

УДК 531.31

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОУСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ УПРУГОГО
ЦИЛИНДРА ПО НАКЛОННОМУ ОСНОВАНИЮ**© 2021 г. А. А. Зобова^{1,*}, И. Г. Горячева^{2,**}¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлунского, Москва, Россия

*e-mail: alexandra.zobova@math.msu.ru

**e-mail: goryache@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 01.02.2021 г.

После доработки 01.03.2021 г.

Принята к публикации 15.03.2021 г.

Рассмотрена задача о качении с проскальзыванием бесконечного упругого цилиндра по плоскому основанию из того же материала в поле силы тяжести, ось цилиндра горизонтальна. Недеформированная граница основания составляет ненулевой угол с горизонтом. На основании решения соответствующей контактной задачи в квазистатической постановке, полученного Картером, определена реакция основания в динамических уравнениях. Показано, что если тангенс угла наклона не превышает произведения коэффициента трения на коэффициент, зависящий от упругих свойств материала и распределения масс, то существует движение с постоянным относительным проскальзыванием δ и постоянным ускорением центра масс, причем в области контактного взаимодействия существует участок сцепления материалов. Установлено, что это движение асимптотически устойчиво по переменной δ . Исследована зависимость ускорения оси цилиндра от механических параметров материала и коэффициента трения. Проведено сравнение результатов с вытекающими из классической постановки задачи о движении абсолютно жесткого диска по наклонной прямой.

Ключевые слова: качение с проскальзыванием, упругий цилиндр, сухое трение, устойчивость по части переменных, наклонное основание

DOI: 10.31857/S0032823521040160

1. Введение. Абсолютно твердое тело является одной из основных моделей теоретической механики, при этом считается, что при контакте выпуклых тел взаимодействие происходит в единственной точке. Кроме того, исходя из натуральных экспериментов, в задачах часто используется предположение об отсутствии в этой точке проскальзывания. Это условие сводится к дифференциальной связи, в общем случае неголономной [1]. Изучению неголономных систем, в частности, теории общих уравнений аналитической механики, устойчивости движений, применимости вариационных принципов посвящены многие работы В.В. Румянцева (см. [2–5]).

Во втором томе классического учебника П. Аппеля по теоретической механике [6], п. 370, рассмотрена следующая задача: “Однородный круглый тяжелый диск, находящийся в вертикальной плоскости, поставлен на неподвижную прямую Ox , наклоненную к горизонту под углом φ , и предоставлен самому себе без начальной скорости. Предполагается, что имеется трение и спрашивается, будет ли диск катиться или скользить”. Взаимодействие между диском и прямой описывается следующим обра-

зом: если происходит качение (то есть скорость точки диска, находящейся в контакте с прямой, равна нулю), то касательная реакция должна быть меньше, чем произведение коэффициента трения μ на нормальную реакцию P ; если это условие не выполняется, то “качение без скольжения невозможно; диск будет скользить, одновременно вращаясь”. В этом случае касательная реакция в точности равна произведению μP . Показано, что если $\operatorname{tg} \varphi \leq 3\mu$, то диск будет катиться без проскальзывания с постоянным ускорением центра диска

$$w_d = \frac{2}{3} g \sin \varphi, \quad (1.1)$$

где g – ускорение свободного падения. Если же $\operatorname{tg} \varphi > 3\mu$, то диск катится со скольжением, ускорение оси постоянно и равно $g(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$, а скорость скольжения линейно растет с течением времени. Таким образом, эта задача в классической постановке исследована полностью. (В кн. [6] угол наклона обозначен α , нормальная реакция N , а коэффициент трения f . Здесь обозначения изменены для удобства последующего изложения.)

Указанная схема описания реакции опоры (трение покоя Кулона при качении и трение скольжения μP при движении с проскальзыванием) является общепринятой при точечном контакте в рамках теоретической механики. Именно такая модель обычно используется при анализе экспериментов в учебном процессе (см., например, [7, 8]). Однако выпуклые тела при взаимодействии деформируются, и в области контактного взаимодействия действуют контактные напряжения, направленные по нормали и касательной к поверхности, которые могут существенно изменить динамику системы.

