
УДК 532.49

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНЕ, СООБЩАЮЩЕЙСЯ С ПЛАСТОМ, ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ ГРП

© 2022 г. Р. А. Башмаков^{1,2,*}, Д. А. Насырова^{1,3,**}, В. Ш. Шагапов^{1,***}

¹ Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия

² Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

³ Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

*e-mail: Bashmakov_Rustem@mail.ru

**e-mail: dinasyrova@mail.ru

***e-mail: Shagapov@rambler.ru

Поступила в редакцию 02.06.2021 г.

После доработки 12.11.2021 г.

Принята к публикации 25.11.2021 г.

В работе проводится анализ собственных колебаний столба жидкости в нефтяной скважине, инициируемых гидроударом с учетом фильтрационных течений вблизи забоя скважины и по вертикальной трещине ГРП. Изучены зависимости частоты, коэффициента затухания собственных колебаний давления от значений проницаемости пласта и трещины ГРП. Проведено сравнение частотных характеристик, коэффициента затухания, декремента затухания при наличии и отсутствии трещины ГРП. Показана возможность практического применения полученных результатов.

Ключевые слова: собственные колебания жидкости, гидроразрыв пласта, нефтяная скважина, частота колебаний, гидроудар, стоячие волны

DOI: 10.31857/S0032823522010027

1. Введение. Одной из кардинальных мер, приводящих к существенному изменению дебита скважины, является гидроразрыв пласта (ГРП) [1]. При этом возникают задачи определения качества гидроразрыва, геометрии трещин, изменения коллекторских характеристик.

Представляется, что эффективным и удобным с точки зрения технической реализации способом определения качества перфорации, параметров трещины ГРП является способ, основанный на возбуждении собственных колебаний столба жидкости в скважине. При этом период колебаний, а также, особенно, интенсивность затухания колебаний будут определяться не только протяженностью столба жидкости в скважине, её диаметром и реологическими свойствами жидкости, но и коллекторскими характеристиками призабойной зоны пласта (в частности, коэффициентами проницаемости, качеством перфорации скважин и свойствами образованных трещин ГРП). Колебания могут инициироваться резким открытием или закрытием скважины (гидроударом). При этом время (период инициирования), должно быть сопоставимо со временем прохождения акустическим сигналом расстояния порядка протяженности столба жидкости в скважине. Если этот промежуток будет короче, чем время пробега акустического сигнала, то образуется одиночный импульсный сигнал, распространяющийся в скважине с отражением на ее границах.

Волны давления, возникающие при гидроударе, в научной литературе рассматриваются в основном с негативной точки зрения: изучаются разрушительные последствия и способы их предотвращения.

В работе [2] предложен метод гидравлического импедансного тестирования, идея которого заключается в интерпретации фактического изменения гидравлического сопротивления между стволом скважины и открытой трещиной ГРП. Для этого искусственно создается импульс давления в скважину и анализируется отраженный сигнал.

Волны Стоунли, излучаемые источником, и воспринимаемые приемником, расположенными в скважине рассматриваются в статье [3]. Импульс передается по трубе и обсадной колонне. Ствол скважины моделируется, как линия электропередачи с потерями, трещина моделируется, как сопротивление и емкость.

В [4] для моделирования процесса изменения давления в результате гидроудара объединили уравнение неразрывности и сохранения импульса в стволе скважины с представлением трещины ГРП в виде цепи с сопротивлением, емкостью и индуктивностью (контуром). Изменение емкости изменяет период колебаний, сопротивление влияет на амплитуду и скорость затухания колебаний, индуктивность также влияет на период. В этой работе также выведены уравнения, связывающие эти параметры с размерами трещины и ее коллекторскими характеристиками.

В работе [5] приведены результаты полевых измерений изменения давления в различных точках скважины при резком изменении скорости потока жидкости. Скважинные датчики фиксировали изменение давления в зависимости от времени со скоростью 100 проб в секунду. При этом вид полученных осциллограмм свидетельствует, что они соответствуют собственным колебаниям столба жидкости. В работе [6] предлагается математическая модель, описывающая фазовые и амплитудные характеристики волнового пакета, проведено сравнение численных расчетов, полученных на основе модели с данными работы [5]. Граничные условия на нижнем конце скважины учитывают либо ламинарный, либо турбулентный режим течения, связанный с трением в перфорационных каналах.

Впервые в работе [7] изучены собственные затухающие колебания столба жидкости в скважине при более полном учете фильтрационных течений в призабойной зоне, являющейся однородной пористой, проницаемой средой. Настоящая статья является продолжением и обобщением работы [7] при наличии трещины ГРП. Таким образом, здесь проводится анализ собственных колебаний столба жидкости с учетом фильтрационных течений вблизи забоя скважины и по вертикальной трещине, полученной путем гидроразрыва пласта. Изучены зависимости частоты, коэффициента затухания колебаний давления от значений проницаемости пласта и трещины ГРП. Установлено, что трещина в пласте кардинально меняет параметры собственных колебаний.

В работе [8], на основе обобщения квазиодномерной модели (см. [9]), Перкинса–Керна–Нордгрена (РКН – модели [10, 11]), рассматриваются колебания давления на устье и забое скважины при прекращении подачи жидкости, приведены также промысловые данные показаний манометров реальной скважины длиной 2600 м. В [8] фиксируемые колебания давления объясняются собственными колебаниями трещины ГРП.

В настоящей же работе рассматриваются собственные колебания столба жидкости в скважине. При этом полагается, что амплитуда колебаний достаточно слабая, поэтому процессы, возникающие в системе “скважина–пласт” не влияют на фильтрационные характеристики в призабойной зоне. Отметим также, что сравнение и анализ теоретических результатов работы [8] с опытными данными показывают удивительно хорошее их совпадение в плане определения частот колебаний давления, а также коэффициентов затухания этих колебаний. В разделе 4 будут приведены наши оценки параметров колебаний, показывающие соответствие наблюдаемых колебаний собственным колебаниям столба жидкости в скважине, описываемым в настоящей рабо-

