ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 5, с. 547–564

УДК 531.381

К столетию со дня рождения академика В.В. Румянцева

ПОЛУРЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

В. Ю. Ольшанский[1],*

[1] Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия
**e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.01.2021 г.
После доработки 16.02.2021 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Для описания вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, используются уравнения Пуанкаре–Жуковского. Получены связи (называемые конфигурационными условиями) между моментами инерции твердого тела и полости с жидкостью, при которых твердое тело может совершать полурегулярную прецессию, когда скорость прецессии постоянна, а скорость собственного вращения изменяется со временем. При совпадении оси собственного вращения с главной осью инерции достаточно одного условия, если оси не совпадают, то конфигурационных условий два. Показано, что при выполнении конфигурационных условий полурегулярной прецессии уравнения Пуанкаре–Жуковского обладают инвариантной системой из трех линейных функций. Выполнен анализ конфигурационных условий для систем, близких к сферически симметричным.

Ключевые слова: твердое тело с жидким наполнением, уравнения Пуанкаре–Жуковского, полурегулярная прецессия

DOI: 10.31857/S0032823521040111

1. Введение. Известная модель Пуанкаре–Жуковского–Хафа широко применяется со времени своего создания [1–3] при анализе движения твердого тела с жидким наполнением из-за возможности использования системы обыкновенных дифференциальных уравнений для описания такого движения в случае эллипсоидальной полости с идеальной завихренной жидкостью.

Начиная с работ [2, 3], в которых изучены малые возмущения равномерного вращения системы “твердая мантия + жидкое ядро” в связи с задачей о свободной нутации земной оси, модель Пуанкаре–Жуковского–Хафа применялась для описания вращения Земли, некоторых других планет и спутников. Эта модель продолжает активно использоваться и в настоящее время. Изучено [4] вращение Земли и Венеры (при гравитационных возмущениях со стороны Солнца) в случае осесимметричной мантии и ядра. Рассмотрен [5] случай, когда эллипсоиды инерции мантии и ядра соосны и пропорциональны. Исследовалось [6–8] влияние вращения жидкого ядра на либрацию Меркурия. Выделены [9] случаи, когда трехосное жидкое ядро сильно сплющено и слабо сплющено. Модель Пуанкаре–Жуковского–Хафа использовалась также и для описания вращения твердого спутника с глобальным подповерхностным океаном [10]. При изучении состояний Кассини небесных тел [11] рассмотрен случай, когда оси эллипсоидального жидкого ядра не совпадают с главными осями инерции твердой мантии.

Важным простым и одновременно нетривиальным частным случаем, который встречается при описании движения некоторых технических объектов и естественных космических тел, является прецессия. Регулярная прецессия динамически симметричного свободного и тяжелого твердых тел хорошо изучена. Известны примеры регулярной прецессии несимметричного твердого тела в однородном поле тяжести [12], других силовых полях [13, 14].

Известно также, что осесимметричная система “тело + жидкость” может совершать прецессию как при отсутствии внешних сил, так и в однородном поле тяжести. Один частный случай регулярной прецессии неосесимметричной системы “тело + жидкость” был впервые отмечен [15] при нахождении условий существования линейной инвариантной системы уравнений Пуанкаре–Жуковского. Позже [16] были найдены конфигурационные условия, при которых несимметричная система “тело + жидкость” может совершать регулярную прецессию. Было показано [16], что если ось собственного вращения совпадает с одной из главных осей инерции, то достаточно одного конфигурационного условия, иначе число условий равно двум. Выполнено [17] упрощение конфигурационных условий и формул для вычисления скоростей прецессии и собственного вращения. Для интересного при изучении динамики планет случая, когда система мало отличается от сферически симметричной, показано [17], что отношение скоростей прецессии и собственного вращения совпадает с точностью до малых второго порядка включительно с отношением этих скоростей для прецессии соответствующего осесимметричного твердого тела с пустой (не заполненной жидкостью) полостью.

При рассмотрении нерегулярной прецессии выделяют [13] движения, когда постоянна величина либо скорости собственного вращения (полурегулярная прецессия первого рода), либо скорости прецессии (полурегулярная прецессия второго рода). Известны примеры таких прецессий твердых тел в различных силовых полях [13], твердого тела, несущего гиростаты [18].

Несколько частных случаев нерегулярной прецессии несимметричной системы “твердое тело + жидкость” отмечены при построении новых линейных инвариантных соотношений [19, 20].

Ниже решается следующая задача: определить при каких связях между коэффициентами уравнений Пуанкаре–Жуковского (т.е. при каких конфигурациях несимметричной системы “твердое тело + жидкость”) эти уравнения допускают решение, описывающее полурегулярную прецессию первого рода.

Получены конфигурационные условия; как и для регулярной прецессии [16, 17] в случае совпадения оси собственного вращения с главной осью инерции достаточно одного условия, если оси не совпадают, то условий два. Выделены периодические решения. Найдены скорости прецессии и собственного вращения. Показано, что при выполнении полученных в работе конфигурационных условий полурегулярной прецессии уравнения Пуанкаре–Жуковского обладают инвариантной системой из трех линейных функций.

Выполнен анализ конфигурационных условий для систем, близких к сферически симметричным. Доказано, что для таких систем полурегулярная прецессия, так же как и регулярная прецессия [17] возможна, только если ось собственного вращения совпадает с одной из главных осей инерции.

2. Постановка задачи. Для описания движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной невязкой несжимаемой жидкостью, используются уравнения Пуанкаре–Жуковского–Хафа [1–3]. При отсутствии внешних сил уравнения могут быть записаны в виде (см. [21, 22])

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times (\mathbf{A}'\mathbf{K} + \mathbf{B}'\mathbf{S}), \quad \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \times (\mathbf{B}'\mathbf{K} + \mathbf{C}'\mathbf{S}) \tag{2.1}$$

Здесь **K** – кинетический момент системы, вектор **S** пропорционален завихренности жидкости $\mathbf{\Omega}$; в подвижной системе отсчета $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, жестко связанной с главными осями инерции твердого тела, компоненты вектора **S** имеют вид

$$S_1 = -\frac{2}{5}\mu d_2 d_3 \Omega_1 \quad (1\ 2\ 3),$$

где d_1, d_2, d_3 – полуоси полости и μ – масса жидкости.

Если главные центральные оси инерции твердого тела совпадают с осями эллипсоидальной полости, то элементы A_i, B_i, a_i, b_i, c_i диагональных матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$ задаются равенствами

$$\begin{gathered} A_1 = A_1^s + A_1^{\mathrm{eq}}, \quad A_1^{\mathrm{eq}} = \frac{\mu}{5}\frac{(d_2^2 - d_3^2)^2}{d_2^2 + d_3^2}, \quad B_1 = \frac{4\mu}{5}\frac{d_2^2 d_3^2}{d_2^2 + d_3^2} \quad (1\ 2\ 3) \\ a_i = \frac{1}{A_i}, \quad b_i = \beta_i a_i, \quad c_i = \gamma_i + \beta_i^2 a_i, \quad \beta_1 = \frac{2d_2 d_3}{d_2^2 + d_3^2}, \quad \gamma_1 = \frac{5}{\mu(d_2^2 + d_3^2)} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь A_i^s – главные моменты инерции твердого тела, параметры A_i и A_i^{eq} называют ([1], [22]) моментами инерции, соответственно, преобразованного и эквивалентного тела.

Система (2.1) при диагональных матрицах записывается в виде

$$\begin{gathered} \dot{K}_1 = -\Delta a_1 K_2 K_3 + b_3 S_3 K_2 - b_2 S_2 K_3, \quad \Delta a_1 = a_2 - a_3 \\ \dot{S}_1 = -\Delta c_1 S_2 S_3 + b_3 K_3 S_2 - b_2 K_2 S_3, \quad \Delta c_1 = c_2 - c_3 \quad (1\ 2\ 3) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Угловая скорость твердого тела выражается по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}'\mathbf{K} + \mathbf{B}'\mathbf{S} \tag{2.4}$$

В случае прецессии угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ имеет два компонента, направление одного из которых постоянно в инерциальной системе отсчета, а другого – постоянно в системе отсчета, связанной с телом. В рассматриваемом случае, когда момент внешних сил равен нулю, вектор кинетического момента постоянен в инерциальном пространстве и движением тела будет прецессия, если его угловая скорость представима в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r \mathbf{m} + \omega_p \mathbf{K}^0 \tag{2.5}$$

Здесь ω_r, ω_p – скорости собственного вращения и прецессии, **m** – единичный вектор, фиксированный в подвижной системе, $\mathbf{K}^0$ – орт **K**.