Изучение динамики качения со скольжением жесткого диска (цилиндра) в случае деформируемой опорной прямой (плоскости) проводится в работах [9, 10]: опорная прямая представляется в виде набора одномерных вязкоупругих элементов, описываемых моделями Максвелла или Кельвина–Фойгта, при деформации которых образуется область контактного взаимодействия. В работе [9] предполагается полное сцепление материалов и изучается влияние внешних сил (сопротивления воздуха, случайных возмущений) на устойчивость стационарного движения. В [10] исследуется качение диска с проскальзыванием: изучено движение в направлении, перпендикулярном основанию (в том числе прямой и косо́й удар диска и основания); показано, что при принятых предположениях о вязкоупругих свойствах основания, динамика в направлении, параллельном основанию, совпадает с классической постановкой.

Решения квазистатических задач механики контактных взаимодействий [12, 13] позволяют расширить спектр доступных моделей взаимодействия при изучении динамики твердых тел, установить границы применимости классических моделей и уточнить решения, полученные с их помощью. В предлагаемой статье изучение качения упругого цилиндра по наклонному основанию из того же материала проводится с использованием модели Картера [12]. Целью работы является исследование существования и устойчивости движения со сцеплением материалов в области контактного взаимодействия, а также сравнение полученного решения с классическим. Представленная работа продолжает исследование [14–18].

Структура работы следующая. Разд. 2–4 посвящены постановке задачи: составлены уравнения движения цилиндра; описана модель контактного взаимодействия упругих тел в условиях качения с проскальзыванием, предложенная Картером; введены безразмерные переменные задачи. В разд. 5 сформулирован основной результат работы о существовании и устойчивости стационарного решения динамических уравнений, которое соответствует движению оси цилиндра с постоянным ускорением, при этом в области контактного взаимодействия происходит частичное сцепление материалов. В разд. 6 проводится анализ полученного решения.

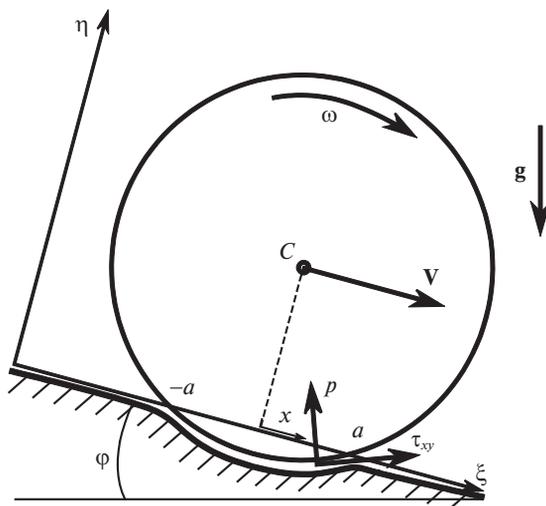


Рис. 1. Схема движения.

2. Динамические уравнения. Бесконечный упругий цилиндр с массой m на единицу длины и радиусом R движется плоскопараллельно по основанию из того же материала, недеформированная граница которого составляет угол φ с горизонтом. Введем инерциальную систему отсчета $O\xi\eta\zeta$, плоскость $O\xi\zeta$ является недеформированной границей основания, ось $O\eta$ направлена перпендикулярно ему, ось $O\xi$ перпендикулярна плоскости движения и сонаправлена с осью цилиндра. Распределение масс в цилиндре предполагается осесимметричным, так что центр масс каждого сечения цилиндра C лежит на его оси. Скорость оси цилиндра обозначим $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_\xi$, а угловую скорость обозначим $\boldsymbol{\omega} = -\omega\mathbf{e}_\zeta$. Положительное значение ω соответствует вращению по часовой стрелке, если смотреть с конца оси $O\xi$ (рис. 1).

Запишем динамические уравнения движения цилиндра:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + Q\mathbf{e}_\xi + P\mathbf{e}_\eta, \quad \frac{d\mathbf{K}_C}{dt} = \mathbf{M}_C \quad (2.1)$$

где \mathbf{a} – ускорение оси цилиндра, $\mathbf{K}_C = -J\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}_\zeta$ – кинетический момент относительно центра масс, J – удельный момент инерции относительно оси цилиндра, \mathbf{g} – ускорение свободного падения, Q и P – проекции равнодействующей сил взаимодействия цилиндра и основания на оси $O\xi$ и $O\eta$ соответственно, $\mathbf{M}_C = -M_C\mathbf{e}_\zeta$ – момент этих сил относительно оси цилиндра.