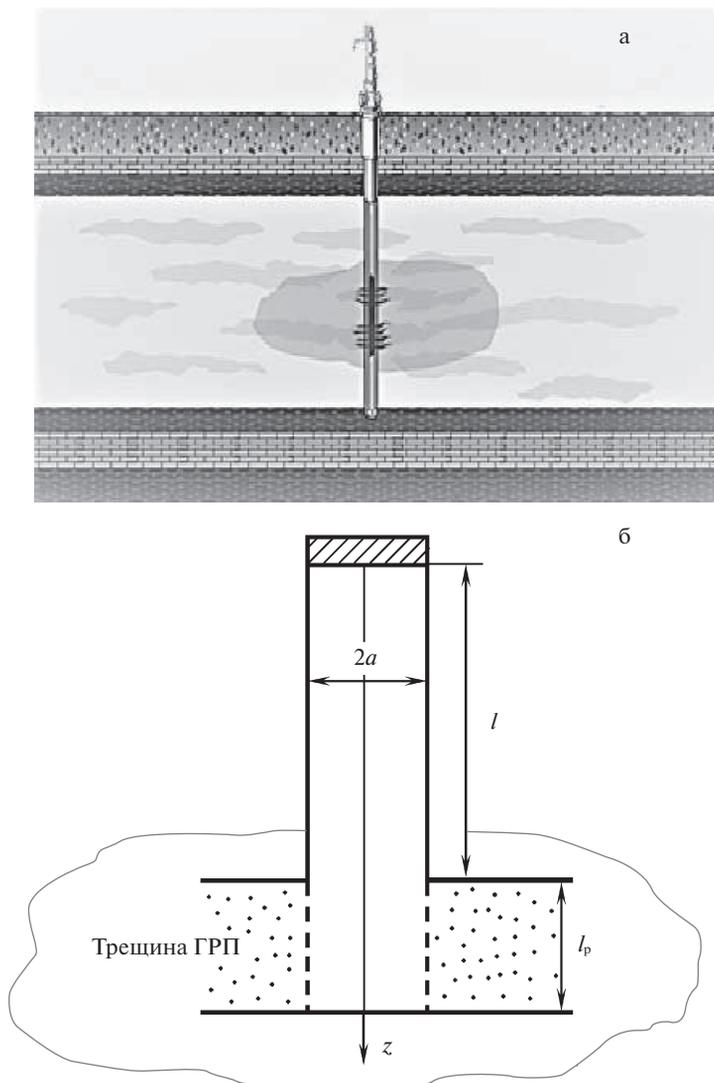


Рис. 1. Схема скважины с трещиной ГРП.

те. Роль трещин ГРП проявляется лишь в обеспечении хорошей фильтрационной проводимости.

2. Основные уравнения. Рассмотрим систему “вертикальная скважина–трещина ГРП–пласт” (рис. 1). Предполагается, что трещина вертикальная, симметричная, скважина, имеющая радиус a через перфорированный участок длины l_p сообщается с трещиной и, окружающим трещину и скважину, пористым, проницаемым пластом. Будем учитывать радиальное течение между скважиной и пластом и течение по трещине, а также линейное течение между трещиной и пластом (см. рис. 1б).

Примем, что в исходном состоянии жидкость, находящаяся в системе “скважина–пласт” находится в покое, т.е. течение в вертикальной скважине и горизонтальном

пласте отсутствует. Кроме того, протяженность столба жидкости в закрытом участке скважины l значительно превышает открытый ее участок протяженностью l_p ($l \gg l_p$).

Ось Oz направим вертикально вниз, начало координат поместим на верхнюю границу столба жидкости.

Запишем для жидкости, движущейся в скважине уравнения сохранения масс и импульсов для возмущений плотности ρ , давления P и скорости w в линеаризованном приближении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} &= -\frac{2\sigma}{a} \quad (0 < z < l) \\ \sigma &= \mu \int_{-\infty}^t \frac{\partial w / \partial t}{\sqrt{\pi \nu (t - \tau)}} d\tau, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad \rho = \frac{P}{C^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь C – скорость звука в жидкости, σ – касательное напряжение в жидкости на поверхности стенки скважины [12–14], μ и ν – динамическая и кинематическая вязкости жидкости. Принятое выражение для касательных напряжений означает, что при рассматривании собственные колебания столба жидкости в скважине влияние вязкости проявляется лишь в тонком слое вблизи стенки скважины, значительно меньшем, чем радиус скважины. Оценка толщины этого слоя может быть определена, как $\sqrt{\nu T}$, где T – период колебаний и примерно составляет для воды 1 мм, для нефти – 3 мм.

Выражение для силы вязкого трения, принятого в виде (2.1) обычно называют силой Бассе [12]. Эта сила играет важную роль в акустических задачах для газовзвесей при высоких частотах, когда вязкость проявляется в тонких слоях вблизи твердых частиц. Здесь отметим одно примечательное свойство этой силы: в некоторых промежутках времени при колебательных движениях частиц относительно несущей фазы, эта сила может быть сонаправлена относительно скорости, т.е. колебания относительной скорости силы вязкого течения происходят не в одной фазе. Аналогичный эффект имеет место при колебаниях газового пузырька в жидкости. В этом случае за счет появления температурных “ям” в газе вблизи поверхности пузырька тепловой поток может быть направлен внутрь пузырька, хотя средняя температура газа будет выше температуры окружающей жидкости [12, 13].

Зависимость возмущений плотности и давления от значений при гидростатическом распределении принята в акустическом приближении. Нижний индекс (0) означает, что значения параметра отнесены к невозмущённому состоянию.

Будем полагать, что на верхней границе течение столба жидкости ограничено неподвижным поршнем. Тогда граничное условие при $z = 0$ может быть записано в виде

$$w(t, 0) = 0 \quad (2.2)$$

Поскольку протяженность l_p открытого участка скважины $l < z < l + l_p$ значительно меньше протяженности закрытого участка $0 < z < l$, то можем принять, что возмущение давления в открытом участке однородное. Поэтому в качестве граничного условия для системы (2.1) при $z = l$ примем

$$P(l, t) = P^{(l)}(t) \quad (2.3)$$

При этом $P^{(l)}(t)$ само является неизвестной функцией, следовательно, выражение (2.3) не замыкает систему граничных условий для (2.1).

Еще одно граничное условие следует из закона сохранения массы на открытом участке. Пусть $w(l, t) = w^{(l)}(t)$ при $z = l$. Тогда, с учетом однородности возмущений

давления в призабойной зоне скважины, можем записать следующее уравнение, следующее из закона сохранения масс:

$$\pi a^2 l_p \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = \pi a^2 \rho_0 w^{(l)} - 2\pi a l_p \rho_0 u_{pa} - 2d_f l_p \rho_0 u_{f0} \quad (2.4)$$

Здесь a – радиус скважины, u_{pa} , u_{f0} – скорости фильтрации жидкости в окружающую проницаемую горную породу через стенку открытого участка скважины и в трещину, шириной d_f .