Если скорости ω_r, ω_p постоянны, то прецессия называется регулярной, если постоянна только одна из скоростей – полурегулярной. Если постоянна скорость прецессии ω_p, то движение называют полурегулярной прецессией первого типа; всюду в статье рассматривается этот случай.

При условии (2.5) использование переменной φ, такой что

$$\dot{\varphi} = \omega_r \tag{2.6}$$

позволяет записать первое уравнение (2.1) как линейное

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} \times \mathbf{m} \tag{2.7}$$

Здесь и далее $(\,)' = d(\,)/d\varphi$.

Учитывая равенства (2.4) и (2.5), компоненты вектора $\mathbf{S}$ можно выразить через компоненты кинетического момента и скорости ω_r и ω_p

$$S_i = x_i K_i + \omega_r \frac{m_i}{b_i}, \quad x_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\tilde{\omega}_p - a_i}{b_i}, \quad \tilde{\omega}_p \overset{\text{def}}{=} \frac{\omega_p}{|\mathbf{K}|}, \quad i = 1,2,3 \tag{2.8}$$

Параметры x_i связаны условиями

$$b_2 x_2 - b_3 x_3 = \Delta a_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.9}$$

Из равенств (2.6)–(2.8) получаем

$$\dot{S}_1 = \left(x_1 \left(m_3 K_2 - m_2 K_3 \right) + \frac{m_1}{b_1} \omega_r' \left(\varphi \right) \right) \omega_r \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.10}$$

Вторая подсистема (2.3) после подстановки в нее S_i и $\dot{S}_i$ из равенств (2.8) и (2.10) принимает вид

$$\left(\frac{m_2}{b_2} \left(\rho_{23} - \Delta c_1 x_3 \right) K_3 - \frac{m_3}{b_3} \left(\rho_{32} + \Delta c_1 x_2 \right) K_2 \right) \omega_r + \sigma_1 K_2 K_3 - \frac{m_1}{b_1} \omega_r' \omega_r = \frac{m_2 m_3}{b_2 b_3} \Delta c_1 \omega_r^2 \tag{2.11}$$
$$\rho_{23} = b_3 + b_2 x_1, \quad \rho_{32} = b_2 + b_3 x_1 \quad (1\ 2\ 3)$$

Здесь

$$\sigma_1 = -\Delta c_1 x_2 x_3 + b_3 x_2 - b_2 x_3 \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.12}$$

Ниже определим, при каких связях между параметрами a_i, b_i, c_i и при какой функции $\omega_r(\varphi)$ могут быть выполнены условия (2.11) для функций K_i, являющихся решением системы (2.7). После определения $\omega_r(\varphi)$ связь между переменными t и φ находим, интегрируя равенство (2.6).

Ранее было показано [16, 17], что регулярная прецессия несимметричной системы “твердое тело + жидкость” возможна только если $m_1 m_2 m_3 = 0$. Примеров полурегулярной прецессии в случае, когда все три компонента вектора $\mathbf{m}$ не равны нулю, также не удается построить.

3. Полурегулярная прецессия, **случай** $m_2 = 1$, $m_1 = m_3 = 0$. Для случая, когда ось собственного вращения совпадает с главной осью инерции, определим конфигурации системы “твердое тело + жидкость”, при которых возможна полурегулярная прецессия и найдем скорости прецессии и собственного вращения.

Общее решение системы (2.7) и система (2.11) записываются в виде

$$K_1 = q_0 \cos\varphi, \quad K_2 = q_1, \quad K_3 = q_0 \sin\varphi, \quad q_0, q_1 = \text{const} \tag{3.1}$$

$$\sigma_i b_2 K_2 + \rho_i \omega_r = 0, \quad i = 1,3, \quad b_2 \sigma_2 K_1 K_3 = \omega_r \omega_r' \tag{3.2}$$

$$\rho_1 = -\Delta c_1 x_3 + b_3 + b_2 x_1, \quad \rho_3 = -\Delta c_3 x_1 - b_1 - b_2 x_3 \tag{3.3}$$

Нетрудно проверить, что условия (3.1) и (3.2) при $\omega_r \neq \text{const}$ могут быть выполнены, только если $q_1 = K_2 = 0$ и выполнены условия $\rho_1 = \rho_3 = 0$. Из этих условий, учитывая формулы (3.3), получаем следующие выражения для параметров x_1 и x_3

$$x_1 = -\frac{b_1 \Delta c_1 + b_2 b_3}{b_2^2 + \Delta c_1 \Delta c_3}, \quad x_3 = \frac{b_3 \Delta c_3 - b_1 b_2}{b_2^2 + \Delta c_1 \Delta c_3} \tag{3.4}$$

Учитывая связь (2.9), получим конфигурационное условие

$$b_1^2 \Delta c_1 + b_3^2 \Delta c_3 + b_2^2 \Delta a_2 + \Delta c_1 \Delta c_3 \Delta a_2 = 0 \tag{3.5}$$

Из равенств (3.1) и третьего равенства (3.2) найдем

$$\omega_r^2 = C - \frac{1}{2} b_2 \sigma_2 q_0^2 \cos 2\varphi$$

При $\rho_1 = \rho_3 = 0$ имеем $\sigma_2 = b_2\left(x_1^2 - x_3^2\right)$ и формулу для скорости собственного вращения можно записать в виде

$$\omega_r^2 = (\dot\varphi)^2 = C - \frac{1}{2} b_2^2 \left(x_1^2 - x_3^2\right) q_0^2 \cos 2\varphi \tag{3.6}$$

Скорость прецессии выражается по формуле (2.8)

$$\frac{\omega_p}{q_0} = \tilde\omega_p = a_1 + b_1 x_1 = a_3 + b_3 x_3 \tag{3.7}$$

Выше показано, что для того, чтобы движением системы “твердое тело + жидкость” в случае совпадения оси собственного вращения с главной осью была полурегулярная прецессия, необходимо выполнение конфигурационного условия (3.5). Это условие дает, при учете формул (2.2), одну связь между главными моментами инерции твердого тела и моментами инерции жидкого ядра. В разделе 5 показано, что при соответствующих начальных условиях данного условия также и достаточно для полурегулярной прецессии системы.

После интегрирования уравнения (3.6) получим либо периодическое решение $K_i(t)$, $S_i(t)$, либо решение, асимптотически приближающееся при $t \to \infty$ к стационарному. Далее будем рассматривать случай периодического решения, представляющий интерес при изучении динамики естественных космических тел.

Уравнение (3.6) преобразуем к виду

$$(\dot\varphi)^2 = b_2^2 \left(\left(S_2^0\right)^2 + \left(x_3^2 - x_1^2\right)\left(\left(K_3^0\right)^2 - K_3^2\right)\right), \quad K_3 = q_0 \sin\varphi$$

Полагая

$$|x_3| > |x_1|, \quad \left(S_2^0\right)^2 > \left(x_3^2 - x_1^2\right)\left(K_1^0\right)^2$$

уравнение запишем в виде

$$\dot\varphi = \lambda\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \quad 0 < k^2 < 1$$

$$\lambda = \pm b_2 \sqrt{\left(S_2^0\right)^2 + \left(x_3^2 - x_1^2\right)\left(K_3^0\right)^2}, \quad k^2 = \frac{\left(x_3^2 - x_1^2\right)\left(\left(K_1^0\right)^2 + \left(K_3^0\right)^2\right)}{\left(S_2^0\right)^2 + \left(x_3^2 - x_1^2\right)\left(K_3^0\right)^2}$$

Выполнив интегрирование, запишем решение, используя эллиптические функции Якоби

$$K_1 = K \operatorname{cn} t', \quad K_2 = 0, K_3 = K \operatorname{sn} t', \quad K^2 = \left(K_1^0\right)^2 + \left(K_3^0\right)^2$$

$$S_1 = x_1 K \operatorname{cn} t', \quad b_2 S_2 = \omega_\varphi = \lambda \operatorname{dn} t', \quad S_3 = x_3 K \operatorname{sn} t'$$

$$\varphi = \operatorname{am} t', \quad \sin\varphi = \operatorname{sn} t', \quad \cos\varphi = \operatorname{cn} t', \quad \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = \operatorname{dn} t', \quad t' = \lambda t + c$$

4. Полурегулярная прецессия, случай $m_2 = 0$, $m_1 m_3 \neq 0$. Найдем конфигурационные условия полурегулярной прецессии в случае, когда ось собственного вращения не совпадает с главной осью инерции.

Решение системы (2.7) записывается в виде

$$K_1 = q_1 m_1 - q m_3 \cos\varphi, \quad K_2 = q \sin\varphi, \quad K_3 = q_1 m_3 + q m_1 \cos\varphi \tag{4.1}$$

Получим условия, при которых могут быть выполнены уравнения (2.11) с данными функциями K_i.

Рассмотрим сначала случай $q_1 = 0$. Обозначив $z = \omega_r/(q\cos\varphi)$, второе уравнение (2.11) запишем в виде

$$\begin{gathered}\left(m_3^2 b_1 \left(b_1 - \Delta c_2 x_1 + b_3 x_2\right) + m_1^2 b_3 \left(b_3 + \Delta c_2 x_3 + b_1 x_2\right)\right) z + \\ + m_1 m_3 \Delta c_2 z^2 + b_1 b_3 m_1 m_3 \sigma_2 = 0\end{gathered} \tag{4.2}$$

Если $z = \text{const}$, то $\omega_r = \text{const} \cdot \cos\varphi$. В этом случае получаемое после интегрирования уравнения (2.6) решение $K_i(t)$, $S_i(t)$ будет не периодическим, а стремящимся при $t \to \infty$ к стационарному значению. Как и выше, этот случай не будем рассматривать.

Если же $z \neq \text{const}$, то условие (4.2) может быть выполнено, только если все коэффициенты при z равны нулю, т.е.

$$\Delta c_2 = 0 \tag{4.3}$$

$$b_3 x_1 = b_1 x_3, \quad m_3^2 \frac{b_1}{b_3} + m_1^2 \frac{b_3}{b_1} + x_2 = 0 \tag{4.4}$$

Первое и третье уравнения (2.11) записываются в виде

$$\begin{aligned}\sigma_1 K_2 K_3 - \left(\frac{m_3}{b_3}(b_2 + \Delta c_1 x_2 + b_3 x_1) K_2 + \frac{m_1}{b_1}\omega_r'\right)\omega_r = 0 \\ \sigma_3 K_1 K_2 + \left(\frac{m_1}{b_1}(b_2 - \Delta c_3 x_2 + b_1 x_3) K_2 - \frac{m_3}{b_3}\omega_r'\right)\omega_r = 0\end{aligned} \tag{4.5}$$

Если здесь первое равенство умножить на $m_3 b_1$, второе – на $m_1 b_3$ и сложить, то, учитывая условия (4.3) и (4.4), получим

$$\left(m_3^2 \frac{b_1}{b_3} + m_1^2 \frac{b_3}{b_1}\right)(b_2 + \Delta c_1 x_2 + b_3 x_1)\,\omega_r = m_1 m_3 q \left(b_1 \sigma_1 + b_3 \sigma_3\right) \cos\varphi$$

Исключая, как и выше, случай $\omega_r = \text{const} \cdot \cos\varphi$, получим условия

$$b_2 + \Delta c_1 x_2 + b_3 x_1 = 0, \quad b_1 \sigma_1 + b_3 \sigma_3 = 0 \tag{4.6}$$

Уравнения (4.5) при условиях (4.3), (4.4) и (4.6) эквивалентны и могут быть записаны в виде

$$\omega_r \omega_r' = b_1 \sigma_1 q^2 \sin\varphi \cos\varphi \tag{4.7}$$

Выражения для параметров x_i найдем, используя связи (2.9) и (4.4)

$$x_1 = \frac{b_1 \Delta a_2}{b_1^2 - b_3^2}, \quad x_3 = \frac{b_3 \Delta a_2}{b_1^2 - b_3^2}, \quad x_2 = \frac{b_1^2 \Delta a_1 + b_3^2 \Delta a_3}{b_2 (b_1^2 - b_3^2)} \tag{4.8}$$

Если найденные значения параметров x_1 и x_2 подставить в первое условие (4.6), то получим второе конфигурационное условие

$$b_2^2 (b_1^2 - b_3^2) + b_1 b_2 b_3 \Delta a_2 - \left(b_1^2 \Delta a_1 + b_3^2 \Delta a_3\right) \Delta c_1 = 0 \tag{4.9}$$

Второе условие (4.6) следует из условий (4.3) и (4.4).

Таким образом, в рассматриваемом случае полурегулярная прецессия, задаваемая периодическим решением уравнений Пуанкаре–Жуковского возможна при выполнении двух условий (4.3) и (4.9). Компоненты решения выражаются через эллиптические функции Якоби, как и в разделе 3.

При учете равенств (4.6) из формулы (4.7) получим

$$\omega_r^2 = C - \frac{1}{2} b_1 b_3 q^2 (x_2 + x_1 x_3) \cos 2\varphi$$

Используя равенства (2.8) и (4.8), найдем скорость прецессии

$$\tilde{\omega}_p = \frac{b_3^2 a_1 - b_1^2 a_3}{b_3^2 - b_1^2}$$

Из равенств (4.4) получим формулы

$$m_1^2 = \frac{x_1 (x_1 + x_2 x_3)}{x_1^2 - x_3^2}, \quad m_3^2 = -\frac{x_3 (x_3 + x_1 x_2)}{x_1^2 - x_3^2}$$

Рассмотрим далее случай, когда $q_1 = (\mathbf{K}, \mathbf{m}) \neq 0$.

Из уравнений (4.5) получаем следствие

$$L\omega_r = \frac{m_3}{b_3} \sigma_1 K_3 - \frac{m_1}{b_1} \sigma_3 K_1 \tag{4.10}$$

$$L = \frac{m_1^2}{b_1^2} (b_2 + b_1 x_3 - \Delta c_3 x_2) + \frac{m_3^2}{b_3^2} (b_2 + b_3 x_1 + \Delta c_1 x_2) \tag{4.11}$$

Рассмотрим сначала случай $L = 0$.

Так как заданные формулами (4.1) функции K_1 и K_3 при $q_1 \neq 0$ линейно независимы, то из условия (4.10) следует

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 0 \tag{4.12}$$

Выражая Δc_i через σ_i, условие $L = 0$ приводим к виду

$$(x_2 + x_1 x_3) \left(\frac{m_1^2}{b_1 x_1} + \frac{m_3^2}{b_3 x_3} \right) = 0 \tag{4.13}$$

Уравнения (4.5) при условии (4.12) принимают вид

$$\frac{m_1}{b_1} \omega_r' = -\frac{m_3}{x_3} (x_2 + x_1 x_3) K_2, \quad \frac{m_3}{b_3} \omega_r' = \frac{m_1}{x_1} (x_2 + x_1 x_3) K_2 \tag{4.14}$$

Два уравнения (4.14) при условии (4.13) эквивалентны. Так как $\omega_r' \neq 0$, то $x_2 + x_1 x_3 \neq 0$ и из условия (4.13) получим

$$\frac{m_1^2}{b_1 x_1} + \frac{m_3^2}{b_3 x_3} = 0, \quad m_1^2 = \frac{b_1 x_1}{\Delta a_2}, \quad m_3^2 = -\frac{b_3 x_3}{\Delta a_2} \tag{4.15}$$

Умножая первое уравнение (4.14) на $m_1 b_1$, второе – на $m_3 b_3$ и складывая, получим

$$\omega_r' = m_1 m_3 (x_2 + x_1 x_3) K_2 \left(\frac{b_3}{x_1} - \frac{b_1}{x_3} \right) = -\frac{m_1 m_3 (x_2 + x_1 x_3) \Delta a_2}{x_1 x_3} K_2 \tag{4.16}$$

Из условий (2.12) и (4.12) следует $\sigma_2 = 0$ и второе уравнение (2.11) записывается в виде

$$\frac{m_3}{b_3} (b_1 - \Delta c_2 x_1 + b_3 x_2) K_1 - \frac{m_1}{b_1} (b_3 + \Delta c_2 x_3 + b_1 x_2) K_3 = \frac{m_1 m_3}{b_1 b_3} \Delta c_2 \omega_r$$

Из равенства $\sigma_2 = 0$ следует

$$x_3(-\Delta c_2 x_1 + b_1) = b_3 x_1, \quad x_1(\Delta c_2 x_3 + b_3) = b_1 x_3$$

и последнее равенство для ω_r принимает вид

$$\frac{m_1 m_3}{b_1 b_3}\Delta c_2 \omega_r = \frac{m_3}{x_3}(x_1 + x_2 x_3) K_1 - \frac{m_1}{b_1}(x_3 + x_1 x_2) K_3 \tag{4.17}$$

Дифференцируя это равенство при учете формул (4.1), получим

$$\frac{m_1 m_3}{b_1 b_3}\Delta c_2 \omega_r' = \left(\frac{m_3^2}{x_3}(x_1 + x_2 x_3) + \frac{m_1^2}{x_1}(x_3 + x_1 x_2)\right) K_2$$

Подставляя ω_r' из формулы (4.16), получим условие

$$-\frac{m_1^2 m_3^2}{b_1 b_3}\Delta a_2 \Delta c_2 \frac{x_2 + x_1 x_3}{x_1 x_3} = \frac{m_3^2}{x_3}(x_1 + x_2 x_3) + \frac{m_1^2}{x_1}(x_3 + x_1 x_2) \tag{4.18}$$

Если подставить сюда m_i^2 из (4.15) и учесть, что при $\sigma_2 = 0$ имеем $b_1 x_3 - b_3 x_1 = \Delta c_2 x_1 x_3$, то условие (4.18) приведем к виду

$$\Delta c_2 = \Delta a_2 \tag{4.19}$$

Еще одно конфигурационное условие получим из условий (4.12). Используя связи (2.9), условия (4.12) запишем в виде

$$\Delta c_{1,3} b_2 x_2^2 \pm \left(b_2^2 - b_{3,1}^2 + \Delta c_{1,3}\Delta a_{1,3}\right) x_2 + b_2 \Delta a_{1,3} = 0$$

Исключая из этих равенств сначала x_2^2, затем свободные члены, получим

$$x_2 = b_2 \frac{\Delta c_3 \Delta a_1 - \Delta c_1 \Delta a_3}{S_c + \Delta c_1 \Delta c_2 \Delta c_3} = -\frac{S_a + \Delta a_1 \Delta a_2 \Delta a_3}{b_2(\Delta c_3 \Delta a_1 - \Delta c_1 \Delta a_3)}$$
$$S_a \stackrel{\text{def}}{=} \sum b_i^2 \Delta a_i, \; S_c \stackrel{\text{def}}{=} \sum b_i^2 \Delta c_i \tag{4.20}$$

Из равенств (4.20) следует необходимость условия

$$(S_a + \Delta a_1 \Delta a_2 \Delta a_3)(S_c + \Delta c_1 \Delta c_2 \Delta c_3) = -b_2^2(\Delta c_3 \Delta a_1 - \Delta c_1 \Delta a_3)^2 \tag{4.21}$$

Учитывая условие (4.19), из равенств (2.9) и (4.20) найдем

$$x_1 = -\frac{S_a + \Delta c_1 \Delta a_2 \Delta a_3}{b_1(\Delta c_3 \Delta a_1 - \Delta c_1 \Delta a_3)}, \quad x_3 = -\frac{S_a + \Delta a_1 \Delta a_2 \Delta c_3}{b_3(\Delta c_3 \Delta a_1 - \Delta c_1 \Delta a_3)}$$

Для скоростей прецессии и собственного вращения получаем формулы

$$\tilde{\omega}_p = \frac{\sum\left(a_i c_i - b_i^2\right)\Delta a_i}{\sum c_i \Delta a_i}$$

$$\frac{m_1 m_3}{b_1 b_3}\Delta a_2 \omega_r = q_1 m_1 m_3 \left(\frac{x_1}{x_3} - \frac{x_3}{x_1}\right) - q(x_2 + x_1 x_3)\cos\varphi$$

Таким образом, в рассмотренном частном случае, когда параметр L, заданный равенством (4.11), равен нулю, получены два конфигурационных условия (4.19) и (4.21) полурегулярной прецессии, формулы для скоростей и для компонент направляющего вектора оси собственного вращения.

Рассмотрим теперь случай $L \neq 0$. Из равенства (4.10) следует, что ω_r — линейная комбинация K_1 и K_3. Учитывая формулы (4.1), запишем

$$\omega_r = \kappa_1 K_1 + \kappa_3 K_3, \quad \omega_r' = (m_3\kappa_1 - m_1\kappa_3) K_2$$

Уравнения (4.5) примут вид

$$\sigma_1 K_3 = (\kappa_1 K_1 + \kappa_3 K_3)\left(\frac{m_1}{b_1}(m_3\kappa_1 - m_1\kappa_3) + \frac{m_3}{b_3}(b_2 + \Delta c_1 x_2 + b_3 x_1)\right)$$

$$\sigma_3 K_1 = (\kappa_1 K_1 + \kappa_3 K_3)\left(\frac{m_3}{b_3}(m_3\kappa_1 - m_1\kappa_3) - \frac{m_1}{b_1}(b_2 - \Delta c_3 x_2 + b_1 x_3)\right)$$

В случае $q_1 \neq 0$ функции K_1 и K_3 линейно независимы и, если $\kappa_1\kappa_3 \neq 0$, то для выполнения последних условий необходимо $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$, $L = 0$ и приходим к рассмотренному выше случаю. Осталось рассмотреть вариант $\kappa_1\kappa_3 = 0$. Пусть $\kappa_1 = 0$, $\kappa_3 = \kappa$, тогда

$$\omega_r = \kappa K_3, \quad \omega_r' = -m_3\kappa K_2 \tag{4.22}$$

Для выполнения уравнений (4.5) необходимы условия

$$\sigma_1 = \kappa\left(\frac{m_3}{b_3}(b_2 + \Delta c_1 x_2 + b_3 x_1) - \frac{m_1^2}{b_1}\kappa\right), \quad \sigma_3 = 0$$

$$b_3(b_2 - \Delta c_3 x_2 + b_1 x_3) + b_1 m_3 \kappa = 0 \tag{4.23}$$

$$\sigma_2 = \kappa\frac{m_3}{b_3}(\Delta c_2 x_1 - b_1 - b_3 x_2), \quad b_3 + \Delta c_2 x_3 + b_1 x_2 + \kappa\frac{m_3}{b_3}\Delta c_2 = 0$$

Умножим первое равенство полученной системы на x_1, второе — на x_3, четвертое — на x_2 и сложим. Учитывая равенство (2.12), получим условие

$$\kappa\frac{m_1^2}{b_1}x_1 + m_3\left(x_2^2 - x_1^2\right) = 0$$

Этим условием можно в системе (4.23) заменить первое условие и систему, обозначив $\alpha = \kappa m_3$, запишем в виде

$$\alpha x_1 m_1^2 + b_1\left(x_2^2 - x_1^2\right)m_3^2 = 0, \quad b_2 x_1 - b_1 x_2 - \Delta c_3 x_1 x_2 = 0$$

$$b_3(b_1 x_3 - b_3 x_1 - \Delta c_2 x_1 x_3) + \alpha(b_1 - \Delta c_2 x_1 + b_3 x_2) = 0 \tag{4.24}$$

$$b_3(b_2 - \Delta c_3 x_2 + b_1 x_3) + \alpha b_1 = 0, \quad b_3(b_3 + \Delta c_2 x_3 + b_1 x_2) + \alpha\Delta c_2 = 0$$

Подставляя Δc_3 из второго условия данной системы в четвертое, найдем

$$\alpha = -\frac{b_3}{x_1}(x_2 + x_1 x_3) \tag{4.25}$$

Если пятое равенство (4.24) умножить на x_1 и сложить с третьим, то получим равенство

$$b_1 b_3(x_3 + x_1 x_2) + \alpha(b_1 + b_3 x_2) = 0$$

Подставив сюда α из формулы (4.25), получим условие

$$b_1\left(x_1^2 - 1\right) = b_3(x_2 + x_1 x_3) \tag{4.26}$$

Из первого равенства (4.24) и формул (4.25), (4.26) получим

$$m_1^2\left(x_1^2-1\right)=m_3^2\left(x_2^2-x_1^2\right),\quad m_1^2=\frac{x_1^2-x_2^2}{1-x_2^2},\quad m_3^2=\frac{1-x_1^2}{1-x_2^2} \tag{4.27}$$

Пятое условие (4.24) при учете формулы (4.25) приведем к виду

$$b_3x_1+b_1x_1x_2-\Delta c_2x_2=0 \tag{4.28}$$

Таким образом, система условий (4.24) дает формулы (4.25) и (4.27) для определения величин α, m_1^2, m_3^2 и три условия, связывающие параметры x_1, x_2, x_3 — это второе условие (4.24) и условия (4.26) и (4.28). Второе равенство (4.24) и равенство (4.28) образуют систему линейных уравнений относительно x_1^{-1}, x_2^{-1}, из которой находим

$$x_1=\frac{b_2\Delta c_2-b_1b_3}{b_3\Delta c_3+b_1b_2},\quad x_2=\frac{b_2\Delta c_2-b_1b_3}{b_1^2+\Delta c_2\Delta c_3} \tag{4.29}$$

Условие (4.26) при учете связи (2.9) запишем в виде $b_3x_2+b_1-\Delta a_2x_1=0$. Так как $b_2x_2-b_1x_1=\Delta a_3$, то получим выражения

$$x_1=\frac{b_1b_2+b_3\Delta a_3}{b_2\Delta a_2-b_1b_3},\quad x_2=\frac{b_1^2+\Delta a_2\Delta a_3}{b_2\Delta a_2-b_1b_3} \tag{4.30}$$

Сравнивая формулы (4.29) и (4.30), находим конфигурационные условия

$$\begin{gathered}(b_1^2+\Delta a_2\Delta a_3)\left(b_1^2+\Delta c_2\Delta c_3\right)=\left(b_2\Delta a_2-b_1b_3\right)\left(b_2\Delta c_2-b_1b_3\right)=\\ =\left(b_3\Delta a_3+b_1b_2\right)\left(b_3\Delta c_3+b_1b_2\right)\end{gathered} \tag{4.31}$$

Используя равенства (2.8) и (4.30), запишем скорость прецессии

$$\tilde{\omega}_p=\frac{b_1^2b_2-b_1b_3a_2+b_2a_1\Delta a_2}{b_2\Delta a_2-b_1b_3}$$

Скорость собственного вращения, используя равенства (4.1) и (4.22), запишем в виде

$$\omega_r=\alpha\left(q_1+q\frac{m_1}{m_3}\cos\varphi\right)$$

Периодическое движение получим, если $|q_1m_3|>|qm_1|$.

После интегрирования уравнения (2.6) получим

$$\cos\varphi=\frac{-qm_1+q_1m_3\cos t'}{q_1m_3-qm_1\cos t'},\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{q_1^2m_3^2-q^2m_1^2}\sin t'}{q_1m_3-qm_1\cos t'}$$

$$t'=\sqrt{q_1^2-q^2\frac{m_1^2}{m_3^2}}(\alpha t+\mathrm{const})$$

Периодическое решение определяется данными равенствами с учетом формул (2.8), (4.1).

5. Связь между конфигурационными условиями полурегулярной прецессии и условиями существования линейной инвариантной системы. Покажем, что если коэффициенты a_i, b_i, c_i системы уравнений Пуанкаре—Жуковского таковы, что у этой системы существует решение, называемое выше полурегулярной прецессией, то у системы уравнений существует линейная инвариантная система (F_1, F_2, F_3). И наоборот — при существовании данной инвариантной системы и начальных условиях $F_i=0$ движением является полурегулярная прецессия.

Рассмотрим сначала описанный в разделе 3 случай $m_2 = 1$.

Пусть выполнено конфигурационное условие (3.5). Зададим параметры x_1 и x_3 равенствами (3.4), а линейные функции F_i равенствами

$$F_1 = x_1K_1 - S_1, \quad F_2 = K_2, \quad F_3 = x_3K_3 - S_3 \tag{5.1}$$

Проверяем, что производные F_i в силу системы (2.3) можно записать в виде

$$\dot{F}_i = (-x_i\Delta a_i K_j + \left(x_i b_j + b_2)S_j\right) F_2 - \Delta c_i S_2 F_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 3$$

$$\dot{F}_2 = b_3K_1F_3 - b_1K_3F_1$$

Выполнение данных условий означает [23], что (F_1, F_2, F_3) — инвариантная система уравнений (2.3); если все функции этой системы равны нулю в начальный момент времени, то они равны нулю в любой момент времени. Если преобразовать систему (2.3), полагая $F_i = 0$, то получим систему трех уравнений

$$K_1'(\varphi) = -K_3, \quad K_3'(\varphi) = K_1, \quad \omega_r\omega_r' = \sigma_2 b_2 K_1 K_3, \quad \omega_r = b_2 S_2$$

Отсюда получаем формулы (3.1) для $K_i(\varphi)$ (где $q_1 = 0$) и (3.6) для скорости собственного вращения. Скорость прецессии зададим формулой (3.7). Из равенств (2.4) и (5.1) находим

$$\omega_1 = (a_1 + b_1x_1)K_1, \quad \omega_2 = b_2S_2, \quad \omega_3 = (a_3 + b_3x_3)K_3,$$

что позволяет записать угловую скорость в виде $\boldsymbol{\omega} = \tilde{\omega}_p\mathbf{K} + \omega_r\mathbf{e}_2$.

Таким образом, при конфигурационном условии (3.5) и выполнении начальных условий $F_i = 0$ твердое тело системы “тело + жидкость” будет совершать полурегулярную прецессию. Ось собственного вращения является одной из главных осей системы и ортогональна оси прецессии, скорость собственного вращения изменяется со временем.

Рассмотрим теперь полученные в разделе 4 при $m_2 = 0$, $m_1m_3 \neq 0$ условия (4.31) полурегулярной прецессии. Эти условия найдены для случая $\omega_r = \kappa K_3$ (формула (4.22)). В этом случае равенства (2.8) дают следующие связи между компонентами $\mathbf{S}$ и $\mathbf{K}$

$$S_1 = x_1K_1 + \frac{m_1}{b_1}\kappa K_3, \quad S_2 = x_2K_2, \quad S_3 = \left(x_3 + \frac{m_3}{b_3}\kappa\right)K_3 \tag{5.2}$$

Так как $\alpha = \kappa m_3$, то, учитывая равенства (4.25) и (4.26), получим

$$x_3 + \frac{m_3}{b_3}\kappa = -\frac{x_2}{x_1}, \quad \frac{m_1}{b_1}\kappa = \frac{m_1}{m_3}\frac{1 - x_1^2}{x_1}$$

Компоненты направляющего вектора оси собственного вращения определяются формулами (4.27) и последнее равенство запишем в виде

$$\frac{m_1}{b_1}\kappa = \mp\mu, \quad \mu \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{x_1}\sqrt{\left(1 - x_1^2\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right)} \tag{5.3}$$

Обозначим

$$F_1^{\pm} = S_1 - x_1K_1 \pm \mu K_3, \quad F_2 = S_2 - x_2K_2, \quad F_3 = S_3 + \frac{x_2}{x_1}K_3 \tag{5.4}$$

Связи (5.2) теперь можно записать следующим образом

$$F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{5.5}$$

Ранее [15] были получены условия, при которых существует линейная инвариантная система $\tilde{F}_1, \tilde{F}_3$

$$\tilde{F}_1 = K_1 + \nu_1 S_1, \quad \tilde{F}_3 = K_3 + \nu_3 S_3 \tag{5.6}$$

Если в конфигурационных условиях (4.31) выполнить перестановку индексов $(1\ 2\ 3) \to (2\ 3\ 1)$, то они совпадут с условиями [15] существования линейной инвариантной системы (5.6). В принятых выше обозначениях (5.4) – это система двух функций F_2, F_3.

Существование инвариантной системы (F_2, F_3) при выполнении конфигурационных условий (4.31) нетрудно проверить непосредственно. Действительно, при выполнении этих условий зададим параметры x_1, x_2 равенствами (4.30), тогда будут выполнены условия (2.8), (4.26), (4.28) и второе условие (4.24). Далее можно проверить, что производные функций F_2, F_3 в силу системы (2.3) записываются в виде

$$\dot{F}_2 = (x_1 \Delta a_1 K_1 - \Delta c_2 S_1) F_3, \quad \dot{F}_3 = \left(\frac{\Delta a_3}{x_1} K_1 - \Delta c_3 S_1\right) F_2$$

Отсюда следует, что (F_2, F_3) – инвариантная система уравнений (2.3).

Покажем теперь, что при выполнении двух конфигурационных условий (4.31) у уравнений Пуанкаре–Жуковского существует не только, как показано ранее [15], инвариантная система (F_2, F_3), но и линейные инвариантные системы

$$(F_1^+, F_2, F_3), \quad (F_1^-, F_2, F_3), \quad (F_1^+, F_1^-, F_2, F_3) \tag{5.7}$$

Вычислим для этого производные функций $F_1^\pm$, заданных равенством (5.4), в силу системы (2.3).

$$\begin{aligned}\dot{F}_1^\pm = -\Delta c_1 S_2 S_3 + b_3 K_3 S_2 - b_2 K_2 S_3 - x_1(-\Delta a_1 K_2 K_3 + b_3 S_3 K_2 - b_2 S_2 K_3) \\ \pm \mu(-\Delta a_3 K_1 K_2 + b_2 S_2 K_1 - b_1 S_1 K_2)\end{aligned}$$

Подставляя сюда из равенств (5.4) выражения

$$S_1 = F_1^\pm + x_1 K_1 \mp \mu K_3, \quad S_2 = F_2 + x_2 K_2, \quad S_3 = F_3 - \frac{x_2}{x_1} K_3$$

получим

$$\begin{aligned}\dot{F}_1^\pm = -\Delta c_1 F_2 F_3 + \left(\left(\Delta c_1 \frac{x_2}{x_1} + b_3 + b_2 x_1\right) K_3 \pm \mu b_2 K_1\right) F_2 \mp \mu b_1 K_2 F_1^\pm - \\ - (\Delta c_1 x_2 + b_2 + b_3 x_1) K_2 F_3 + P K_2 K_3 + Q K_1 K_2\end{aligned} \tag{5.8}$$

Здесь

$$\begin{gathered} Q = \pm\mu(-\Delta a_3 + b_2 x_2 - b_1 x_1) = 0 \\ P = \Delta c_1 \frac{x_2^2}{x_1} + 2 b_3 x_2 + b_2 \frac{x_2}{x_1} + x_1 \Delta a_1 + b_2 x_1 x_2 + b_1 \mu^2 \end{gathered} \tag{5.9}$$

Используя второе равенство (4.24) и равенство (4.28), запишем

$$\Delta c_1 = -\Delta c_2 - \Delta c_3 = b_1 \frac{1 - x_1^2}{x_1} - \frac{b_2}{x_2} - b_3 \frac{x_1}{x_2}$$

Равенство (5.9), учитывая формулы (2.9) и (5.3), запишем в виде

$$\begin{aligned}P = -b_3 x_2 - b_2 \frac{x_2}{x_1} + b_1 \frac{x_2^2}{x_1}\left(1 - x_1^2\right) + 2 b_3 x_2 + b_2 \frac{x_2}{x_1} + b_3 x_1 x_3 - \\ - b_2 x_1 x_2 + b_2 x_1 x_2 + b_1 \frac{\left(1 - x_1^2\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{x_1^2} = b_3 (x_2 + x_1 x_3) + b_1 \left(1 - x_1^2\right)\end{aligned}$$

Учитывая равенство (4.26), получим $P = 0$.

При $P = Q = 0$ из равенств (5.8) следует, что у системы (2.3) действительно существуют инвариантные системы (5.7).

Отметим еще, что производные функций F_5^+ и F_6^+ в силу системы (2.3) обращаются в ноль, если $F_1^+ = F_2 = F_3 = 0$, и производные функций F_5^- и F_6^- равны нулю, если $F_1^- = F_2 = F_3 = 0$, где обозначено

$$F_5^{\pm} = K_1 \pm \frac{1 - x_1^2}{\mu x_1} K_3, \quad F_6^{\pm} = S_1 \pm \frac{x_2\left(1 - x_1^2\right)}{\mu x_1} S_3$$

Условия $F_{5,6}^{\pm} = \mathrm{const}$, учитывая равенства (4.27) и (5.3), записываются в виде

$$m_1 K_1 + m_3 K_3 = \mathrm{const}, \quad m_1 S_1 + x_2 m_3 S_3 = \mathrm{const}$$

Параметры m_1, m_3 заданы формулами (4.27).

Векторы **K** и **S** имеют постоянные модули; если в начальный момент $F_2 = F_3 = 0$ и $F_1^+ = 0$ или $F_1^- = 0$, то в системе, связанной с твердым телом эти векторы описывают круговые конусы, оси которых задаются векторами $(m_1, 0, m_3)$ и $(m_1, 0, x_2 m_3)$. Движение твердой оболочки в инерциальном пространстве в данном случае — полурегулярная прецессия.

6. Анализ возможности полурегулярной прецессии систем, близких к сферически симметричным. Ранее [16, 17] было показано, что в случае, когда система “твердое тело + жидкость” близка к сферически симметричной (т.е. главные моменты инерции твердого тела мало отличаются друг от друга, полость мало отличается от сферы) регулярная прецессия возможна, только если ось собственного вращения является главной осью инерции. Приведены примеры [17] неосесимметричных удлиненных систем, которые могут совершать регулярную прецессию и в случае, когда ось собственного вращения отклонена от главной оси инерции.

Ниже показано, что при распределении масс, близком к сферически симметричному, полурегулярная прецессия, так же как и регулярная прецессия, возможна только в случае, когда ось собственного вращения совпадает с одной из главных осей инерции системы.

Выделим сначала случай осевой симметрии, тогда

$$\begin{gathered} d_1 = d_3, \quad \beta_1 = \beta_3 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \beta, \quad \beta_2 = 1, \quad a_1 = a_3 \stackrel{\mathrm{def}}{=} a, \quad b_1 = b_3 = \beta a \stackrel{\mathrm{def}}{=} b \\ \Delta a_2 = \Delta b_2 = \Delta c_2 = 0, \quad b_2 = a_2 \end{gathered} \tag{6.1}$$

При условиях (6.1) выполнены конфигурационные условия (3.6) и условия (4.3) и (4.9). Условия (4.19) и (4.21) также выполнены, так как в случае осевой симметрии

$$S_a = S_c = 0, \quad \Delta c_3 \Delta a_1 - \Delta c_1 \Delta a_3 = \Delta c_2 \Delta a_3 - \Delta c_3 \Delta a_2 = 0$$

Отметим, что из формул (2.9) и (6.1) следует $x_1 = x_3$ и формула (3.6) тогда дает $\omega_r = \mathrm{const}$. Если же ось собственного вращения не совпадает с главной осью, второе уравнение (2.11) при учете формул (6.1) и (4.1) записывается в виде

$$(1 + x_2)\left(m_3 K_1 - m_1 K_3\right) = (1 + x_2) q \cos\varphi = 0$$

Из формулы (2.8) получаем, что при $b_2 = a_2$ и $x_2 = -1$ скорость прецессии равна нулю. Следовательно, при осевой симметрии полурегулярная прецессия невозможна.

Далее будем рассматривать случай, когда полуоси полости мало отличаются друг от друга, $d_i \approx d$, $i = 1, 2, 3$.

Для анализа полученных выше условий удобно использовать формулы, следующие из определений (2.2) используемых параметров

$$\Delta\gamma_1 = \frac{5}{\mu}\cdot\frac{\delta_2-\delta_3}{(\delta_1+\delta_2)(\delta_1+\delta_3)}, \quad \delta_i \overset{\text{def}}{=} d_i^2, \quad \Delta c_1 = \Delta\gamma_1 + \Delta a_1 + \zeta_3 a_3 - \zeta_2 a_2$$
$$\zeta_1 \overset{\text{def}}{=} 1-\beta_1^2 = r_1(\Delta\gamma_1)^2, \quad \beta_1 - \beta_2\beta_3 = s_1\Delta\gamma_2\Delta\gamma_3 \tag{6.2}$$
$$r_1 = \left(\frac{\mu}{5}\right)^2\frac{(\delta_1+\delta_2)^2(\delta_1+\delta_3)^2}{(\delta_2+\delta_3)^2}, \quad s_1 = -\left(\frac{\mu}{5}\right)^2\beta_1(\delta_2+\delta_3)^2 \ (1\ 2\ 3)$$

Рассмотрим сначала изученный в разделе 3 случай, когда ось собственного вращения совпадает с одной из главных осей.

Конфигурационное условие (3.5) после некоторых преобразований с учетом равенств (2.2) и (6.2) приводится к виду

$$(1-\zeta_2)\Big(a_2\Delta a_2(\Delta\gamma_3-\Delta\gamma_1) + a_1a_2a_3(\zeta_3-\zeta_1) + a_2^2\Delta a_2\zeta_2\Big) +$$
$$+ a_1a_3((1-\zeta_1)\Delta\gamma_1 + (1-\zeta_3)\Delta\gamma_3) + \Delta a_2\Delta\gamma_1\Delta\gamma_3 = 0 \tag{6.3}$$

Если теперь считать, что полость мало отличается от сферы $d_i \approx d$ и $\Delta\gamma_i = O(\varepsilon)$, то из условия (6.3) при учете равенств (6.2) получим

$$a_1a_3\Delta\gamma_2 + a_2\Delta a_2(\Delta\gamma_1-\Delta\gamma_3) - \Delta a_2\Delta\gamma_1\Delta\gamma_3 + a_1a_2a_3(\zeta_1-\zeta_3) - a_2^2\Delta a_2\zeta_2 = O\big(\varepsilon^3\big)$$

Это условие, учитывая формулы (6.2) для параметров ζ_i, запишем в виде

$$a_1a_3\Delta\gamma_2 + a_2\Delta a_2(\Delta\gamma_1-\Delta\gamma_3) - \Delta a_2\Delta\gamma_1\Delta\gamma_3 - a_2^2\Delta a_2 r(\Delta\gamma_2)^2 +$$
$$+ a_1a_2a_3 r(\Delta\gamma_3-\Delta\gamma_1) = O\big(\varepsilon^3\big),$$
$$r = \left(\frac{2\mu d^2}{5}\right)^2 \tag{6.4}$$

Если $\Delta\gamma_{1,3} = O(\varepsilon)$, то в случае, когда $a_i \approx a$, условие (6.4) может быть выполнено, если

$$\Delta\gamma_2 = O\big(\varepsilon^2\big), \quad \Delta a_2 = O(\varepsilon)$$

В этом случае $\Delta\gamma_1 = -\Delta\gamma_3 + O\big(\varepsilon^2\big)$ и условие (6.4) принимает вид

$$\Delta\gamma_2 = 2\frac{\Delta a_2}{a}\Delta\gamma_3 + O\big(\varepsilon^3\big)$$

Учитывая определения параметров (2.2) и формулы (6.2), последнее условие запишем в виде

$$\frac{A_3-A_1}{A_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d_3-d_1}{d_2-d_1} + O\big(\varepsilon^2\big)$$

Здесь $d_2 - d_1 = O(\varepsilon)$, $A_3 - A_1 = O(\varepsilon)$, $d_3 - d_1 = O\big(\varepsilon^2\big)$.

Рассмотрим теперь возможность выполнения конфигурационных условий в случае несовпадения оси собственного вращения с главной осью инерции.

В разделе 4 для этого случая приведены три возможных варианта условий: 1) условия (4.3) и (4.9); 2) условия (4.19) и (4.21); 3) условия (4.31).

Рассмотрим сначала вариант 2. Из формул (4.12) и (2.12) следует равенство $\sigma_2 = 0$. Если в это равенство подставить x_1 и x_3 из формул (4.8) и учесть условие (4.19), то получим равенство

$$m_1^2b_3^2 + m_3^2b_1^2 = m_1^2m_3^2(\Delta a_2)^2$$

Отсюда следует, что случай, близкий к осевой симметрии, когда $\Delta a_2 \approx 0$, $b_1 \approx b_3$, здесь невозможен. Следовательно, недопустима и конфигурация, близкая к сферической.

Рассмотрим теперь вариант 3. Обозначим

$$\Psi_1 = (b_1^2 + \Delta a_2 \Delta a_3)\left(b_1^2 + \Delta c_2 \Delta c_3\right)$$

$$\Psi_i = \left(b_i \Delta a_i + (-1)^j b_1 b_j\right)\left(b_i \Delta c_i + (-1)^j b_1 b_j\right), \quad i, j = 2,3, \quad i \neq j$$

Условия (4.31) можно записать в виде

$$\Psi_2 = \Psi_3, \quad 2\Psi_1 = \Psi_2 + \Psi_3 \tag{6.5}$$

При $\Delta\gamma_i = O(\varepsilon)$, учитывая равенства (2.2) и (6.2), получаем оценки

$$\Psi_1 = \varphi^2 + \varphi(\Delta\gamma_3 \Delta a_2 + \Delta\gamma_2 \Delta a_3 + \Delta\gamma_2 \Delta\gamma_3 + r a_2 a_3 \left((\Delta\gamma_2)^2 + (\Delta\gamma_3)^2\right) -$$

$$- r a_1 a_3 \left((\Delta\gamma_1)^2 + (\Delta\gamma_3)^2\right) - r a_1 a_2 \left((\Delta\gamma_1)^2 + (\Delta\gamma_2)^2\right)) + O\left(\varepsilon^3\right)$$

$$\Psi_i = \varphi(\varphi + (-1)^j a_i \Delta\gamma_i + r(a_2 a_3 (\Delta\gamma_j)^2 - a_1 a_i (\Delta\gamma_1)^2 - (\Delta\gamma_i)^2 + 2a_1 a_j \Delta\gamma_1 \Delta\gamma_j)) + O\left(\varepsilon^3\right)$$

$$i, j = 2,3, \quad \varphi \overset{\text{def}}{=} a_2 (a_1 + a_3) - a_1 a_3$$

При $\varphi = 0$ получаем $A_2 = A_1 + A_3$. Если ядро близко к сферическому, то величины A_i^{eq} малы и при $\varphi = 0$ элементы твердого тела должны быть близки к некоторой плоскости; этот случай здесь не рассматриваем.

Из условий (6.5) следует

$$a_1 \Delta\gamma_1 + a_3 \Delta\gamma_3 = O\left(\varepsilon^3\right), \quad (a_1 - 2a_2)\Delta\gamma_1 + (2a_2 - a_3)\Delta\gamma_3 = O\left(\varepsilon^3\right)$$

Если $a_2 \approx a$, то эти условия не могут быть одновременно выполнены при сделанном изначально предположении $\Delta\gamma_i = O(\varepsilon)$.

Рассмотрим оставшийся вариант 1. Анализ, аналогичный приведенному выше для варианта 3, показывает, что система условий (4.3), (4.9) не может быть выполнена при конфигурации системы, близкой к сферической. Кратко пояснить невозможность выполнения этих условий можно следующим образом.

Условие (4.9) при учете формулы (4.8) запишем в виде

$$\Phi \overset{\text{def}}{=} (b_2 + x_2 \Delta c_1)\frac{b_1^2 - b_3^2}{\Delta a_2} + b_1 b_3 = 0$$

Для системы, близкой к сферической, это условие не может быть выполнено, так как в этом случае из формулы (4.4) следует $x_2 \approx -1$, а также имеем

$$b_i \approx a_i, \quad a_i \approx a, \quad b_1^2 - b_3^2 \approx -2a\Delta a_2, \quad \Delta c_i \approx 0$$

Отсюда следует $\Phi \approx -a^2 \neq 0$.

Заключение. Классическая модель Пуанкаре–Жуковского–Хафа, описывающая движение твердого тела с наполненной жидкостью эллипсоидальной полостью, продолжает широко использоваться в настоящее время. Многие задачи, детально исследованные для твердого тела, для системы "твердое тело + жидкость" еще не решены. В настоящей работе найдены конфигурационные условия, при которых тело может совершать полурегулярную прецессию. При совпадении оси собственного вращения с главной осью инерции достаточно одного условия, если оси не совпадают, то конфигурационных условий два. Получено в эллиптических функциях периодическое решение, описывающее полурегулярную прецессию. Показано, что конфигурационных условий полурегулярной прецессии достаточно для существования у уравнений Пуанкаре—Жуковского инвариантной системы из трех линейных функций.

Рассмотрено свободное вращение близкой к сферически симметричной системы “твердое тело + жидкость”. Доказано, что для таких систем полурегулярная прецессия возможна только при совпадении оси собственного вращения с одной из главных осей инерции. Выполненное упрощение конфигурационного условия дает простую связь между разностью экваториальных моментов инерции твердой мантии и соответствующей разностью моментов жидкого ядра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуковский Н.Е.* Собр. соч. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1948. С. 31—152.
2. *Hough S.S.* The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid // Philos. Trans. R. Soc. Lond. 1895. A 186. P. 469—506.
3. *Пуанкаре А.* Последние работы. М.; Ижевск: НИЦ РХД, 2001. С. 74—111.
4. *Touma J., Wisdom J.* Nonlinear core—mantle coupling // Astron. J. 2001. V. 122. P. 1030—1050.
5. *Henrard J.* The rotation of Io with a liquid core // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2008. V. 101. Iss. 1—2. P. 1—12.
6. *Rambaux N., Hoolst Van T., Dehant V., Bois E.* Internal core-mantle coupling and libration of Mercury // Astron. & Astrophys. 2007. V. 468. P. 711—719.
7. *Dufey J., Noyelles B., Rambaux N., Lemaitre A.* Latitudinal librations of Mercury with a fluid core // Icarus. 2009. V. 203. P. 1—12.
8. *Noyelles B., Dufey J., Lemaitre A.* Core—mantle interactions for Mercury // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2010. V. 7. P. 479—496.
9. *Noyelles B.* Behavior of nearby synchronous rotations of a Poincaré—Hough satellite at low eccentricity // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2012. V. 112. Iss. 4. P. 353—383.
10. *Boué G., Rambaux N., Richard A.* Rotation of a rigid satellite with a fluid component: a new light onto Titan’s obliquity // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2017. V. 129. Iss. 4. P. 449—485.
11. *Boué G.* Cassini states of a rigid body with a liquid core // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2020. V. 132. Iss. 3. Article number: 21.
12. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle prezessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura e Appl. 1947. V. 26. Fasc. 3—4. P. 271—281.
13. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДонНУ, 2009. 222 с.
14. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egyp. J. Basic & Appl. Sci. 2015. 2:3 P. 200—205.
15. *Ольшанский В.Ю.* О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 559—571.
16. *Ol’shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. Iss. 12. Art. no. 57.
17. *Ol’shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2020. V. 132. Iss. 9. Art. no. 46.
18. *Горр Г.В., Щетинина Е.К.* Полурегулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. 2014. Вып. 44. С. 16—26.
19. *Ольшанский В.Ю.* Линейные инвариантные соотношения уравнений Пуанкаре—Жуковского // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 29—45.
20. *Ольшанский В.Ю.* Частные линейные интегралы уравнений Пуанкаре—Жуковского (общий случай) // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 4. С. 399—419.
21. *Ламб Г.* Гидродинамика. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. 928 с.
22. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
23. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики в 2 т. Т. 2, ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит. 1951. 555 с.

Semi-regular Precession of an Asymmetrical Rigid Body with a Liquid Filling

V. Yu. Ol'shanskii[a,#]

[a] *Institute of Precision Mechanics and Control RAS, Saratov, Russia*
[#] *e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru*

To describe the rotation of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with an ideal vorticated liquid, the Poicare–Zhukovsky equations are used. It is obtained constraints (called as configuration conditions) for the bodies and cavities principal moments of inertia, under which the rigid body can perform the semi-regular precession when the precession rate is constant and the rate of its proper rotation changes with time. When the proper rotation axis coincides with the principal axis of inertia, one condition is sufficient, if the axes are not coincide, then number of configuration conditions is two. It is shown that, under fulfillment the configuration conditions of semi-regular precession, the Poincaré–Zhukovsky equations have an invariant system of three linear functions. The analysis of configuration conditions for systems close to spherically symmetric is carried out.

Keywords: liquid-filled rigid body, Poicare–Zhukovsky equations, semi-regular precession

REFERENCES

1. *Zhukovsky N.E.* On motion of rigid body with cavities filled by homogenous drop-like liquid // In: Sobranie sochinenii (Collection of Scientific Works), vol. 2. pp. 31–152. Moscow: Gostekhizdat. 1948.
2. *Hough S.S.* The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid // Philos. Trans. R. Soc. Lond., 1895, A 186, pp. 469–506.
3. *Poincaré H.* Sur la precession des corps deformables // Bull. Astr., 1910, vol. 27, pp. 321–356.
4. *Touma J., Wisdom J.* Nonlinear core–mantle coupling // Astron. J., 2001, vol. 122, pp. 1030–1050.
5. *Henrard J.* The rotation of Io with a liquid core // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2008, vol. 101, iss. 1–2, pp. 1–12.
6. *Rambaux N., Hoolst Van T., Dehant V., Bois E.* Internal core-mantle coupling and libration of Mercury // Astron.&Astrophys., 2007, vol. 468, pp. 711–719.
7. *Dufey J., Noyelles B., Rambaux N., Lemaitre A.* Latitudinal librations of Mercury with a fluid core // Icarus, 2009, vol. 203, pp. 1–12.
8. *Noyelles B., Dufey J., Lemaitre A.* Core–mantle interactions for Mercury // Mon. Not. R. Astron. Soc., 2010, vol. 7, pp. 479–496.
9. *Noyelles B.* Behavior of nearby synchronous rotations of a Poincaré–Hough satellite at low eccentricity // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2012, vol. 112, iss. 4, pp. 353–383.
10. *Boué G., Rambaux N., Richard A.* Rotation of a rigid satellite with a fluid component: a new light onto Titan's obliquity // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2017, vol. 129, iss. 4, pp. 449–485.
11. *Boué G.* Cassini states of a rigid body with a liquid core // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2020, vol. 132, iss. 3, Art. no. 21.
12. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle prezessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura e Appl., 1947, vol. 26, Fasc. 3–4, pp. 271–281.
13. *Gorr G.V., Maznev A.V., Shchetinina E.K.* Precession Motions in Rigid Body Dynamics and Dynamics of Linked Rigid Bodies Systems. Donetsk: Donetsk National Univ. 2009. (in Russian)
14. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Basic&Appl. Sci., 2015, 2:3, pp. 200–205.
15. *Ol'shanskii V.Yu.* On the regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Mech. Solids, 2018, vol. 53 (Suppl. 2), pp. 95–106.
16. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2019, vol. 131, iss.12, Art. no. 57.

17. *Ol'shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2020, vol.132, iss. 9, Art. no. 46.
18. *Gorr G.V., Shchetinina E.K.* Semi-regular precessions of a heavy gyrostat carrying two rotors // Mech. Solids, 2014, iss. 44, pp. 16–26.
19. *Ol'shanskii V.Yu.* Linear invariant relations of the Poincaré–Zhukovskii equations // JAMM, 2014, vol. 78, iss. 1, pp. 18–29.
20. *Ol'shanskii V.Yu.* Partial linear integrals of the Poincaré–Zhukovskii equations (the general case) // JAMM, 2017, vol. 81, iss. 4, pp. 270–285.
21. *Lamb H.* Hydrodynamics. N.Y.: Dover Publ., 1945.
22. *Moiseyev N.N., Rumyantsev V.V.* Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid. Berlin: Springer, 1968.
23. *Levi-Civita T., Amaldi U.*, Lezioni di Meccanica Razionale. Vol. 2, Pt 2. Bologna: N. Zanichelli, 1928.