В скалярной форме уравнения движения (2.1) имеют вид:

$$ma_\eta = P - mg \cos \varphi, \quad m\dot{V} = Q + mg \sin \varphi, \quad J\dot{\omega} = M_C \quad (2.2)$$

Будем считать, что проекция ускорения оси цилиндра на нормаль к основанию пренебрежимо мала (движение квазистатическое), откуда получим

$$P = mg \cos \varphi$$

Таким образом, прижимающая сила P обеспечивается силой тяжести и определяет угол наклона основания к горизонту φ .

Далее будем исследовать свойства некоторых решений задачи Коши для уравнений (2.2), при этом касательную силу Q и момент M_C будем определять из решения задачи теории упругости в квазистатической постановке, полученного Картером [12, 13].

Такой подход был применен при решении динамической задачи о движении цилиндра по горизонтальному основанию в [15]. Напомним далее постановку и основные результаты решения задачи Картера.

3. Определение сил и момента из решения задачи Картера. Модель Картера описывает взаимодействие упругого цилиндра с основанием из того же материала. Вследствие одинаковости механических характеристик контактирующих тел область контактного взаимодействия цилиндра и основания – это полоса $x \in [-a, a]$, где x отсчитывается от проекции оси цилиндра на опорное полупространство (рис. 1). Ширина этой полосы определяется прижимающей силой P , радиусом цилиндра R , а также модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν материалов цилиндра и основания:

$$a = \sqrt{\frac{8RP}{E'}}, \quad E' = \frac{\pi E}{1 - \nu^2}$$

Контактная область либо полностью состоит из области проскальзывания материалов цилиндра и основания (в этом случае касательные напряжения в каждой точке $\tau_{xy}(x)$ пропорциональны нормальным напряжениям $p(x)$, т.е. $\tau_{xy}(x) = \mu p(x)$, где μ – коэффициент трения), либо делится на участок проскальзывания и участок сцепления материалов (при сцеплении $|\tau_{xy}(x)| < \mu p(x)$). Участок сцепления материалов в области контактного взаимодействия возникает, если

$$\delta = \frac{\omega R - V}{V} \tag{3.1}$$

по абсолютной величине не превышает некоторой постоянной величины, определяемой механическими характеристиками материала, коэффициентом трения, а также радиусом цилиндра и величиной прижимающей силы:

$$|\delta| < \frac{\mu}{2\kappa}; \quad \kappa = \frac{R}{2a} = \frac{\sqrt{E'R}}{\sqrt{32P}} \tag{3.2}$$

Параметр $\kappa \gg 1$ – безразмерный, его механический смысл – отношение радиуса цилиндра к ширине области контактного взаимодействия.

Результирующая касательных напряжений τ_{xy} имеет вид [12]

$$Q = \begin{cases} \mu P \operatorname{sign} V \frac{2\kappa\delta}{\mu} \left(2 - \frac{2\kappa|\delta|}{\mu} \right), & |\delta| < \frac{\mu}{2\kappa} \\ \mu P \operatorname{sign}(\omega R - V), & |\delta| \geq \frac{\mu}{2\kappa} \end{cases} \tag{3.3}$$

Распределение нормальных напряжений $p(x)$ симметрично: $p(x) = p(-x)$, поэтому момент сил взаимодействия относительно оси цилиндра определяется только касательными напряжениями и равен

$$M_C = RQ$$

Таким образом, из (2.2) получим

$$m\dot{V} = Q + mg \sin \varphi, \quad J\dot{\omega} = -RQ \tag{3.4}$$

4. Анализ уравнений движения. Введем безразмерные переменные

$$\tilde{t} = t\sqrt{\frac{P}{mR}} = t\sqrt{\frac{g \cos \varphi}{R}}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{\sqrt{gR \cos \varphi}}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega\sqrt{R}}{\sqrt{g \cos \varphi}}$$

Кроме того, обозначим

$$j = \frac{J}{mR^2} \tag{4.1}$$

безразмерный момент инерции на единицу длины. Тогда уравнения движения (3.4) принимают вид

$$\tilde{V}' = \tilde{Q} + \operatorname{tg} \varphi, \quad j\tilde{\omega}' = -\tilde{Q} \quad (4.2)$$