Для определения значений u_{pa} и u_{f0} , в свою очередь, необходимо рассмотреть внешнюю, от открытого участка скважины, фильтрационную задачу в пласте и в трещине. Поэтому основное уравнение упругого режима фильтрации для давления P_p в пласте вокруг скважины запишется, как

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \varkappa_p \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_p}{\partial r} \right), \quad \varkappa_p = \frac{k_p \rho_0 C^2}{m_p \mu} \quad (l < z < l + l_p, \quad a < r < \infty) \quad (2.5)$$

где r – расстояние от оси скважины, k_p – проницаемость пласта. При граничных условиях на границе “скважина–пласт” и на большом удалении от скважины

$$P_p|_{r=a} = P^{(l)}(t) \quad \text{и} \quad P_p|_{r=\infty} = 0 \quad (2.6)$$

Тогда скорость фильтрации через стенку скважины будет определяться, согласно закону Дарси, как

$$u_{pa} = u_p|_{r=a} = -\frac{k_p}{\mu} \left(\frac{\partial P_p}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \quad (2.7)$$

Фильтрация флюида по трещине и в пласте описывается системой уравнений (см. [15–17]):

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \varkappa_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + 2 \frac{m_p}{m_f} \frac{\varkappa_p}{d_f} \left(\frac{\partial P_p}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (0 < x < \infty) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \varkappa_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2} \quad (0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty) \quad (2.9)$$

Здесь $P_f = P_f(x, t)$ – давление в трещине, $P_p = P_p(x, y, t)$ – давление в пласте (координата y отсчитывается от стенки трещины), $\varkappa_i = \frac{k_i \rho_0 C^2}{m_i \mu}$ ($i = f, p$) – коэффициент

пьезопроводности. В уравнении (2.8) второе слагаемое в правой части отвечает за фильтрацию флюида между стенками трещины и пластом. В работе [18] показано, что система уравнений (2.8)–(2.9) может быть сведена к интегро-дифференциальному уравнению, описывающему динамику давления в трещине:

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \varkappa_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} - 2 \frac{m_p}{m_f} \frac{\varkappa_p}{d_f} \int_{-\infty}^t \frac{\partial P_f}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \varkappa_p (t - \tau)}} \quad (2.10)$$

Кроме того, в этой же работе показано, если характерные времена удовлетворяют условию $\tilde{t} \gg t_*$ $\left(t_* = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{m_f}{m_p} \right)^2 \frac{d_f^2}{\varkappa_p} \right)$, то слагаемое в левой части (2.10), отвечающее за упругость флюида в трещине несущественно. В рассматриваемой задаче харак-

терным временем является период собственных колебаний, и оно составляет обычно несколько секунд, и указанное условие для времен выполняется.

Поэтому в дальнейшем вместо (2.10) будем пользоваться упрощенным уравнением

$$\frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} = A_f \int_{-\infty}^t \frac{\partial P_f}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}, \quad \left(A_f = \frac{2}{d_f} \frac{m_p}{m_f} \sqrt{\frac{\alpha_p}{\alpha_f}} \right) \quad (2.11)$$

Согласно закону Дарси имеем

$$u_{f0} = -\frac{k_f}{\mu} \left(\frac{\partial P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} \quad (2.12)$$

С учетом (2.7), (2.12) и уравнения состояния жидкости (2.1) из (2.4) следует

$$\frac{1}{\rho_0 C^2} \frac{\partial P^{(l)}}{\partial t} = \frac{w^{(l)}}{l_p} + \frac{2k_p}{a\mu} \left(\frac{\partial P_p}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} + \frac{2d_f k_f}{\pi a^2 \mu} \left(\frac{\partial P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}$$

3. Решение в виде стоячих волн. Рассмотрим, в рамках выше представленных уравнений, задачу о собственных затухающих колебаниях столба жидкости в скважине. Будем искать решение уравнений (2.1) в комплексном виде:

$$P = A^{(P)}(z)e^{i\omega t}, \quad w = A^{(w)}e^{i\omega t}, \quad (3.1)$$

где $\omega = \Omega + i\delta$ комплексная частота собственных колебаний, причем действительная часть $\text{Re } \omega = \Omega$ отвечает за период колебаний $T = 2\pi/\Omega$, а мнимая часть $\text{Im } \omega = \delta$ – за интенсивность затухания.

Подставляя (3.1) в систему (2.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{C^2} A^{(p)} + \rho_0 \frac{d}{dz} A^{(w)} &= 0 \\ \rho_0 i\omega A^{(w)} + \frac{d}{dz} A^{(p)} &= -2 \frac{\mu i\omega A^{(w)} e^{-i\omega t}}{a\sqrt{\pi\nu}} \int_{-\infty}^t \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вычисление интеграла $\int_{-\infty}^t \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$ после очевидных замен приводит к интегралам Френеля (см. [19])

$$\int_{-\infty}^t \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \frac{2e^{i\omega t}}{\sqrt{\omega}} \int_0^\infty (\cos \xi^2 - i \sin \xi^2) d\xi = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - i)$$

Таким образом, из (3.2) приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{i\omega}{\rho_0 C^2} A^{(P)} + \frac{d}{dz} A^{(w)} = 0, \quad \frac{1}{\rho_0 i\omega(1+2/y)} \frac{d}{dz} A^{(P)} + A^{(w)} = 0, \quad y = (i\omega a^2/\nu)^{1/2} \quad (3.3)$$

Из уравнений (3.2), исключая $A^{(w)}$, получим

$$\frac{d^2 A^{(P)}}{dz^2} + K^2 A^{(P)} = 0 \quad (K^2 = (1+2/y)\omega^2/C^2)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$A^{(P)} = c_1 \cos(Kz) + c_2 \sin(Kz) \quad (3.4)$$

Из граничного условия (2.2) $w = 0$ при $z = 0$, следует $A^{(w)}(0) = 0$. Поэтому постоянная c_2 должна равняться нулю ($c_2 = 0$). Следовательно, для $A^{(P)}$ и $A^{(w)}$ (с учетом второго уравнения из (3.3) будем иметь

$$A^{(P)} = c_1 \cos(Kz), \quad A^{(w)} = i \frac{c_1}{\rho_0} \frac{K \sin(Kz)}{\omega(1 + 2/y)}$$

При $z = l$ для закона изменения $P^{(l)}$ и $w^{(l)}$ находим

$$P^{(l)} = P|_{z=l} = c_1 \cos(Kl) \quad \text{и} \quad w^{(l)} = w|_{z=l} = -i \frac{c_1}{\rho_0} \frac{K \sin(Kl)}{\omega(1 + 2/y)} e^{i\omega t} \quad (3.5)$$

В призабойной зоне должно удовлетворяться граничное условие (2.6). Для нахождения градиента давления на стенке открытого участка скважины найдем решение уравнений (2.5) и (2.8), соответствующее граничным условиям

$$P_p|_{r=a} = P_f|_{x=0} = P^{(l)} = c_1 \cos(Kl) e^{i\omega t}, \quad P_p \rightarrow 0, \quad P_f \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad x \rightarrow \infty$$

Решение (2.5) ищем в виде

$$P_p = A_p^{(P)}(r) e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad P_f = A_f^{(P)}(x) e^{i\omega t} \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (2.5) и (2.8), получим

$$q^2 A^{(P)}(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{d}{dr} A^{(P)}(r) \right), \quad \frac{d^2 A_f^{(P)}}{dx^2} + K_f^2 A_f^{(P)} = 0, \quad (3.7)$$

здесь $q = \sqrt{i\omega/\alpha_p}$, $K_f^2 = A_f \sqrt{i\omega}$.

Отметим, что из представленного выражения для комплексного волнового вектора K_f следует выбирать значение, находящееся в четвертом квадранте ($K_f = k_f - i\beta_f$, $\beta_f > 0$).

Решение уравнения (3.7), удовлетворяющее граничным условиям (3.5), запишется как (см. [20])

$$A^{(P)}(r) = A^{(P)}(l) \frac{K_0(rq)}{K_0(aq)}, \quad A_f^{(P)} = A_p^{(P)} e^{-iK_f x} \quad (3.8)$$

Здесь $K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} d\xi$ – функция Макдональда нулевого порядка, $K_f = A_f \sqrt{i\omega}$.

Подставляя выражения (3.6) в (2.11) с учетом (3.7), получим следующее характеристическое уравнение для определения ω в виде

$$\operatorname{tg}(Kl) = \left(-\frac{2m_p}{z_p} \frac{K_1(z_p)}{K_0(z_p)} - \frac{2m_f d_f i K_f}{\pi z_f^2} - 1 \right) Kl_p, \quad q = \sqrt{i\omega/\alpha_p}$$

$$z_p = a\sqrt{i\omega/\alpha_p}, \quad z_f = a\sqrt{i\omega/\alpha_f}$$

Здесь $K_0(z)$ и $K_1(z)$ – функции Макдональда нулевого и первого порядка [20].

4. Собственные частоты для идеального резонатора. Будем пренебрегать проявлениями вязкости в скважине ($\nu = 0$). Относительно призабойной зоны рассмотрим два предельных случая.

Первый, когда предполагается, что протяженность открытого участка скважины равна нулю ($l_p = 0$), второй, когда считаем, что пласт имеет бесконечную проницае-

мость ($k_p \rightarrow \infty$, $\varkappa_p \rightarrow \infty$). В этих двух случаях мы от уравнения (3.7), соответственно, придем к уравнениям

$$\operatorname{tg}(\omega l/C) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}(\omega l/C) = 0 \quad (4.1)$$

Отсюда для собственных частот будем иметь

$$\begin{aligned} \Omega_{(n)}^{(0)} &= \frac{\pi n C}{l}, \quad \delta_{(n)}^{(0)} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \Omega_{(n)}^{(0)} &= \frac{\pi C}{2l} + \frac{\pi n C}{l}, \quad \delta_{(n)}^{(0)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.2)$$

соответственно. Следовательно, для первой гармоники (для самых низких собственных частот) в первом и втором случаях получим

$$\begin{aligned} \Omega_{(1)} &= \frac{\pi C}{l}, \quad k_{(1)} = \frac{\pi}{l} \\ \Omega_{(0)} &= \frac{\pi C}{2l}, \quad k_{(0)} = \frac{\pi}{2l} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечное количество собственных частот. Наибольший интерес представляют самые низкие частоты, поскольку колебания с этими частотами являются наиболее “долгоживущими”. Причем, они различаются ровно в два раза.

Решения вида (3.1) для распределения давления и скорости в скважине для двух рассматриваемых случаев запишутся как

$$\begin{aligned} P &= \tilde{C}_1 \cos \frac{\pi z}{l} \cos \frac{\pi C t}{l}, \quad w = -\frac{\tilde{C}_1}{C} \sin \frac{\pi z}{l} \sin \frac{\pi C t}{l} \\ P &= \tilde{C}_1 \cos \frac{\pi z}{2l} \cos \frac{\pi C t}{2l}, \quad w = -\frac{\tilde{C}_1}{C} \sin \frac{\pi z}{2l} \sin \frac{\pi C t}{2l} \end{aligned}$$

Как видно из этих решений, они определяются с точностью до произвольной постоянной. В дальнейшем эту постоянную примем равной единице. Это будет означать, что распределение давления нормировано относительно значения при $z = 0$.

5. Численные расчеты. Решение для закона изменения давления в скважине согласно (3.1) и (3.4) определено с точностью до произвольного постоянного множителя c_1 . В расчетах примем, что $c_1 = 1$, т.е. нормируем распределение давления относительно значения при $z = 0$ (вместо P будем использовать нормированное значение $P/A^{(P)}(0)$), тогда

$$P = \cos(Kz)e^{i\omega t} \quad (5.1)$$

Здесь K – волновое число, которое определяется через комплексную частоту: $K = k + i\beta$ ($k = \operatorname{Re} K$, $\beta = \operatorname{Im} K$). Тогда действительную часть решения P из (5.1) можно записать, как

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(P) &= A(z)e^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi) \\ A(z) &= \sqrt{\cos^2(kz) \operatorname{ch}^2(\beta z) + \sin^2(kz) \operatorname{sh}^2(\beta z)} \\ \operatorname{tg} \varphi &= -\operatorname{tg}(kz) \operatorname{th}(\beta z) \end{aligned}$$

В расчетах в качестве жидкости принята вода, имеющая следующие физические параметры: $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $C = 1.5 \times 10^3$ м/с, $\mu = 10^{-3}$ Па с. Для скважины, трещины и пласта принято: $l = 1500$ м, $m_f = 10^{-1}$, $d_f = 3 \times 10^{-3}$ м, $k_f = 10^{-10}$ м². Пунктирные ли-

нии соответствуют случаям, когда трещина ГРП отсутствует и, следовательно, в призабойной зоне пласта рассматривается только радиальное фильтрационное течение.

На рис. 2а—в иллюстрируются зависимости собственной частоты Ω , коэффициента затухания δ , а также декремента затухания, определяемого, как $\Delta = (2\pi/\Omega)\delta$ от проницаемости пласта. Линии 1, 2 соответствуют значениям длины открытого участка скважины $l_p = 10$ и 40 метров, соответственно. На этом и последующих рисунках пунктирной линией приведены кривые, соответствующие случаю отсутствия трещины ГРП, т.е. жидкость от скважины растекается радиально.

Видно, что с ростом проницаемости пласта в рассматриваемом диапазоне частота собственных колебаний монотонно снижается между значениями, определяемыми формулами (4.1). Наиболее нетривиальным эффектом является немонотонная зависимость коэффициента затухания δ и декремента затухания Δ от проницаемости пласта. Причем, перескок к низким частотам происходит для значений параметров пласта и трещины, при которых реализуется максимальное значение коэффициента (а также декремента) затухания. Кроме того, затухание колебаний сильно увеличивается при наличии трещины.

На рис. 3 показано распределение амплитуд возмущений движения $A(z)$ от глубины z в скважине при значениях коэффициента проницаемости $k_p = 10^{-14}, 10^{-13}, 10^{-12}$ м² и длине открытого участка скважины $l_p = 40$ м. При наличии трещины ГРП наиболее сильные изменения амплитуды колебаний заметны на датчике, расположенном на глубине 750 м (середина скважины) для низкопроницаемых пластов. При этом, для высокопроницаемых пластов изменения в показаниях датчиков при наличии и отсутствии трещины практически незаметны (кривые 3 и 3' почти совпадают).

На рис. 4 иллюстрируется распределение сдвига по фазе φ в скважине в зависимости от глубины z при различных значениях проницаемости. При малых значениях проницаемости с ростом глубины наблюдается сдвиг фаз колебаний в диапазоне от 0 до π . При больших значениях проницаемости наблюдаем сдвиг фаз в диапазоне от 0 до $\pi/2$.

На рис. 5а—в даны осциллограммы для мысленных датчиков D_1, D_2 и D_3 , расположенных в точках с координатами $z = 0, 750$ и 1500 м. Кривые, обозначенные номерами 1, 2, 3 соответствуют значениям коэффициента проницаемости $k_p = 10^{-14}, 10^{-12}$ и 10^{-10} м². При увеличении проницаемости частота снижается и наблюдается более интенсивное затухание колебаний.

На рис. 6 приводится распределение давления вдоль скважины в моменты времени $\Omega t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ и 4π . Фрагменты (а—в) соответствуют значениям коэффициента проницаемости $k_p = 10^{-14}, 10^{-12}$ и 10^{-10} м². В случае $k_p = 10^{-10}$ м² наличие трещины ГРП практически не изменяет картину изменения давления в зависимости от глубины.

На рис. 7 показана зависимость собственной частоты колебаний (а), коэффициента затухания (б) от ширины трещины. Длина открытого участка скважины принята равной 20 м. Из графиков следует, что частота колебаний уменьшается при увеличении ширины трещины. Более нетривиальная картина наблюдается с коэффициентом затухания колебаний: для низкопроницаемых пластов ($k_p = 10^{-14}$ м²) с ростом ширины трещины увеличивается значение коэффициента затухания, при средних значениях проницаемости ($k_p = 10^{-12}$ м²) с ростом ширины трещины коэффициент затухания уменьшается, для высокопроницаемых пластов ширина трещины почти не влияет на частоту колебаний и коэффициент затухания, коэффициент затухания принимает в этом случае очень маленькие значения.

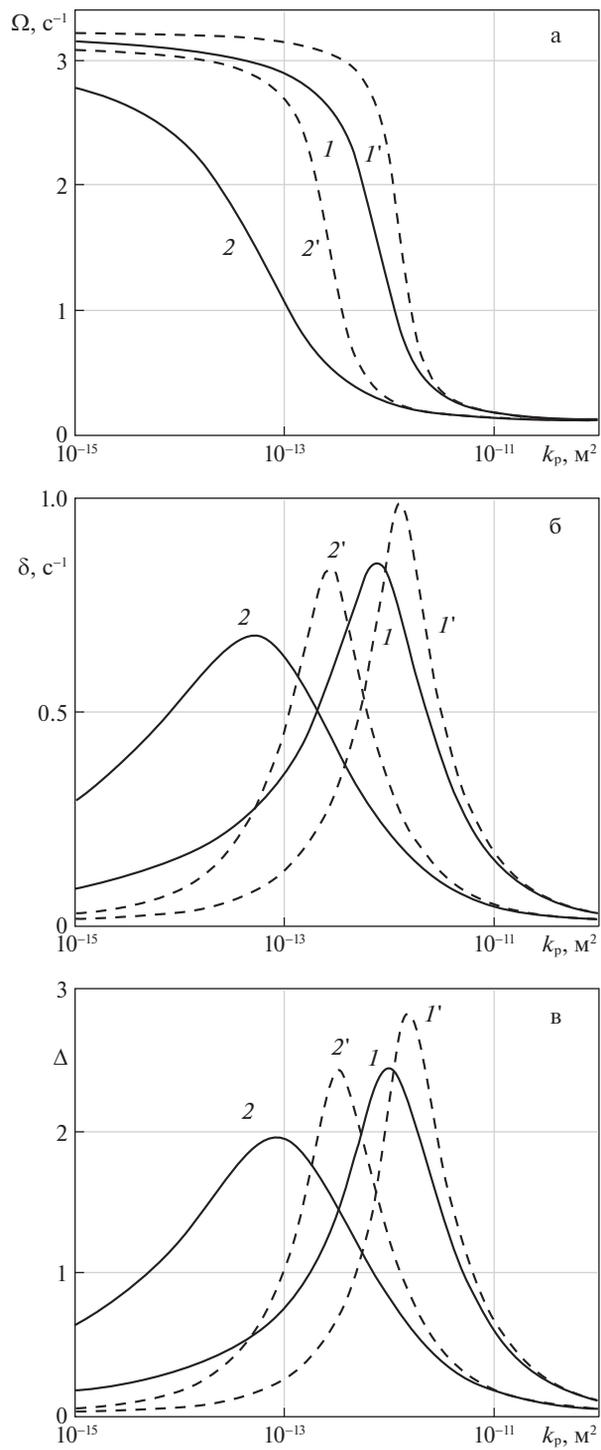


Рис. 2.

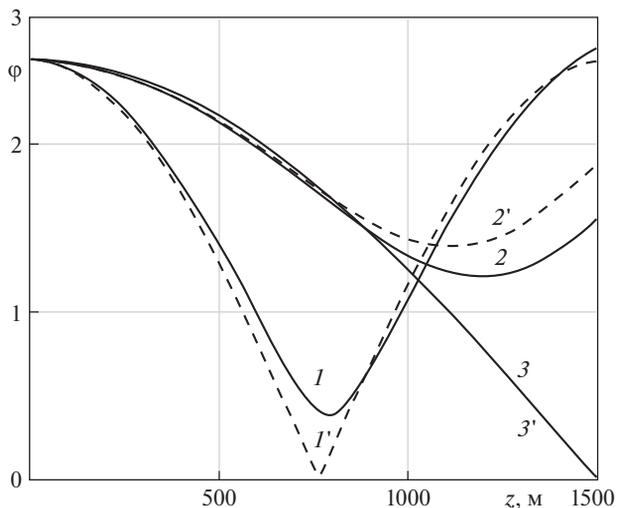


Рис. 3.

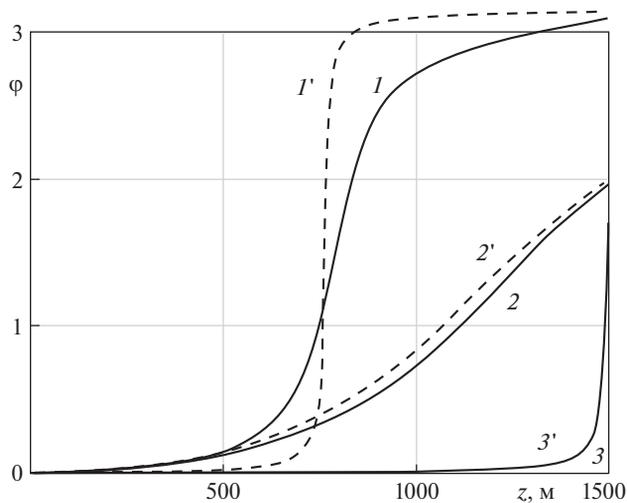


Рис. 4.

Получим некоторые оценки, следующие из результатов нашей работы, и сравним их с опытными данными [8]. Из этой работы были взяты следующие значения параметров: длина скважины $l = 2600$ м, радиус скважины $a = 0.035$ м, плотность жидкости $\rho_0 = 1000$ кг/м³, скорость звука $C = 1500$ м/с, вязкость $\nu = 10^{-6}$ м²/с. По формулам [7] можно приближенно найти частоту колебаний $\Omega = \frac{\pi C}{2l}$ и коэффициент затухания $\delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi \nu C}{l a^2}}$. Получаемые отсюда значения периода колебаний $T = 6.9$ с и времени

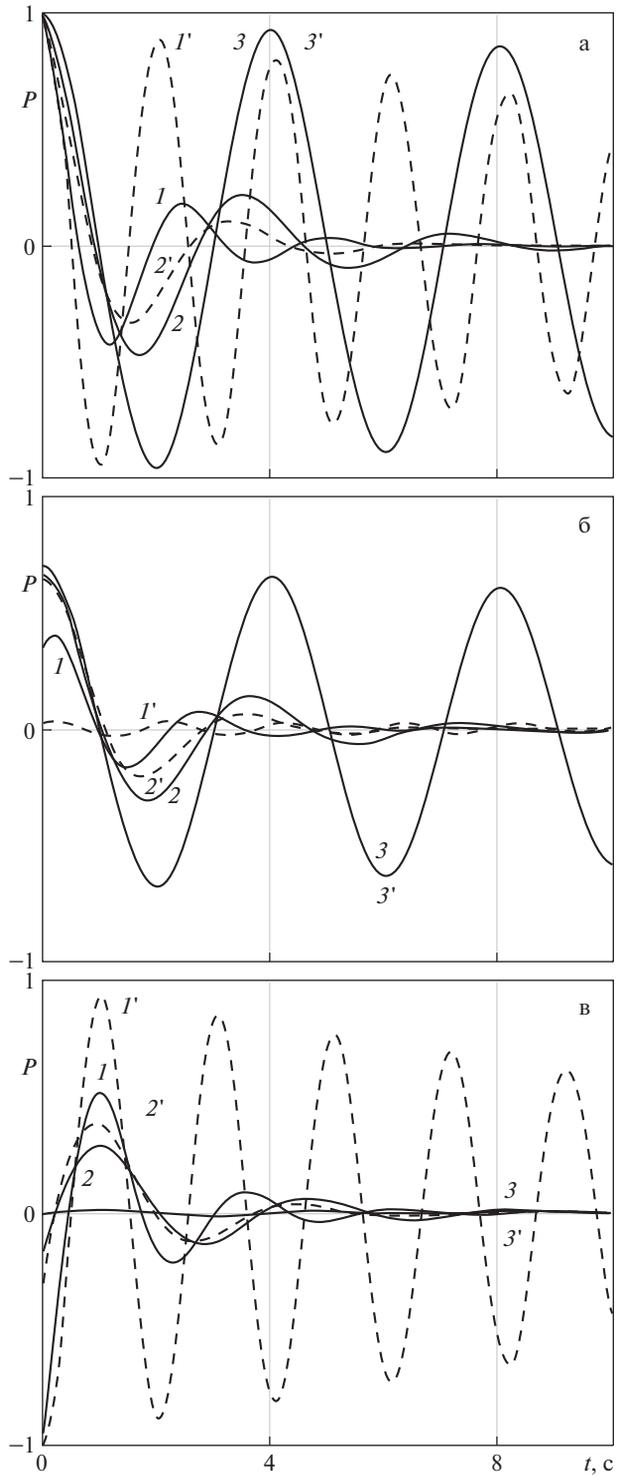


Рис. 5.

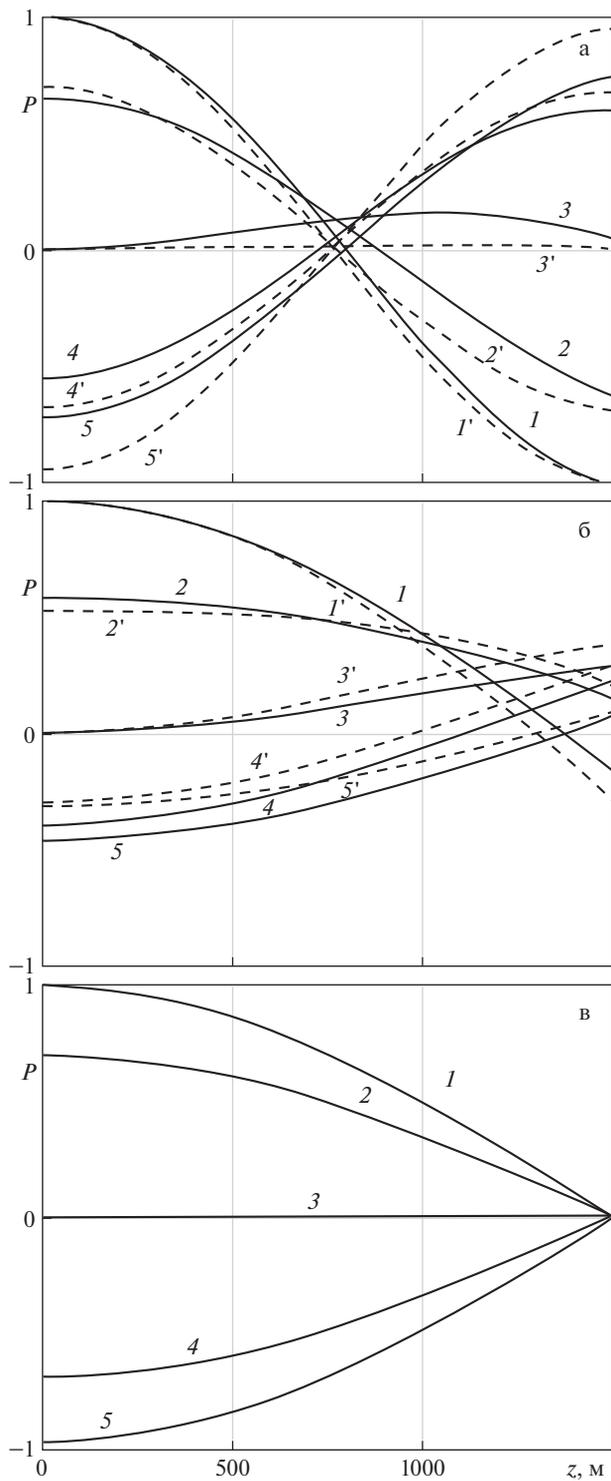


Рис. 6.

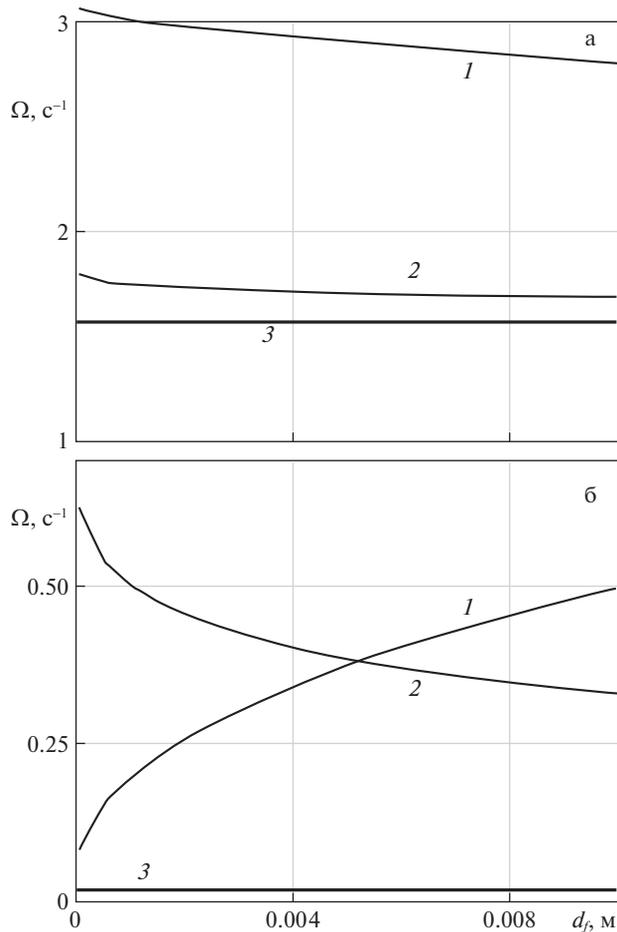


Рис. 7.

затухания $1/\delta = 52$ с совпадают с опытными значениями [8]. По нашему мнению, данные, зафиксированные на реальной скважине [8], скорее всего, соответствуют собственным колебаниям столба жидкости в скважине, трещина ГРП в этом случае дает условие высокой проводимости на забое скважины.

Заключение. Таким образом, по собственным колебаниям жидкости внутри скважины можно судить о качестве открытого участка скважины, геометрических характеристиках скважины, коллекторских свойствах призабойной зоны, сопоставляя наблюдаемые параметры изменения давления в различных точках скважины (основные частоты, коэффициент затухания, сдвиг по фазе, амплитуды) с расчетными значениями, получаемыми по рассматриваемой модели. Практическое применение полученных результатов возможно при выделении сигнала, соответствующего собственным колебаниям системы, из общего нестационарного волнового пакета. В [21] описана специализированная система сбора данных, позволяющая минимизировать шум и снимать показания с частотой 50 кГц. Для анализа колебаний столба жидкости в скважине показания снимаются с частотой 100–200 значений в секунду.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Экономидес М., Олини Р., Валько П.* Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике. М.: Ижевск: Ин-т компьютер. технол., 2007. 237 с.
2. *Holzhausen G.R., Gooch R.P.* Impedance of hydraulic fractures: its measurement and use for estimating fracture closure pressure and dimensions // SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symp., Denver, Colorado, 1985. Paper no. SPE-SPE-13892-MS.
3. *Patzek T., De Lossy A.* Transmission line model of hydrofractured well dynamics // J. Petrol. Sci. & Engng. 2000. V. 25. № 1–2. P. 59–77.
4. *Carey M., Mondal S., Sharma M.* Analysis of water hammer signatures for fracture diagnostics // SPE Annu. Techn. Conf. & Exh. Texas, USA, Sept. 28–30, 2015. Paper No. SPE-174866-MS.
5. *Wang X., Hovem K., Moos D., Quan Y.* Water hammer effects on water injection well performance and longevity // SPE Int. Symp. & Exh. on Formation Damage Control. 2008. SPE 2282.
6. *Ляпидевский В.Ю., Неверов В.В., Кривцов А.М.* Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. № 15. С. 1687–1696.
7. *Шагапов В.Ш., Башмаков Р.А., Рафикова Г.Р., Мамаева З.З.* Затухающие собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом // ПМТФ. 2020. Т. 61. № 4. С. 5–14.
8. *Байков В.А., Булгакова Г.Т., Ильясов А.М., Кашанов Д.В.* К оценке геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 5. С. 64–75.
9. *Ильясов А.М., Булгакова Г.Т.* Квазидномерная модель гиперболического типа гидроразрыва пласта // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 4. С. 739–754.
10. *Perkins T.K., Kern L.R.* Width of hydraulic fractures // J. Petrol. Techn. SPE-89-PA. 1961. V. 13 (09). P. 937–949.
11. *Nordgren R.P.* Propagation of a vertical hydraulic fracture // Soc. Petrol. Eng. J. SPE-3009-PA. 1972. V. 12 (04). P. 306–314.
12. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. I. М.: Наука, 1987. 464 с.
13. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. II. М.: Наука, 1987. 360 с.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
15. *Шагапов В.Ш., Нагаева З.М.* К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 5. С. 121–130.
16. *Cinco-Ley H.* Evaluation of hydraulic fracturing by transient pressure analysis methods // SPE 10043 Petrol. Exh. & Techn. Symp., Beijing China, Mar 18–26, 1982. SPE 10043-MS
17. *Хабидуллин И.Л., Хисамов А.А.* Моделирование нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва // Вестн. Башкир. унив. 2017. Т. 22. № 2. С. 309–314.
18. *Нагаева З.М., Шагапов В.Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // ПММ. 2017. Т. 81. № 3. С. 319–329.
19. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2002. 749 с.
20. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
21. *Bogdan A.V., Keilers A., Oussoltsev D., Lecerf B.* Real-time interpretation of leak isolation with degradable diverter using high frequency pressure monitoring // Schlumberger. SPE Asia Pacific Oil & Gas Conf. & Exh. Perth, Australia, Oct. 25–27, 2016. SPE-182451-MS.

**Natural Vibrations of Fluid in a Well Connected to the Formation,
in the Presence of a Hydraulic Fracture**

V. Sh. Shagapov^{a,#}, R. A. Bashmakov^{a,b,##}, and D. A. Nasyrova^{a,c,###}

^a *Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa FRC RAS, Ufa, Russia*

^b *Bashkir State University, Ufa, Russia*

^c *Kazan Federal University, Kazan, Russia*

[#] *e-mail: Shagapov@rambler.ru*

^{##} *e-mail: Bashmakov_Rustem@mail.ru*

^{###} *e-mail: dinasyrova@mail.ru*

The paper analyzes the natural fluctuations of the liquid column in the oil well, initiated by water hammer, taking into account filtration currents near the bottom of the well and along the vertical fracture of hydraulic fracturing. The dependences of the frequency, the damping coefficient of natural pressure oscillations on the values of formation permeability and hydraulic fracturing fracture are studied. Comparison of the frequency characteristics, damping coefficient, decrement of damping in the presence and absence of the fracture crack is carried out. The possibility of practical application of the obtained results is shown.

Keywords: natural fluid oscillations, hydraulic fracturing, oil well, oscillation frequency, water hammer, standing waves

REFERENCES

1. *Economides M., Oligney R., Valkó P.* Unified Fracture Design. Alvin: Orsa Press, 2004.
2. *Holzhausen G.R., Gooch R.P.* Impedance of hydraulic fractures: its measurement and use for estimating fracture closure pressure and dimensions // SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symp., Denver, Colorado, 1985. Paper no. SPE-SPE-13892-MS.
3. *Patzek T., De Lossy A.* Transmission line model of hydrofractured well dynamics // J. Petrol. Sci. & Engng., 2000, vol. 25 (1–2), pp. 59–77.
4. *Carey M., Mondal S., Sharma M.* Analysis of Water Hammer signatures for fracture diagnostics // SPE Annual Technical Conf. & Exhib. / Texas, USA, 2015. Paper no. SPE-174866-MS.
5. *Wang X., Hovem K., Moos D., Quan Y.* Water Hammer effects on water injection well performance and longevity // SPE Int. Symp. & Exhib. on Formation Damage Control, 2008, SPE 2282.
6. *Liapidevskii V.Y., Neverov V.V., Krivtsov A.M.* Mathematical model of water hammer in vertical wellbore // Sib. Electron. Math. Rep., 2018, no. 15. pp. 1687–1696.
7. *Shagapov V.Sh., Bashmakov R.A., Rafikova G.R., Mamaeva Z.Z.* Damped Natural Vibrations of Fluid in a Well Interfaced with a Reservoir // J. Appl. Mech. & Techn. Phys., 2020, vol. 61, pp. 501–509.
8. *Baikov V., Bulgakova G., Ilyasov A., Kashapov D.* To the evaluation of the geometric parameters of hydraulic fracturing crack // Izv. RAS MZG, 2018, iss. 5, pp. 64–75.
9. *Ilyasov A.M., Bulgakova G.T.* The quasi-one-dimensional hyperbolic model of hydraulic fracturing // Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2016, vol. 20, no. 4, pp. 739–754. (in Russian)
10. *Perkins T.K., Kern L.R.* Width of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol., SPE-89-PA, 1961, vol. 13 (09), pp. 937–949.
11. *Nordgren R.P.* Propagation of a vertical hydraulic fracture // Soc. Petrol. Eng. J. SPE-3009-PA, 1972, vol. 12 (04), pp. 306–314.
12. *Nigmatulin R.I.* Dynamics of Multiphase Media. Pt. I. Moscow: Nauka, 1987. 464 p. (in Russian)
13. *Nigmatulin R.I.* Dynamics of Multiphase Media. Pt. II. Moscow: Nauka, 1987. 360 p. (in Russian)
14. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics: V. 6. L.: Pergamon, 1959. 536 p.
15. *Shagapov V.S., Nagaeva Z.M.* On the theory of seepage waves of pressure in a fracture in a porous permeable medium // J. Appl. Mech. & Techn. Phys., 2017, vol. 58, pp. 862–870.

16. *Cinco-Ley H.* Evaluation of hydraulic fracturing by transient pressure analysis methods // SPE 10043 Petrol. Exh. & Techn. Symp., Beijing China, 1982. SPE 10043-MS.
17. *Khabibullin I.L., Khisamov A.A.* Modeling of nonstationary filtration around a well with a vertical fracture frac // Bull. Bashkir. Univ., 2017, vol. 22, no. 2, pp. 309–314. (in Russian)
18. *Nagaeva Z., Shagapov V.* Elastic seepage in a fracture located in an oil or gas reservoir // JAMM, 2017, vol. 81, iss. 3, pp. 214–222.
19. *Lavrentev M.A., Shabat B.V.* Methods of the Theory of Function of Complex Variable. SPb.: 2002, 749 p.
20. *Carslaw H.S., Jaeger J.C.* Conduction of Heat in Solids. Oxford: Univ. Press, 1959. 520 p.
21. *Bogdan A.V., Keilers A., Oussoltsev D., Lecerf B.* Real-time interpretation of leak isolation with degradable diverter using high frequency pressure monitoring // Schlumberger. SPE Asia Pacific Oil & Gas Conf. & Exhib. held in Perth, Australia, 2016, SPE-182451-MS.