

УДК 531.011:521.1

*К столетию со дня рождения академика В.В. Румянцева***О МНОГООБРАЗИИ “ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПРОПЕЛЛЕР”
В ОБОБЩЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА**© 2021 г. П. С. Красильников^{1,*}¹ *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия***e-mail: krasil06@rambler.ru*

Поступила в редакцию 01.02.2021 г.

После доработки 03.03.2021 г.

Принята к публикации 15.03.2021 г.

Исследуются поступательно-вращательные движения однородного стержня малой массы в круговой ограниченной задаче трех тел, когда притягивающие тела имеют одинаковые массы. Описан новый тип движений стержня, когда его центр масс перемещается вдоль нормали к плоскости вращения основных тел, при этом сам стержень непрерывно вращается вокруг этой нормали, образуя с ней постоянный угол $\pi/2$ (многообразие “гравитационный пропеллер”).

Показано также, что указанное многообразие движений включает в себя, как частный случай, два типа движений стержня. К движениям первого типа мы относим вращения стержня с постоянной угловой скоростью, совпадающей с угловой скоростью вращения основных тел. Движения второго типа – плоские неравномерные вращения стержня в плоскости движения основных тел. Существует также многообразие движений, когда стержень поступательно движется вдоль нормали, будучи ориентирован вдоль нее. Дано описание движений на этих многообразиях.

Ключевые слова: поступательно вращательные движения, стержень, интегральные многообразия, задача Ситникова

DOI: 10.31857/S0032823521040081

1. Введение. Известно, что Румянцев В.В. уделял, вместе с учениками, особое внимание задаче о поступательно-вращательных движениях искусственных небесных тел. Так, в статье [1] спутник моделируется динамически-симметричным твердым телом, даны достаточные условия устойчивости его стационарных движений, когда центр масс спутника остается в точке либрации ограниченной задачи трех тел. Аналогичные исследования проведены в работе [2], но для спутника-гиростата. К сожалению, поступательно-вращательные движения твердого тела в ограниченной задаче трех тел исследованы мало. Приведем еще статьи [3, 4], в которых доказано существование частных движений гантели, расположенной в треугольной точке либрации круговой ограниченной задачи трех тел, исследована устойчивость этих движений. В статьях [5, 6] исследованы некоторые периодические режимы поступательно-вращательных движений космического аппарата в системе Земля–Луна и их устойчивость. В статье [7] исследуется движение материального отрезка в поле притяжения двух неподвижных притягивающих центров с равными массами и отстоящих друг от друга на чисто мнимом расстоянии $2ic$.

Рассмотрим задачу о поступательно-вращательном движении твердого тела (стержня) пренебрежимо малой массы в гравитационном поле двух одинаковых по массе ос-

новых тел (звезд) при условии, что основные тела вращаются вокруг общего центра масс по круговой орбите радиус a . С помощью стержня мы будем моделировать протяженный космический аппарат, длина которого существенно превалирует над его поперечными размерами. Если пренебречь размерами тела, рассматривая его как материальную точку, то движение тела описывается уравнениями копенгагенской ограниченной задачи трех тел. Известно, что уравнения этой задачи интегрируются для случая одномерного движения материальной точки вдоль оси, проходящей через центр масс основных тел перпендикулярно плоскости движения этих тел. Этот частный случай движения принято называть задачей Ситникова [8].

Исследуемую задачу будем называть обобщенной задачей Ситникова. Если классическая задача Ситникова (эллиптическая) имеет дело с частными движениями материальной точки вдоль указанной нормали в виде осциллирующих движений с нарастающей амплитудой, хаотических движений, периодических движений и движений с бифуркациями, с устойчивостью относительных равновесий и периодических движений [9–15], то в обобщенной задаче Ситникова исследуются вращения твердого тела, когда его центр масс перемещается вдоль нормали к плоскости движения основных тел. При этом следует различать два типа задач, отличающихся друг от друга степенью сложности. К первому типу мы относим задачи динамики твердого тела, когда его силовая функция U вычисляется строго (как для случая стержня). Ко второму типу – задачи с приближенными значениями силовой функции, когда удерживаются несколько первых зональных гармоник в разложении силовой функции в ряд.

2. Уравнения движения стержня, силовая функция задачи. Запишем уравнения движения однородного стержня массы m и длины $2l$ в гравитационном поле притяжения двух одинаковых по массе M основных тел, вращающихся вокруг их общего центра масс C по круговой орбите радиуса a . Пусть $C\xi\eta\zeta$ инерциальная система координат, $Cxuz$ – синодическая система координат, в которой ось Cx соединяет основные тела во все время движения, ось Cz направлена по нормали к плоскости движения этих тел, ось Cy дополняет систему до правой тройки. Со стержнем свяжем оси $Ox'y'z'$ где O – центр масс стержня, z' направим вдоль стержня, оси x', y' – перпендикулярно стержню. Наряду со связанной системой координат $Ox'y'z'$ рассмотрим также поступательно движущиеся оси $O\xi'\eta'\zeta'$, ориентированные параллельно осям инерциальной системы $C\xi\eta\zeta$. Ориентацию осей $Ox'y'z'$ относительно $O\xi'\eta'\zeta'$ зададим с помощью углов Эйлера ψ, φ, θ , где ψ – угол прецессии, φ – угол собственного вращения, θ – угол нутации. Тогда уравнения движения центра масс стержня примут вид

$$m\ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad m\ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad m\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad (2.1)$$

где ξ, η, ζ – координаты центра масс O стержня, $U = U(\xi, \eta, \zeta, \psi, \varphi, \theta, t)$ – силовая функция задачи.

Уравнения вращения по углам Эйлера можно записать в виде уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (2.2)$$

Здесь

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + \frac{ml^3}{6}(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2)$$

кинетическая энергия стержня. Заметим, что второе равенство из системы уравнений (2.2) удовлетворяется тождественно, так как T и U не зависят от угла φ и ее производной по времени.

Подставляя кинетическую энергию в первое и третье уравнения системы (2.2), получим

$$\dot{\psi} = -2\dot{\psi}\dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{A \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \ddot{\theta} = \dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad \left(A = \frac{ml^3}{3} \right) \quad (2.3)$$

Уравнения (2.1), (2.3) описывают абсолютные поступательно-вращательные движения стержня в поле притяжения двух массивных тел.

Опишем силовую функцию задачи $U = U_1 + U_2$, где U_j – силовая функция притяжения стержня со стороны основного тела с номером j . Фиксируем точку стержня массы dm с координатами $x' = y' = 0$, $z' = z'$ в связанных осях. В поступательно движущихся осях $O\xi' \eta' \zeta'$ имеем следующие координаты этой точки:

$$\xi' = \alpha'' z', \quad \eta' = \beta'' z', \quad \zeta' = \gamma'' z'$$

Здесь α'' , β'' , γ'' – направляющие косинусы оси z' с осями $O\xi'$, $O\eta'$, $O\zeta'$ соответственно. Несложно видеть, что

$$\alpha'' = \sin \psi \sin \theta, \quad \beta'' = -\cos \psi \sin \theta, \quad \gamma'' = \cos \theta$$

Учитывая, что координаты центра масс O стержня AB в инерциальных осях есть ξ , η , ζ , а координаты первой притягивающей массы есть $(a \cos \omega_0 t, a \sin \omega_0 t, 0)$, где ω_0 – частота движения основных тел по круговой орбите, получим выражение для полярного радиуса r_1 массы dm :

$$r_1 = \sqrt{(\xi + \sin \psi \sin \theta z' - a \cos \omega_0 t)^2 + (\eta - \cos \psi \sin \theta z' - a \sin \omega_0 t)^2 + (\zeta + \cos \theta z')^2}$$

Полярный радиус r_2 вычисляется аналогично с условием замены a на $(-a)$.

Силовая функция задачи есть

$$U = U_1 + U_2, \quad U_j = fM\rho \int_{-l}^l \frac{1}{r_j} dz' \quad (j = 1, 2),$$

где ρ – постоянная плотность однородного стержня. Вычисления показывают, что

$$U_1 = -fM\rho \ln \frac{\gamma - l + \sqrt{l^2 - 2l\gamma + (\xi - a \cos \omega_0 t)^2 + (\eta - a \sin \omega_0 t)^2 + \zeta^2}}{\gamma + l + \sqrt{l^2 + 2l\gamma + (\xi - a \cos \omega_0 t)^2 + (\eta - a \sin \omega_0 t)^2 + \zeta^2}}$$

$$\gamma = -a \sin \theta \sin(\psi - \omega_0 t) + \zeta \cos \theta + \sin \theta (\xi \sin \psi - \eta \cos \psi)$$

Выражение для U_2 имеет аналогичный вид с учетом замены a на $(-a)$.

Очевидно, область возможных движений стержня соответствует положительным значениям подкоренных выражений, входящих в функцию U , что возможно при выполнении неравенства

$$l^2 + (\xi - a \cos \omega_0 t)^2 + (\eta - a \sin \omega_0 t)^2 + \zeta^2 > 2l|\gamma|$$

и родственного ему (a заменяется на $-a$) для любых значений углов θ , ψ и времени t . Всюду ниже считаем, что $a > l$.

3. Интегральные многообразия уравнений движения стержня. Рассмотрим многообразие решений системы уравнений (2.1), (2.3) следующего вида:

$$\text{I. } \xi = \eta = 0, \quad \zeta = z(t), \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \omega_0 t + \delta(t) \quad (3.1)$$

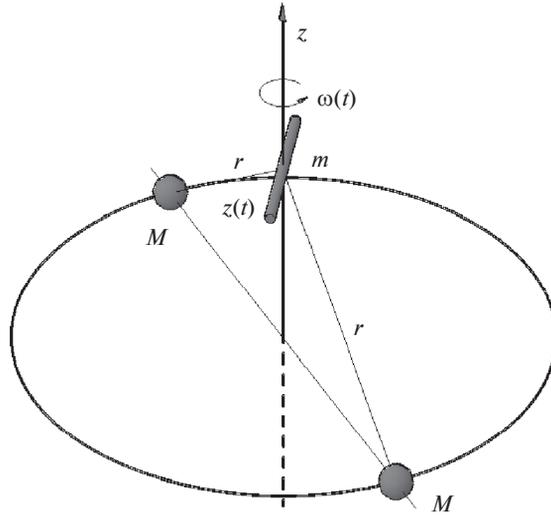


Рис. 1. Движение стержня по типу “гравитационный пропеллер”.

Вычисления показывают, что уравнения по ξ, η, θ удовлетворяются тождественно, уравнения по ζ, ψ приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -\frac{z}{l} \left[\sqrt{\Delta_1}(l + a \sin \delta) + \sqrt{\Delta_2}(l - a \sin \delta) \right] \\ l\ddot{\delta} &= \frac{3a \cos \delta}{l^3} \left[\sqrt{\Delta_1}(a^2 + z^2 + la \sin \delta) - \sqrt{\Delta_2}(a^2 + z^2 - la \sin \delta) \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь двоеточием сверху обозначена вторая производная по новому времени τ

$$d\tau = \sqrt{\frac{fM}{(a^2 \cos^2 \delta + z^2)\sqrt{\Delta_1\Delta_2}}} dt$$

Величины Δ_1, Δ_2 описываются формулами

$$\Delta_1 = l^2 - 2la \sin \delta + a^2 + z^2, \quad \Delta_2 = l^2 + 2la \sin \delta + a^2 + z^2$$

Это значит, что (3.1) является интегральным многообразием, его конфигурационное пространство есть цилиндр $R \times S^1$. Система уравнений (3.2) описывает движения вдоль этого многообразия. Стержень совершает сложное движение: его центр масс движется вдоль неподвижной нормали (оси Cz) к плоскости Cxy движения главных тел, проходящей через их центр масс, а сам стержень вращается вокруг этой оси с абсолютной угловой скоростью $(\omega_0 + \dot{\delta})$ в плоскостях, параллельных плоскости Cxy , при этом поступательные и вращательные движения завязаны (рис. 1). Заметим, что эти вращения подобны ротационному движению вертолета, когда вертолет планирует при выключенном двигателе за счет вращения лопастей.

Уравнения (2.1), (2.3) допускают также дополнительные интегральные подмногообразия вида (3.1), когда угол $\delta = \text{const}$. Действительно, при $\delta = \pi/2, 3\pi/2$, либо $\delta = 0, \pi$ второе уравнение системы (3.2) удовлетворяется тождественно, в то время как первое уравнение задает закон движения вдоль оси Cz . Этот закон разный для разных значений δ . Этим многообразиям отвечает абсолютное вращение стержня с постоян-

ной угловой скоростью ω_0 , поэтому в синодической системе координат, вращающейся с той же самой угловой скоростью, стержень движется поступательно вдоль оси Cz . Рассмотрим многообразия

$$\text{Ia. } \xi = \eta = 0, \quad \zeta = z(t), \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \omega_0 t + \frac{k\pi}{2} \quad (k = 1, 3) \quad (3.3)$$

Уравнение движения стержня вдоль оси z имеет вид

$$\ddot{z} = \frac{2fM\rho}{z} \left[\frac{a-l}{\sqrt{(a-l)^2 + z^2}} - \frac{a+l}{\sqrt{(a+l)^2 + z^2}} \right] \quad (3.4)$$

В этом случае стержень ориентирован параллельно оси Cx во все время движения и перемещается поступательно относительно синодических осей вдоль оси Cz . Отметим, что существование интегрального многообразия (3.3) следует также из физических соображений. Действительно, в силу симметрии задачи силы гравитационного притяжения дают составляющую вдоль оси Cz , в то время как проекции этих сил вдоль стержня уничтожают друг друга для каждой пары точек стержня, расположенных симметрично относительно его центра масс O . В равномерно вращающихся синодических осях переносные силы инерции также уничтожают друг друга для указанных пар точек стержня, кориолисовы силы инерции равны нулю. Итак, главный вектор сил направлен по оси Cz , главный момент сил равен нулю. Стержень движется поступательно вдоль оси Cz .

Для многообразия

$$\text{Ib. } \xi = \eta = 0, \quad \zeta = z(t), \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \omega_0 t + k\pi \quad (k = 0, 1) \quad (3.5)$$

уравнение движения вдоль оси z имеет вид

$$\ddot{z} = \frac{2Mfz}{\sqrt{l^2 + a^2 + z^2}(a^2 + z^2)} \quad (3.6)$$

Здесь стержень движется вдоль оси Cz поступательно (относительно синодических осей $Cxuz$) так, что он перпендикулярен оси Cx во все время движения.

Отметим также интегральное подмногообразие

$$\text{Ic. } \xi = \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \omega_0 t + \delta(t) \quad (3.7)$$

для которого уравнение по углу δ имеет вид

$$I\delta'' = \frac{3a \cos \delta}{l^3} \left[\sqrt{l^2 - 2la \sin \delta + a^2(a^2 + la \sin \delta)} - \sqrt{l^2 + 2la \sin \delta + a^2(a^2 - la \sin \delta)} \right] \quad (3.8)$$

В этом случае стержень вращается неравномерно вокруг собственного центра масс, совпадающего с центром масс основных притягивающих тел, плоскость его вращений совпадает с плоскостью движения этих тел.

В заключение исследований укажем еще на одно интегральное многообразие

$$\text{II } \xi = \eta = 0, \quad \zeta = z(t), \quad \theta = 0, \quad (3.9)$$

которому соответствует поступательное движение стержня вдоль оси Cz , при этом сам стержень ориентирован вдоль оси Cz во все время движения. На этом многообразии вырождаются углы Эйлера и появляются особенности в правых частях уравнений (2.1), (2.3). Поэтому для доказательства интегральности многообразия (3.9) воспользуемся физическими соображениями. В силу симметрии расположения стержня в синодических осях и симметрии гравитационного воздействия главный вектор гравитационных сил ориентирован вдоль оси Cz , переносные и кориолисовы силы инерции рав-

ны нулю. Главный момент внешних сил относительно центра масс стержня равен нулю. Поэтому стержень, ориентированный вдоль оси Cz в начальный момент времени и движущийся поступательно вдоль этой оси, сохранит это движение.

Силовая функция стержня на этом многообразии имеет вид

$$U = 2fM\rho \ln \frac{z+l+\sqrt{(l+z)^2+a^2}}{z-l+\sqrt{(l-z)^2+a^2}}$$

Тогда колебания центра масс стержня вдоль оси Cz описываются уравнением

$$\ddot{z} = 2fM\rho \left(\frac{1}{\sqrt{(l+z)^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l-z)^2+a^2}} \right) \quad (3.10)$$

4. Исследование движений на одномерных многообразиях. Рассмотрим движения вдоль одномерных многообразий (3.3), (3.5), (3.7), (3.9). Исследуем многообразие \mathbf{Ia} (см. (3.3)). Уравнение движений (3.4) стержня допускает частное решение $z = 0$, несмотря на то, что правая часть этого уравнения неопределена в нуле при $a > l$ (неопределенность $0/0$ устраняется стандартно). Этому решению отвечает относительное равновесие стержня в синодических осях, когда он ориентирован вдоль прямой, соединяющей притягивающие тела, при этом его центр масс совпадает с центром масс притягивающих тел, а сам стержень находится в плоскости движения этих тел. Такое стационарное движение является аналогом относительного равновесия стержня типа “спица” в центральном гравитационном поле [16].

Интеграл энергии задачи приводится к виду

$$m \frac{\dot{z}^2}{2} + fM\rho \ln \frac{(-a-l+\sqrt{(a+l)^2+z^2})(a-l+\sqrt{(a-l)^2+z^2})}{(-a+l+\sqrt{(a-l)^2+z^2})(a+l+\sqrt{(a+l)^2+z^2})} = h,$$

если движения стержня рассматривать в синодических осях. Вычисления показывают, что фазовый портрет задачи топологически подобен фазовому портрету колебаний материальной точки в круговой задаче Ситникова (рис. 2).

Отсюда следует, в частности, что положение относительного равновесия $z = 0$, в котором стержень принадлежит плоскости вращения основных тел и ориентирован вдоль оси Sx , соединяющей притягивающие тела, устойчиво по отношению к малым возмущениям в z и \dot{z} , сохраняющим движение стержня вдоль интегрального многообразия (3.3).

Рассмотрим интегральное многообразие (3.5). Отметим, что уравнение движения стержня (3.6) допускает частное решение z , при котором стержень расположен в плоскости движения основных тел, при этом его центр масс совпадает с центром масс этих тел, стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 в инерциальном пространстве так, что сохраняет постоянный угол $\pi/2$ с прямой, соединяющей основные тела. Такое стационарное движение является аналогом относительного равновесия типа “стрела”, обнаруженное Дубошиным Г.Н. [16] в центральном силовом поле. Интеграл энергии имеет следующий вид в синодических осях:

$$m \frac{\dot{z}^2}{2} - 2fM\rho \ln \frac{\sqrt{l^2+a^2+z^2}+l}{\sqrt{l^2+a^2+z^2}-l} = h$$

Фазовый портрет колебаний стержня вдоль оси Cz подобен фазовому портрету колебаний материальной точки в круговой задаче Ситникова.

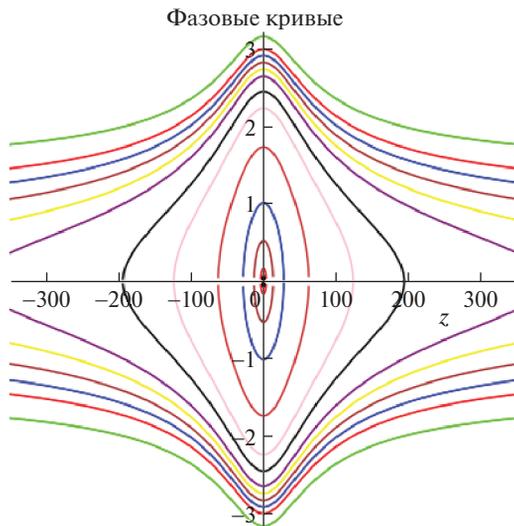


Рис. 2. Фазовый портрет колебаний на многообразии (3.3), $l = a/2$.

Исследуем многообразии (3.7). Интеграл энергии имеет вид

$$\frac{\rho l^3}{6} (\dot{\delta} + \omega_0)^2 - U = h,$$

$$U = fM\rho \ln \frac{(-a \sin \delta + l + \sqrt{l^2 - 2la \sin \delta + a^2})(a \sin \delta + l + \sqrt{l^2 + 2la \sin \delta + a^2})}{(-a \sin \delta - l + \sqrt{l^2 + 2la \sin \delta + a^2})(a \sin \delta - l + \sqrt{l^2 - 2la \sin \delta + a^2})}$$

Заметим, что выражение, стоящее под знаком логарифма, положительно, область возможных движений – цилиндр $R \times S^1$. Фазовый портрет колебаний подобен фазовому портрету колебаний математического маятника.

В заключение рассмотрим многообразии Π (см. (3.9)). Интеграл энергии на этом многообразии вычисляется по формуле

$$\frac{m\dot{z}^2}{2} - 2fM\rho \ln \frac{z + l + \sqrt{(l+z)^2 + a^2}}{z - l + \sqrt{(l-z)^2 + a^2}} = h \quad (4.1)$$

Вычисления показывают, что фазовый портрет колебаний стержня вдоль оси Cz подобен фазовому портрету колебаний материальной точки в круговой задаче Ситникова.

Частное решение $z = 0$ отвечает абсолютному равновесию стержня, при котором он ориентирован вдоль оси Cz , а его центр масс совпадает с центром масс основных тел. Это равновесие подобно относительному равновесию стержня на круговой орбите в центральном гравитационном поле, когда стержень ориентирован по нормали к плоскости орбиты своего центра масс. Такие равновесия принято называть “поплавок” [16].

5. Описание движений на интегральном многообразии “гравитационный пропеллер”. Рассмотрим движение на сложном многообразии (3.1), (3.2), которые мы называем “гравитационный пропеллер”, если $z(t) \neq 0$. Воспользуемся асимптотическими методами исследования дифференциальных уравнений с малым параметром. В качестве

малого параметра выбираем характерную длину стержня $-l$. При $l \rightarrow 0$ масса однородного стержня стремится к нулю, поэтому уравнения его поступательно-вращательных движений являются сингулярно возмущенными по δ .

Действительно, раскладывая правую часть второго уравнения системы (3.2) в ряд Тейлора по l , получим неопределенности $0/0$ в первых трех членах разложения. Раскрывая эти неопределенности, имеем

$$l\delta'' = \frac{39a^2 \sin 2\delta (z^2 + a^2 \cos^2 \delta)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} + O(l^2) \quad (5.1)$$

Уравнение по z является регулярным по малому параметру l , несмотря на то, что l содержится в знаменателе правой части:

$$z'' = -4z \frac{z^2 + a^2 \cos^2 \delta}{\sqrt{z^2 + a^2}} + O(l^2) \quad (5.2)$$

Отбрасываем члены порядка l^2 , вводим новое время v :

$$dv = \sqrt{\frac{z^2 + a^2 \cos^2 \delta}{z^2 + a^2}} d\tau = \sqrt{\frac{fM}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2} (z^2 + a^2)}} dt$$

Имеем приближенную систему уравнений, описывающую вращательные движения стержня:

$$l \frac{d^2 \delta}{dv^2} = \frac{39a^2 \sin 2\delta}{a^2 + z^2}, \quad z = c_1 \cos 2v + c_2 \sin 2v \quad (c_1, c_2 = \text{const}) \quad (5.3)$$

Очевидно, в данном приближении по l движение центра масс тела практически не зависит от вращения тела относительно центра масс и описывается гармонической функцией v .

Уравнение (5.3) является неавтономным уравнением второго порядка с малым параметром при старшей производной, исследованным в статье [17]. Это уравнение не содержит диссипативных членов с δ' . Поэтому уравнение (5.3) не охватывается теоремой Тихонова А.Н. [18], следовательно, отсутствует предельный переход при $l \rightarrow 0$ от решения уравнения (5.3) к решению вырожденного уравнения

$$\frac{39a^2 \sin 2\delta}{a^2 + (c_1 \cos 2v + c_2 \sin 2v)^2} = 0 \quad (5.4)$$

Легко видеть, что все решения уравнения (5.4) имеют вид $\delta^* = 0, \pi, \pi/2, 3\pi/2$, отвечающий значениям угла δ на интегральных подмногообразиях, описанных выше.

Как следует из статьи [17], решение $\delta(v, l)$ уравнения (5.3) не имеет предела при $l \rightarrow 0$, а колеблется с большой частотой порядка $1/l$ и конечной амплитудой, зависящей от начальных условий, около решения δ^* вырожденного уравнения (5.4). Совокупность максимумов и минимумов возмущения $(\delta(v, l) - \delta^*)$ приближаются при $l \rightarrow 0$ к некоторым непрерывным кривым $\delta = F_1(v)$, $\delta = F_2(v)$, не зависящим от l . Эти кривые были названы опорными и получены дифференциальные уравнения, описывающие эти кривые.

Расчеты показали справедливость этих выводов. Выбирая в качестве величин l, a характерные размеры объектов в солнечной системе ($l = 10$ км, $a = 1$ а.е.), имеем безразмерное значение $l \sim 10^{-7}$. Исследовались колебания, описываемые уравнением (5.3) в окрестности интегрального многообразия $\delta^* = 0$, $\delta^{*'} = 0$ при начальных данных

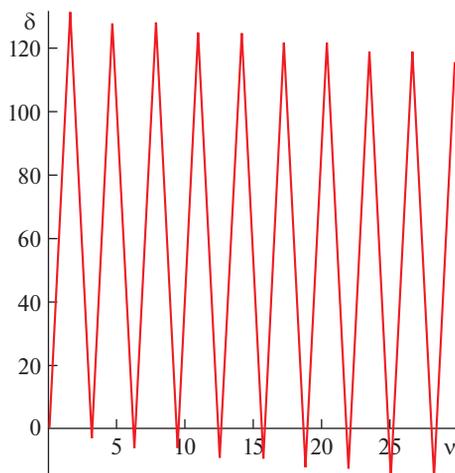


Рис. 3. Сингулярно-возмущенные колебания стержня в окрестности интегрального многообразия $\delta^* = 0$, $\delta^{*'} = 0$.

$\delta(0) = 10^{-7}$, $\delta'(0) = 0$ и параметрах $c_1 = 0$, $c_2 = 0.1$. Результаты расчетов изображены на рис. 3.

Отсюда следует, что в возмущенном движении стержень совершает в синодических осях приблизительно 21 оборот (130 рад) в одном направлении, потом 21 оборот — в противоположном и так далее, при этом величина прямого поворота со временем падает, что ведет к монотонному убыванию опорной кривой $\delta = F_1(\nu)$ проходящей через точки максимума решения $\delta(\nu, l)$.

Случай больших l не исследован.

Заключение. Исследование уравнений поступательно-вращательных движений стержня в круговой ограниченной задаче трех тел, когда основные тела имеют одинаковые массы и вращаются относительно собственного центра масс по круговым орбитам, показало, что существует семейство частных движений, когда центр масс стержня перемещается вдоль оси Cz , т.е. вдоль нормали к плоскости вращения основных тел. Сам стержень непрерывно вращается вокруг этой оси, сохраняя с ней неизменный угол $\pi/2$, при этом угловая скорость вращения стержня и скорость движения его центра масс вдоль оси Cz взаимосвязаны. В частном случае возможны вращения стержня с постоянной угловой скоростью ω_0 , совпадающей с угловой скоростью орбитального движения основных тел, но при этом стержень постоянно ориентирован вдоль прямой, параллельной отрезку, соединяющему основные тела, либо составляет с этим направлением угол, равный $\pi/2$; скорость движения его центра масс не зависит от ω_0 , но определяется текущей координатой z (в силу наличия интеграла энергии). Возможны также неравномерные вращения стержня при $z(t) = 0$ (плоские движения стержня в плоскости вращения основных тел).

Особняком стоит частный вид движений стержня, когда он ориентирован вдоль оси Cz , перемещаясь вдоль неё поступательно, либо сохраняя абсолютное равновесие при $z(t) = 0$.

Показано, что на одномерных многообразиях колебания стержня подобны колебаниям материальной точки в круговой задаче Ситникова, либо подобны колебаниям математического маятника. В то же время, колебания стержня малой длины вдоль

двумерного многообразия “интегральный пропеллер” имеют сложный сингулярно-возмущенный характер в окрестности некоторых относительных равновесий: частоты колебаний принимают большие значения при ограниченной амплитуде колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Румянцев В.В. Об устойчивости ориентаций динамически симметричного спутника в точках либрации // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 2, 3.
2. Джаникашвили Г.В. Об относительных равновесиях спутника-гиростата в ограниченной задаче трех тел // Сообщ. АН ГССР. 1976. Т. 84. № 1. С. 49.
3. Robinson W.J. The restricted problem of three bodies with rigid dumb-bell satellite // Celest. Mech. 1973. V. 8. № 2. P. 323–330.
4. Robinson W.J. Attitude stability of a rigid body placed at an equilibrium point in the problem of three bodies // Celest. Mech. 1974. V. 10. № 1. P. 17–33.
5. Guzzetti D., Howell K.C. Natural periodic orbit-attitude behaviors for rigid bodies in three-body periodic orbits // Acta Astron. 2017. V. 130. P. 97–113.
6. D. Guzzetti, Howell K.C. Coupled orbit-attitude dynamics in the three-body problem: a family of orbit-attitude periodic solutions // AIAA. 2014. 4100.
7. Pascal M. Restraint problem of three bodies applied to a rod // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1971. V. 272. № 1.
8. Ситников К.А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 303–306.
9. Corbera M., Llibre J. Periodic orbits of the Sitnikov problem via a Poincaré map // Celest. Mech. Dynam. Astronom. 2000. № 77. P. 273–303.
10. Kovács T., Érdi B. The structure of the extended phase space of the Sitnikov problem // Astron. Nachr. 2007. AN 328. № 8. P. 801–804.
11. Martínez-Alfaro J., Chiralt C. Invariant rotational curves in Sitnikov's problem // Cel. Mech. & Dyn. Astr. 1993. V. 55. P. 351–367.
12. Калас В.О., Красильников П.С. Исследование устойчивости равновесия в задаче Ситникова в нелинейной постановке // Нелин. дин. 2015. Т. 11. № 1. С. 117–126.
13. Belbruno E., Llibre J., Olle M. On the families of periodic orbits which bifurcate from the circular Sitnikov motions // Celest. Mech. & Dynam. Astronom. 1994. № 60. P. 99–129.
14. Sidorenko V.V. On the circular Sitnikov problem: the alternation of stability and instability in the family of vertical motions // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2011. V. 109. P. 367–384.
15. Маркеев А.П. О субгармонических колебаниях в близкой к круговой эллиптической задаче Ситникова // ПММ. 2020. Т. 84. № 4. С. 442–454.
16. Дубошин Г.Н. Об одном частном случае задачи о поступательно-вращательном движении двух тел // Астрон. ж. 1959. Т. 36. № 1. С. 153–163.
17. Волосов В.М. Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной // Матем. сб. 1952. Т. 30 (72). № 2. С. 245–270.
18. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. Т. 31 (73). № 3. С. 575–586.

On the Manifold “Gravitational Propeller” in the Generalized Sitnikov Circular Problem

P. S. Krasilnikov^{a, #}

^a Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

[#]e-mail: krasil06@rambler.ru

We investigate the orbit-attitude behaviors for a homogeneous light rod in the circular restricted three-body problem with two same primaries. It is shown that there exists an integral manifold such that the rod barycenter moves along the normal to the plane of the two primaries while the rod itself rotates continuously around this normal (manifold “gravitational propeller”). It is also shown this manifold includes particular different types of rod movements. The first type corresponds to a constant rod angular velocity that coincides with

the angular velocity of primaries rotations. The second type corresponds to rod uneven rotations in the plane of the two primaries. There is also a manifold of motions when the rod moves translationally along the normal being directed along it. A description of motions on these manifolds is given.

Keywords: orbit-attitude motion, rod, integral manifolds, Sitnikov problem

REFERENCES

1. *Rumyantsev V.V.* On the stability of orientation of a dynamically symmetric satellite in the libration points // *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1974, no. 2, pp. 3–8.
2. *Dzhanikashvili G.V.* Relative equilibria of a satellite gyrostat in the restricted three-body problem// *Akad. Nauk Gruz. SSR, Soobshcheniia*, 1976, vol. 84, pp. 53–56. (in Russian)
3. *Robinson W.J.* The restricted problem of three bodies with rigid dumb-bell satellite // *Celest. Mech.*, 1973, vol. 8, no. 2, pp. 323–330.
4. *Robinson W.J.* Attitude stability of a rigid body placed at an equilibrium point in the problem of three bodies// *Celest. Mech.*, 1974, vol. 10, no. 1, pp. 17–33.
5. *Guzzetti D., Howell K.C.* Natural periodic orbit-attitude behaviors for rigid bodies in three-body periodic orbits// *Acta Astron.*, 2017, vol. 130, pp. 97–113.
6. *Guzzetti D., Howell K.C.* Coupled orbit-attitude dynamics in the three-body problem: a family of orbit-attitude periodic solutions // *AIAA*, 2014, 4100.
7. *Pascal M.* Problème restreint des trois corps appliqué à un bâtonnet// *C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. A*, 1971, vol. 272, pp. 286–288.
8. *Sitnikov K.* The existence of oscillatory motions in the three-body problem// *Sov. Phys. Dokl.*, 1961, vol. 5, pp. 647–650.
9. *Corbera M., Llibre J.* Periodic orbits of the Sitnikov problem via a Poincare map // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2000, no. 77, pp. 273–303.
10. *Kovács T., Érdi B.* The structure of the extended phase space of the Sitnikov problem // *Astron. Nachr.*, 2007, AN 328, no. 8, pp. 801–804.
11. *Martinez-Alfaro J., Chiralt C.* Invariant rotational curves in Sitnikov's problem // *Cel. Mech.&Dyn. Astron.*, 1993, vol. 55, pp. 351–367.
12. *Kalas V.O., Krasilnikov P.S.* On the investigation of stability of equilibrium in Sitnikov problem in nonlinear formulation // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 117–126.
13. *Belbruno E., Llibre J., Olle M.* On the families of periodic orbits which bifurcate from the circular Sitnikov motions // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 1994, no. 60, pp. 99–129.
14. *Sidorenko V.V.* On the circular Sitnikov problem: the alternation of stability and instability in the family of vertical motions // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2011, vol. no. 109, pp. 367–384.
15. *Markeev A.P.* Subharmonic oscillations in the near-circular elliptic sitnikov problem // *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, pp. 1162–1171.
16. *Duboshin G.N.* On one particular case of the problem of the translation–al-rotational motion of two bodies // *Sov. Astron.*, 1959, vol. 3, no. 1, pp. 154–165.
17. *Volosov V.M.* Second-order nonlinear differential equations with a small parameter at the highest derivative // *Mat. Sb.*, 1952, vol. 72, no. 2, pp. 245–270.
18. *Tikhonov A.N.* Systems of differential equations containing small parameters at the derivatives // *Mat. Sb.*, 1952, vol. 73, no. 3, pp. 575–586.