где штрихом обозначена производная по безразмерному времени \tilde{t} , а $\tilde{Q} = Q/P$ – безразмерная результирующая касательных напряжений (см. (3.3)), которая задается соотношениями

$$\tilde{Q}(\delta, \operatorname{sign} \tilde{V}) = \begin{cases} \mu \operatorname{sign} \tilde{V} \frac{2\kappa\delta}{\mu} \left(2 - \frac{2\kappa|\delta|}{\mu} \right), & |\delta| < \frac{\mu}{2\kappa} \\ \mu \operatorname{sign}(\tilde{\omega} - \tilde{V}), & |\delta| \geq \frac{\mu}{2\kappa} \end{cases} \quad (4.3)$$

График этой функции при положительных значениях \tilde{V} показан синей сплошной линией на рис. 2 при $\mu = 0.4$, $\kappa = 2.9$; область $|\delta| < \mu/(2\kappa)$ показана на врезке справа.

Заметим, что при $|\delta| > \mu/(2\kappa)$ уравнения движения полностью совпадают с уравнениями движения классической задачи о движении с проскальзыванием твердого диска. Действительно, в этом случае сила трения \tilde{Q} постоянна (в размерном виде равна μP) и направлена противоположно скорости проскальзывания $(V - \omega R)\mathbf{e}_\xi$. Поэтому в указанной выше области фазового пространства $(\tilde{V}, \tilde{\omega})$ движение цилиндра происходит так же, как и в классической задаче.

Интерес представляет область фазового пространства, задаваемая неравенством $|\delta| \leq \mu/(2\kappa)$, в которой величина силы трения в соответствии с формулой (3.3) по модулю уменьшается при убывании $|\delta|$. Поэтому далее рассмотрим именно эту область фазового пространства.

5. Движение с постоянным относительным проскальзыванием. Докажем следующее утверждение.

Теорема. При углах наклона

$$\operatorname{tg} \varphi \leq \frac{\mu}{j} \left(j + \frac{1}{1 - \mu/(2\kappa)} \right) \quad (5.1)$$

основания к горизонту динамические уравнения (4.2) имеют решение, при котором ось цилиндра движется вдоль оси $O\xi$ с постоянным линейным ускорением $w^* > 0$, при этом относительное проскальзывание также постоянно, то есть

$$\tilde{V}(\tau) = w^*\tau + \tilde{V}_0, \quad \tilde{\omega}(\tau) = \frac{\operatorname{tg} \varphi - w^*}{j} \tau + \tilde{\omega}_0, \quad \delta \equiv \delta^* \quad (5.2)$$

Это решение асимптотически устойчиво по отношению к переменной δ .

Доказательство. Пользуясь определением относительного проскальзывания (3.1), составим дифференциальное уравнение, описывающее его изменение на решениях системы (4.2):

$$\delta' = -\frac{(1 + j^{-1})\tilde{Q} + \operatorname{tg} \varphi}{\tilde{V}} - \frac{\tilde{Q} + \operatorname{tg} \varphi}{\tilde{V}} \delta$$

Найдем стационарное решение этого уравнения вида $\delta(\tau) \equiv \delta^*$. После подстановки получим уравнение

$$\tilde{Q}(\delta^*) = \Phi(\delta^*); \quad \Phi(\delta) = -\operatorname{tg} \varphi \frac{j(\delta + 1)}{j(\delta + 1) + 1} \quad (5.3)$$

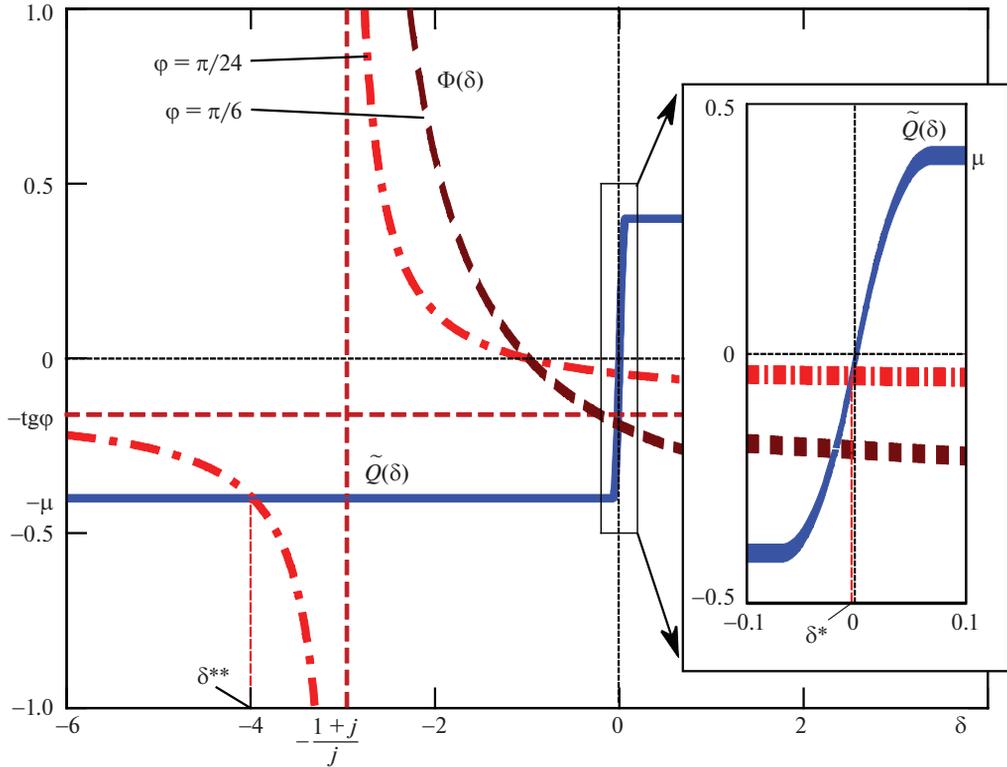


Рис. 2. Зависимость силы трения \tilde{Q} от относительного проскальзывания δ (синяя сплошная линия) и функция $\Phi(\delta)$ (см. (5.3)) при разных значениях угла наклона φ (красная штрих-пунктирная и коричневая пунктирная кривые).

Функция $\Phi(\delta)$ зависит от угла наклона основания φ и параметра j (см. (4.1)). На рис. 2 показаны графики этой функции при $\varphi = \pi/24; \pi/6, j = 0.5$, пунктирными линиями даны асимптоты.

Будем искать решения уравнения (5.3) на отрезке $|\delta| \leq \mu/(2\kappa)$, то есть когда происходит частичное сцепление материалов. Такое решение существует при

$$\Phi\left(-\frac{\mu}{2\kappa}\right) \geq -\mu,$$

причем оно единственно и отрицательно: $\delta^* \in [-\mu/(2\kappa), 0)$. Полученное выше неравенство приводится к виду (5.1), указанному в формулировке теоремы.

Если начальная скорость оси цилиндра $\tilde{V}_0 > 0$ и угловая скорость $\tilde{\omega}_0$ соответствуют найденному решению

$$\delta^* = \frac{\tilde{\omega}_0 - \tilde{V}_0}{\tilde{V}_0},$$

то уравнения (4.2) имеют решение (5.2), причем ускорение w^* оси цилиндра постоянно и согласно уравнениям (4.2), (5.3) имеет вид:

$$w^* = \tilde{Q}(\delta^*) + \text{tg } \varphi = \frac{\text{tg } \varphi}{j(\delta^* + 1) + 1} > 0 \tag{5.4}$$

Угловое ускорение на этом движении также постоянно и может быть вычислено из второго уравнения (4.2).

Устойчивость решения по переменной δ следует из теоремы об устойчивости по части переменных (теорема 5.1, [19]), если в качестве функции Ляпунова взять функцию $(\delta - \delta^*)^2/2$. Доказательство асимптотической устойчивости и оценка асимптотики приведены в Приложении.

Замечание. При $\operatorname{tg} \varphi < \mu$ существует еще одно решение уравнения (5.3), которое соответствует движению цилиндра с полным проскальзыванием $\delta^{**} < -(1+j)/j$ (см. рис. 2). Фазовые переменные зависят от времени следующим образом:

$$\tilde{V}(\tau) = \tilde{V}_0 + (-\mu + \operatorname{tg} \varphi) \tau, \quad \tilde{\omega}(\tau) = \frac{\mu}{j} \tau + \tilde{\omega}_0; \quad \delta^{**} = \frac{\tilde{\omega}_0 - \tilde{V}_0}{\tilde{V}_0}$$

Движение оканчивается за конечное время $\tau^{**} = \tilde{V}_0/(\mu - \operatorname{tg} \varphi)$: в этот момент оказываются равны нулю как линейная, так и угловая скорость цилиндра. Так как при $\varphi \neq 0$ условия равновесия цилиндра на наклонном основании не выполняются, то при $\tau \geq \tau^{**}$ начинается движение с малым относительным проскальзыванием, причем относительное проскальзывание δ стремится к значению δ^* вследствие асимптотической устойчивости решения (5.2) по переменной δ . При $\varphi = 0$ после остановки цилиндра в момент τ^{**} движение прекращается [15].

Графики решений уравнения (5.3) $\delta^*(\mu)$ при $\varphi = \pi/24$ и $\kappa = 2.9$, $\kappa = 6$ (сплошные линии) и границы $\delta = -\mu/(2\kappa)$ существования области сцепления материалов (пунктирные линии) показаны на рис. 3 (численные значения остальных параметров указаны выше). Для фиксированного значения φ решение (5.2) существует для всех $\mu > \mu_0$, где μ_0 можно найти из неравенства (5.1). Анализ зависимости (4.3) показывает, что функция $\delta^*(\mu)$ с ростом μ асимптотически приближается к значению $-j \operatorname{tg} \varphi/[4(1+j)\kappa]$.

6. Свойства полученного решения. Проведенное выше исследование показывает, что в случае выполнения (5.1) при движении упругого цилиндра по основанию из того же материала существует асимптотически устойчивое по величине относительного проскальзывания решение, на котором ускорение оси цилиндра постоянно и положительно, а в зоне контактного взаимодействия существует участок сцепления материалов. При этом ускорение оси на величину порядка малой величины μ/κ больше, чем ускорение w_d (см. (1.1)) в классической постановке. Действительно, возвращаясь к размерным переменным и считая цилиндр однородным $j = 1/2$, получим:

$$w_{el} = g \cos \varphi w^* = \frac{2g \sin \varphi}{\delta^* + 3} > w_d, \quad \text{т.к.} \quad -\frac{\mu}{2\kappa} < \delta^* < 0$$

Условие существования такого движения – выполнение неравенства (5.1) – чуть шире классического условия $\operatorname{tg} \varphi < 3\mu$ (также на малую величину порядка μ/κ). Кроме того, решение (5.2) является асимптотически устойчивым по переменной δ . Важным отличием полученного здесь решения с постоянным относительным проскальзыванием от классического решения является тот факт, что абсолютное значение проскальзывания, то есть величина $V - \omega R$ в рассматриваемой задаче является линейной функцией времени: из определения (3.1) следует, что

$$V - \omega R = V\delta^* = (w_{el}t + V_0)\delta^*,$$

а в классической задаче $V - \omega R \equiv 0$.

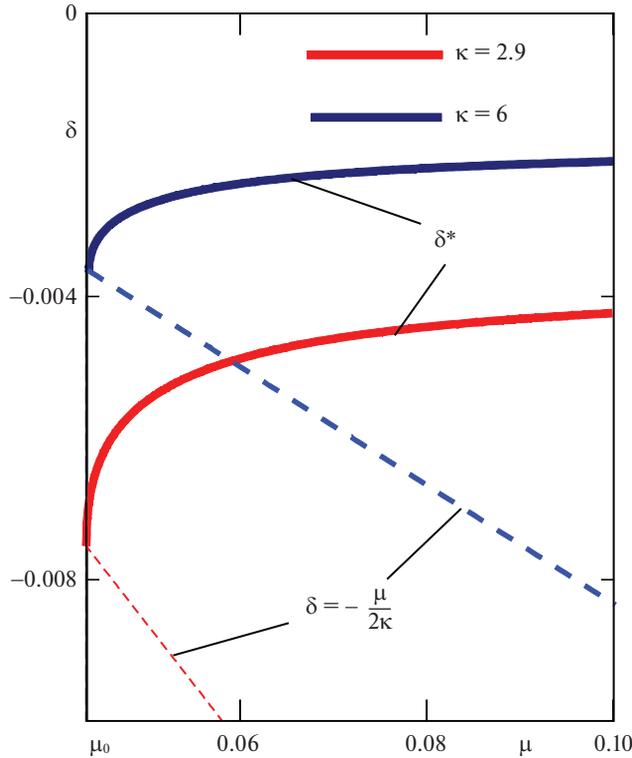


Рис. 3. Зависимость стационарного значения относительного проскальзывания от коэффициента трения μ и параметра κ (3.2)

На рис. 4 построены изолинии относительного отклонения ускорения оси однородного ($j = 1/2$) упругого цилиндра w_{el} от ускорения, рассчитанного в классической задаче w_d при пренебрежении упругостью контактирующих тел (в процентах)

$$e_w = \frac{w_{el} - w_d}{w_d} \times 100\% \tag{6.1}$$

при фиксированном значении угла наклона $\varphi = \pi/4$. Результаты расчетов показывают, что отклонение e_w довольно мало (порядка 1%), оно увеличивается при уменьшении коэффициента трения μ и параметра κ . Использованный на рис. 4 диапазон изменения параметра $\kappa \in [2.9, 7]$ соответствует диапазону модуля Юнга $E \in [1.9 \times 10^5 \text{ Па}, 1.1 \times 10^6 \text{ Па}]$ при следующих размерных параметрах (плотность соответствует плотности резины)

$$R = 10 \text{ см}, \quad m = 35.5 \text{ кг/м}, \quad \nu = 0.3$$

Поскольку параметр κ (см. (3.2)) пропорционален \sqrt{ER} , то найденные отличия в ускорении оси цилиндра будут более существенны для цилиндров малых радиусов и малых модулей Юнга E материала. Расчеты также показывают, что при увеличении угла наклона основания к горизонту φ при фиксированных κ и μ величина e_w увеличивается.

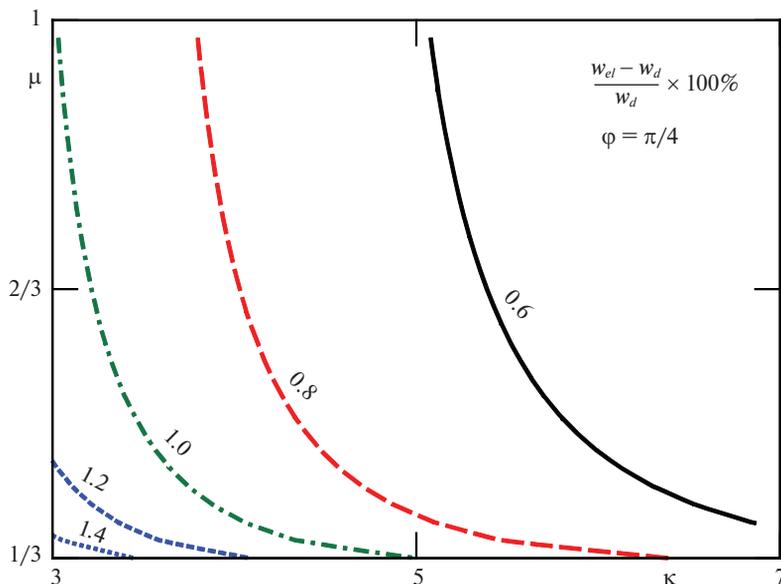


Рис. 4. Изолинии e_w (6.1) при варьировании коэффициента трения μ и параметра κ (3.2), угол наклона $\varphi = \pi/4$.

Заключение. В работе исследована задача о движении под действием силы тяжести упругого цилиндра по наклонному основанию из того же материала. Найдено асимптотически устойчивое (по части переменных) решение задачи Коши для динамических уравнений: оно соответствует качению цилиндра с постоянным ускорением его оси, при этом в части области контактного взаимодействия происходит сцепление материалов. Проведено сравнение параметров этого движения с решением классической задачи о качении без проскальзывания абсолютно твердого диска по недеформированной прямой. Показано, что ускорение оси упругого цилиндра увеличивается при уменьшении коэффициента трения, радиуса цилиндра и параметра, зависящего от механических характеристик контактирующих материалов (их модуля Юнга и коэффициента Пуассона), а также при увеличении угла наклона основания к горизонту. Полученные результаты позволяют оценить погрешности в определении ускорения оси цилиндра и углового ускорения, возникающие при использовании в этой задаче модели абсолютно твердого тела. Установлено, что указанные погрешности в достаточно широком диапазоне изменения механических характеристик материалов и коэффициента трения оказываются невелики; однако абсолютное значение проскальзывания при учете упругости материала растет линейно с течением времени, что существенно отличается от свойства решения в классической постановке, в которой оно принимается тождественно равным нулю. Этот факт представляется важным с теоретической точки зрения.

Часть работы, посвященная анализу решения контактной задачи, выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4); исследование стационарного решения и его устойчивости по части переменных – в рамках проекта Российского фонда фундаментальных исследований 19-01-00140-а.

Приложение

Устойчивость равноускоренного движения. Будем исследовать устойчивость решения (5.2) по переменной δ [19]. Введем переменные:

$$x = \delta - \delta^*, \quad y = \tilde{V}$$

Тогда уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$x' = \frac{G(x, \text{sign}(y))}{y}, \quad y' = F(x, \text{sign}(y)),$$

где $F(x, \text{sign}(y)) = \tilde{Q}(x + \delta^*, \text{sign}(y)) + \text{tg } \varphi$,

$$G(x, \text{sign}(y)) = -(1 + j^{-1})\tilde{Q}(x + \delta^*, \text{sign}(y)) - \text{tg } \varphi - \\ - (\tilde{Q}(x + \delta^*, \text{sign}(y)) + \text{tg } \varphi)(x + \delta^*)$$

Так как для близких к невозмущенному движению $\tilde{V}(0) > 0, y' > 0$, то имеем $y(\tau) > 0$ для всех $\tau > 0$. Следовательно,

$$y' = F(x, 1) > 0, \quad x' = \frac{G(x, 1)}{y}, \quad G(0, 1) = 0, \quad F(0, 1) = w(\delta^*) \quad (\text{П.1})$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\bar{x}' = \frac{G(\bar{x}, 1)}{F(0, 1)\tau + y_0} \quad (\text{П.2})$$

Это уравнение имеет решение $\bar{x} = 0$. Запишем в окрестности этого решения

$$G(\bar{x}, 1) = k_1\bar{x} + O(\bar{x}^2), \quad k_1 = \frac{\partial G}{\partial \bar{x}}(0, 1)$$

Докажем, что коэффициент $k_1 < 0$. Действительно,

$$k_1 = \frac{\partial G}{\partial x}(0, 1) = -(1 + j^{-1} + \delta^*)\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \delta}(\delta^*, 1) - w(\delta^*)$$

Заметим, что так как $-\mu/(2\kappa) < \delta^* < 0$, то из (4.3) получаем

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \delta}(\delta^*, 1) = 4\kappa \left(1 + \frac{2\kappa\delta^*}{\mu}\right) > 0$$

Кроме того, $w(\delta^*) > 0$, следовательно, $k_1 < 0$.

Отбрасыванием членов порядка $O(\bar{x}^2)$ из (8.2) получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\bar{x}' = \frac{k_1\bar{x}}{k_2\tau + y_0}, \quad k_1 < 0, \quad k_2 = w(\delta^*) > 0$$

Тогда получим:

$$\ln(\bar{x}) - \ln(\bar{x}_0) = \frac{k_1}{k_2}(\ln(\tau + y_0/k_2) - \ln y_0/k_2),$$

откуда

$$\bar{x} = \bar{x}_0 \left(\frac{k_2\tau + y_0}{y_0} \right)^{k_1/k_2}$$

Показатель степени отрицательный, следовательно, функция \bar{x} , определенная вспомогательным уравнением (П.2), убывает как степенная функция времени. Поскольку по вспомогательному уравнению можно построить мажорирующие уравне-

ния для исходной системы (П.1), то решение (5.2) исходной системы по переменной δ асимптотически устойчиво.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 520 с.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения неголономных систем // ПММ. 1967. Т. 31. № 2. С. 260–271.
3. *Румянцев В.В.* О принципе Гамильтона для неголономных систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 387–399.
4. *Румянцев В.В.* О принципах Лагранжа и Якоби для неголономных систем // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 583–590.
5. *Румянцев В.В.* Об общих уравнениях динамики // В сб. Нелин. мех. М.: Физматлит, 2001. С. 4–38.
6. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. Динамика системы. Аналитическая механика. М.: Физ.-мат. лит., 1960. 487 с.
7. *De Ambrosis A., Malgieri M., Mascheretti P., Onorato P.* Investigating the role of sliding friction in rolling motion: a teaching sequence based on experiments and simulations // *Eur. J. