась и эффект почти полного прохождения волн через перфорированные перегородки обнаружен не был (ср. разд. 6.2).

8.2. Почти полное отражение. Если $\lambda = \kappa^2$ — не собственное число задачи (4.11)–(4.14), то поршневая волна w^+, приходящая из бесконечности в рукаве $\Omega_-(\ell)$ волновода Π_2^ε, почти полностью отражается от первой перегородки $\Theta^\varepsilon(-\ell)$ (обозначения из формул (2.2) и (1.14)). Коэффициенты рассеяния у решения (1.12) принимают вид

$$R^\varepsilon = 1 + \varepsilon R' + O\left(\varepsilon^2\right), \quad T^\varepsilon = \varepsilon^2 T' + O\left(\varepsilon^3\right) \tag{8.1}$$

Алгоритм построения асимптотики значительно упрощается по сравнению с разд. 5 и разд. 6, в частности, бесполезно проводить настройку высоты вставки $\Omega_\#(\ell^\varepsilon)$ и можно взять $\ell' = 0$ и $\ell'' = 0$ в определении (1.18).

Укажем начальные члены асимптотики в разных частях волновода.

Поправочный член внешнего разложения на рукаве $\Omega_-(\ell)$

$$u^\varepsilon(x) = \alpha\left(e^{i\kappa(z+\ell)} + e^{-i\kappa(z+\ell)}\right) - \varepsilon\alpha\sum_{j=1}^{J} C^j(\theta_j)\left[\frac{i}{\kappa|\omega|}e^{-i\kappa(z+\ell)} + G^j(y,-z-\ell)\right] + \ldots \tag{8.2}$$

находится в результате согласования с внутренним разложением около отверстий $\theta_j^\varepsilon(-\ell)$

$$u^\varepsilon(x) = \alpha(1 - \mathbf{Z}^j(\xi^{j-})) + \ldots; \quad j = 1,\ldots,J \tag{8.3}$$

Здесь использованы обозначения, введенные в разд. 5. Формула (8.2) означает, что в представлении (8.1) фигурирует величина

$$R' = -\frac{i}{\kappa|\omega|}\sum_{j=1}^{J} C(\theta_j) = -2i\alpha^2\mathbf{C}$$

Продолжение процедуры согласования показывает, что в силу соотношений (8.3) и (4.4) первый член внешнего разложения на камере $\Omega^\gamma(\ell)$

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon v_0'(x) + \ldots$$

находится из однозначно разрешимой по предположению задачи (4.11)–(4.14) с правыми частями

$$h_0(y) = h_1(y) = 0, \quad h_+(y) = 0, \quad h_-(y) = \alpha\sum_{j=1}^{J} C^j(\theta_j)\delta\left(y - P^j\right)$$

Наконец, внутреннее разложение вблизи отверстий $\theta_j^\varepsilon(+\ell)$ и внешнее на рукаве $\Omega_+(\ell)$ выглядят так:

$$u^\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{2}v'\left(P^j,\ell\right)\left(1 - \mathbf{Z}^j\left(\xi^{j+}\right)\right) + \ldots, \quad j = 1,\ldots,J$$

$$u^\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{j=1}^{J} v'\left(P^j,\ell\right)C^j(\theta_j)\left(\frac{i}{\kappa|\omega|}e^{i\kappa(z-\ell)} + G^j(y,z-\ell)\right) + \ldots$$

Последняя формула приводит ко второму соотношению (8.1).

Проведенные вычисления позволяют заключить, что прохождение поршневой волны через одну перегородку с отверстием диаметром $O(\varepsilon)$ понижает амплитуду в ε раз.

Таким образом, при условии, что число $\lambda = \kappa^2$ не является собственным для задачи Неймана на каждой ($n = 1,\dots, N-1$) из камер (1.1), коэффициент прохождения T^ε в волноводе (1.4) с N перегородками приобретает порядок ε^N.

8.3. Камера обскура. Рассмотрим решение

$$u_\sqcap^\varepsilon(x) = \chi(z)\alpha(e^{i\kappa(z+\ell^\varepsilon)} + R_\sqcap^\varepsilon e^{-i\kappa(z+\ell^\varepsilon)}) + \tilde{u}_\sqcap^\varepsilon(x) \tag{8.4}$$

задачи (1.5) в полубесконечном волноводе $\Pi_\sqcap^\varepsilon$ (рис. 2, а), который образован рукавом $\Omega_-(\ell^\varepsilon) = \omega\times(-\infty,-\ell^\varepsilon)$ и камерой $\Omega_\sqcap^\varepsilon = \omega_\# \times(-\ell^\varepsilon,0)$, соединенными одним отверстием $\theta_1^\varepsilon(-\ell^\varepsilon)$. Множество $\Pi_\sqcap^\varepsilon$ – половина $\{x\in\Pi_2^\varepsilon : z<0\}$ симметричного множества Π_2^ε из разд. 5 в случае $J = 1$, а значит, решения (8.4) и (1.12) связаны соотношением

$$u_\sqcap^\varepsilon(y,z) = u^\varepsilon(y,z) + u^\varepsilon(y,-z)$$

При этом коэффициент отражения $R_\sqcap^\varepsilon$ в волноводе $\Pi_\sqcap^\varepsilon$ равен сумме $R^\varepsilon + T^\varepsilon$ коэффициентов рассеяния в волноводе Π_2^ε. Таким образом, асимптотические формулы из разд. 6 позволяют найти асимптотику фазы $\psi_\varepsilon\in(-\pi,\pi]$ у коэффициента отражения

$$\left|R_\sqcap^\varepsilon\right| = 1 \Rightarrow R_\sqcap^\varepsilon = e^{i\psi_\varepsilon}$$

Если κ^2 не является собственным числом задачи Неймана в половине $\Omega_\sqcap^\varepsilon(\ell)$ цилиндра $\Omega^\varepsilon(\ell)$, т.е. $\kappa\neq\pi p/\ell$ при всех $p\in\mathbb{N}$, или настройка высоты ℓ^ε нарушена на первом шаге (5.18), то $\psi_0 = 0$ в представлении фазы

$$\psi_\varepsilon = \psi_0 + O(\varepsilon) \tag{8.5}$$

Если же $\kappa = \pi p/\ell$, $p\in\mathbb{N}$, т.е. $q = 2p$ в формуле (5.1), а настройка высоты ℓ^ε нарушена на втором шаге и поправка ℓ'' имеет вид (6.4) с параметром $t\in\mathbb{R}$, то согласно формулам (6.5) и (1.13)

$$R_\sqcap^\varepsilon(t) = R^0(t) + T^0(t) = 1 + \frac{2i\alpha^2\mathbf{C}^2}{it+\alpha^2\mathbf{C}^2} + O(\varepsilon) = \frac{t^2-\alpha^4\mathbf{C}^4}{t^2+\alpha^4\mathbf{C}^4} + i\,\frac{2t\alpha^2\mathbf{C}^2}{t^2+\alpha^4\mathbf{C}^4} + O(\varepsilon) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi_0(t) = \operatorname{arctg}\frac{2t\alpha^2\mathbf{C}^2}{t^2-\alpha^4\mathbf{C}^4}$$

Главная часть фазы (8.5) удовлетворяет соотношениям

$$\psi_0(t)\to 0 \quad \text{при} \quad t\to 0, \quad \psi_0(t)\to\pm\frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad t\to\pm\alpha^2\mathbf{C}^2$$

Иными словами, для спектрального параметра $\lambda = \kappa^2$, близкого к собственному числу задачи Неймана в камере $\Omega_\sqcap^\varepsilon$ с заклееным отверстием, происходит быстрое, со скоростью $O(\varepsilon^{-1})$, изменение фазы ψ_ε коэффициента отражения $R_\sqcap^\varepsilon$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
2. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
3. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
4. *Бирман М.Ш., Скворцов Г.Е.* О квадратичной суммируемости старших производных решений задачи Дирихле в области с кусочно гладкой границей // Изв. вузов. 1983. № 8. С. 34–40.
5. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. матем. об-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
6. *Evans D.V., Levitin M., Vasil'ev D.* Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 21–31.
7. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. 1 & 2. Berlin: Akademie, 1991.
8. *Назаров С.А.* Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра // Сиб. матем. ж. 2010. Т. 51. № 5. С. 1086–1101.
9. *Назаров С.А.* Открытие лакуны в непрерывном спектре периодически возмущенного волновода // Матем. зам. 2010. Т. 87. № 5. С. 764–786.
10. *Назаров С.А.* Асимптотика ловушечных мод и собственных чисел под порогом непрерывного спектра волновода с тонким экранирующим препятствием // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23. № 3. С. 216–260.
11. *Назаров С.А.* Аномалии рассеяния акустических волн вблизи точек отсечки непрерывного спектра (обзор) // Акустич. ж. 2020. Т. 66. № 5. С. 489–508.
12. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
13. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
14. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.
15. *Кучмент П.А.* Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных // УМН. 1982. Т. 37. № 4. С. 3–52.
16. *Скриганов М.М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. Т. 171. Л.: Наука, 1985. 122 с.
17. *Kuchment P.* Floquet Theory for Partial Differential Equations. Basel: Birchäuser, 1993.
18. *Гельфанд И.М.* Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. С. 1117–1120.
19. *Назаров С.А.* Лакуна в существенном спектре задачи Неймана для эллиптической системы на периодической области // Функц. анализ и его прил. 2009. Т. 43. № 3. С. 92–95.
20. *Назаров С.А.* Пример множественности лакун в спектре периодического волновода // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 4. С. 99–124.
21. *Назаров С.А.* О прохождении волн через малое отверстие в перегородке акустического волновода // Сиб. матем. ж. 2018. Т. 59. № 1. С. 110–129.
22. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Советское радио, 1966.
23. *Shanin A.V.* Weinstein's diffraction problem: embedding formula and spectral equation in parabolic approximation // SIAM J. Appl. Math. 2009. V. 70. P. 1201–1218.
24. *Назаров С.А.* Аномалии рассеяния в резонаторе выше порогов непрерывного спектра // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 6. С. 15–48.
25. *Korolkov A.I., Nazarov S.A., Shanin A.V.* Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves // ZAMM. 2016. V. 96. № 10. P. 1245–1260.
26. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Diffraction of a mode close to its cut-off by a transversal screen in a planar waveguide // Wave Motion. 2017. V. 68. P. 218–241.
27. *Delitsyn A., Grebenkov D.S.* Mode matching methods for spectral and scattering problems // Q. J. Mech. Appl. Math. 2018. V. 71. № 4. P. 537–580.

28. *Баскин Л.М., Кабардов М., Нейттаанмяки П., Пламеневский Б.А., Сарафанов О.В.* Асимптотика и численное исследование резонансного туннелирования в двумерных квантовых волноводах переменного сечения // ЖВММФ. 2013. Т. 53. № 11. С. 1835–1855.
29. *Baskin L.M., Neittaanmaki P., Plamenevskii B.A., Sarafanov O.V.* Resonant tunneling. quantum waveguides of variable cross-section, asymptotics, numerics, and applications // in: Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences. Heidelberg, New York: Springer, 2015.
30. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
31. *Харди Г., Литлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
32. *Арутюнян Н.Х., Назаров С.А., Шойхет Б.А.* Оценки и асимптотика напряженно-деформированного состояния трехмерного тела с трещиной в теории упругости и теории ползучести // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1365–1369.
33. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Задача Неймана для самосопряженных эллиптических систем в области с кусочно гладкой границей // Тр. Ленингр. матем. об-ва. 1990. Т. 1. С. 174–211.
34. *Назаров С.А.* Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // УМН. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
35. *Кондратьев В.А.* О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка в кусочно-гладкой области // Диффер. уравн. Т. 6. № 10. С. 1831–1843.
36. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
37. *Figotin A., Klein A.* Midgap defect modes in dielectric and acoustic media // SIAM J. Appl. Math. 1998. V. 58. № 6. P. 1748–1773.
38. *Назаров С.А.* Почти стоячие волны в периодическом волноводе с резонатором и околопороговые собственные числа // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28. № 3. С. 111–160.
39. *Delourme B., Fliss S., Joly P., Vasilevskaya E.* Trapped modes in thin and infinite ladder like domains. Part 1: Existence results // Asymptotic Analysis. 2017. V. 103. № 3. P. 103–134.
40. *Назаров С.А.* Асимптотика собственных чисел и функций тонкой квадратной решетки Дирихле с искривленной перемычкой // Матем. зам. 2019. Т. 105. № 4. С. 564–588.
41. *Ван Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967. 310 с.
42. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
43. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. матем. об-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
44. *Pazy A.* Asymptotic expansion of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. V. 24. P. 193–218.
45. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
46. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
47. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic Analysis of Fields in Multi-Structures. Oxford: Clarendon, 1999.
48. *Назаров С.А.* Разрушение циклов и возможность раскрытия спектральных лакун в квадратной решетке тонких акустических волноводов // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. № 6. С. 3–51.
49. *Назаров С.А.* Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода // ТМФ. 2011. Т. 167. № 2. С. 239–262.
50. *Назаров С.А.* Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // Функц. анализ и его прил. 2013. Т. 47. № 3. С. 37–53.
51. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.

Transmission and Trapping of Waves in an Acoustic Waveguide with Perforated Walls

S. A. Nazarov[a,#] and L. Chesnel[b,##]

[a] *Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russia*
[b] *INRIA/Centre de mathématiques appliquées, École Polytechnique, Université Paris-Saclay, Palaiseau, France*
[#]*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*
[##]*e-mail: lucas.chesnel@inria.fr*

We study trapping and transition of waves in an acoustic waveguide with a family of perforated cross-walls. Eigenvalues of the corresponding spectral Neumann problem for the Laplace operator under the symmetry geometry conditions. Almost complete transmission of the piston are found out wave through the family of small holes (the inverted Weinstien anomaly) is achieved by fine tuning of the distance between the cross-walls with various configuration of the connecting holes. A criterion of the above-mentioned anomaly is obtained. We also discuss some related questions, in particular, primitive wave filters and the effect of camera obscura.

Keywords: acoustic waveguide, perforated walls, trapped waves, asymptotics of scattering coefficients, almost complete transition of waves

REFERENCES

1. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1994.
2. *Ladyzhenskaya O.A.* The boundary value problems of mathematical physics // Appl. Math. Sci., 1985, vol. 49.
3. *Birman M.S., Solomyak M.Z.* Spectral Theory and Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. Reidel: Dordrecht, 1987.
4. *Birman M.Sh., Skvortsov G.E.* On square-integrability of higher derivatives of a solution of a Dirichlet problem in a domain with piecewise smooth boundary // Izv. vuzov. Math., 1962, vol. 20, no. 5, pp. 12–21. (in Russian)
5. *Kondrat'ev V.A.* Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points // Trans. Moscow Math. Soc., 1967, vol. 16, pp. 227–313.
6. *Evans D.V., Levitin M., Vasil'ev D.* Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech., 1994, vol. 261, pp. 21–31.
7. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulä r gestörten Gebieten. 1 & 2 Berlin: Akademie, 1991.
8. *Nazarov S.A.* Variational and asymptotic methods for finding eigenvalues below the continuous spectrum threshold // Sib. Math. J., 2010, vol. 51, no. 5, pp. 866–878.
9. *Nazarov S.A.* Opening a gap in the continuous spectrum of a periodically perturbed waveguide // Math. Notes, 2010, vol. 87, no. 5, pp. 738–756.
10. *Nazarov S.A.* Asymptotics of trapped modes and eigenvalues below the continuous spectrum of a waveguide with a thin barrier // St. Petersburg Math. J., 2011, vol. 23, no. 3, pp. 571–601.
11. *Nazarov S.A.* Anomalies of scattering of acoustic waves near cutoff points of the continuous spectrum (a review) // Acoust. Phys., 2020, vol. 66, no. 5, pp. 477–494.
12. *Po′lya G., Szegö G.* Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton, NJ: Univ. Press, 1951.
13. *Landkof N.S.* Foundations of Modern Potential Theory. Springer, 1972.
14. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. III: Scattering Theory. N.Y.: Acad. Press, 1989.
15. *Kuchment P.A.* Floquet theory for partial differential equations // Russ. Math. Surv., 1982, vol. 37, no. 4, pp. 1–60.
16. *Skriganov M.M.* Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators // Proc. Steklov Inst. Math., 1987, vol. 171, pp. 1–121.

17. *Kuchment P.* Floquet Theory for Partial Differential Equations. Basel: Birchäuser, 1993.
18. *Gelfand I.M.* Decomposition into eigenfunctions of an equation with periodic coefficients // Dokl. AN SSSR, 1950, vol. 73, pp. 1117–1120. (in Russian)
19. *Nazarov S.A.* A gap in the essential spectrum of the Neumann problem for an elliptic system in a periodic domain // Funct. Anal. Appl., 2009, vol. 43, no. 3, pp. 239–241.
20. *Nazarov S.A.* On the plurality of gaps in the spectrum of a periodic waveguide // Math. sb., 2010, vol. 201, pp. 569–594.
21. *Nazarov S.A.* Transmission of waves through a small aperture in the cross-wall in an acoustic waveguide // Siberian Math. J., 2018, vol. 59, no. 1, pp. 85–101.
22. *Weinstein A.* Diffraction Theory and Factorization Method Moscow: Sovetskoe Radio, 1966. (in Russian)
23. *Shanin A.V.* Weinstein's diffraction problem: embedding formula and spectral equation in parabolic approximation // SIAM J. Appl. Math., 2009, vol. 70, pp. 1201–1218.
24. *Nazarov S.A.* Scattering anomalies in a resonator above thresholds of the continuous spectrum // Math. Sb., 2015, vol. 206, no. 6, pp. 782–813.
25. *Korolkov A.I., Nazarov S.A., Shanin A.V.* Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves // ZAMM, 2016, vol. 96, no. 10, pp. 1245–1260.
26. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Diffraction of a mode close to its cut-off by a transversal screen in a planar waveguide // Wave Motion, 2017, vol. 68, pp. 218–241.
27. *Delitsyn A., Grebenkov D.S.* Mode matching methods for spectral and scattering problems // Q. J. Mech. Appl. Math., 2018, vol. 71, no. 4, pp. 537–580.
28. *Baskin L.M., Kabardova M., Neittaanmaki P., Plamenevskii B.A., Sarafanov O.V.* Asymptotic and numerical study of resonant tunneling in two-dimensional quantum waveguides of variable cross section // Comp. Math.&Math. Phys., 2013, vol. 53, no. 11, pp. 1664–1683.
29. *Baskin L.M., Neittaanmaki P., Plamenevskii B.A., Sarafanov O.V.* Resonant tunneling. quantum waveguides of variable cross-section, asymptotics, numerics, and applications // in: Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences. Heidelberg; N.Y.: Springer, 2015.
30. *Maz'ya V.G., Nazarov S.A., Plamenevskii B.A.* Asymptotic expansions of the eigenvalues of boundary value problems for the Laplace operator in domains with small holes // Math. USSR Izv., 1985, vol. 24, pp. 321–345
31. *Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G.* Inequalities. Cambridge: Univ. Press, 1934.
32. *Arutyunyan N.Kh., Nazarov S.A., Shoikhet B.A.* Bounds and the asymptote of the stress-strain state of a three-dimensional body with a crack in elasticity theory and creep theory // Sov. Phys. Dokl., 1982, vol. 27, pp. 817–819.
33. *Nazarov S.A., Plamenevskii B.A.* Neumann problem for selfadjoint elliptic systems in a domain with piecewise smooth boundary // Trans. Am. Math. Soc. Ser. 2, 1993, vol. 15, pp. 169–206.
34. *Nazarov S.A.* The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and the algebraic description of their attributes // Russ. Math. Surv., 1999, vol. 54, no. 5, pp. 947–1014.
35. *Kondratiev V.A.* The smoothness of the solution of the Dirichlet problem for second order elliptic equations in a piecewise smooth domain // Differ. Uravn., 1970, vol. 6, no. 10, pp. 1831–1843. (in Russian)
36. *Schechter M., Bers L., John F.* Partial Differential Equations. N.Y.: Interscience, 1064.
37. *Figotin A., Klein A.* Midgap defect modes in dielectric and acoustic media // SIAM J. Appl. Math., 1998, vol. 58, no. 6, pp. 1748–1773.
38. *Nazarov S.A.* Almost standing waves in a periodic waveguide with resonator, and near-threshold eigenvalues // St. Petersburg Math. J., 2016, vol. 28, no. 3, pp. 377–410.
39. *Delourme B., Fliss S., Joly P., Vasilevskaya E.* Trapped modes in thin and infinite ladder like domains. Part 1: Existence results // Asymptotic Analysis. 2017, vol. 103, no. 3, pp. 103–134.
40. *Nazarov S.A.* Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions of a thin square Dirichlet lattice with a curved ligament // Math. Notes, 2019, vol. 105, no. 4, pp. 77–94.
41. *Van-Dyke M.* Perturbation Methods in Fkuid Mechanics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1964.
42. *Il'in A.M.* Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems. Providence, RI : Am. Math. Soc., 1992.
43. *Kondrat'ev V.A.* Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points // Trans. Moscow Math. Soc., 1967, vol. 16, pp. 227–313.

44. *Pazy A.* Asymptotic expansion of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rat. Mech. Anal., 1967, vol. 24, pp. 193–218.
45. *Vladimirov V.S.* Generalized Functions in Mathematical Physics. Moscow: Mir, 1979.
46. *Višik M.I., Ljusternik L.A.* Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter // Amer. Math. Soc. Transl., 1962, vol. 20, pp. 239–364.
47. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic analysis of fields in multi-structures. Oxford: Clarendon, 1999.
48. *Nazarov S.A.* Breakdown of cycles and the possibility of opening spectral gaps in a square lattice of thin acoustic waveguides // Math. Izv., 2018, vol. 82, no. 6, pp. 1148–1195.
49. *Nazarov S.A.* Asymptotic expansions of eigenvalues in the continuous spectrum of a regularly perturbed quantum waveguide // Theor.&Math. Phys., 2011, vol. 167, no. 2, pp. 606–627.
50. *Nazarov S.A.* Enforced stability of a simple eigenvalue in the continuous spectrum // Funct. Anal. Appl., 2013, vol. 475, no. 3, pp. 195–209.
51. *Parton V.Z., Perlin P.I.* Mathematical Methods of the Theory of Elasticity. Nauka, Moscow 1981, 688 pp.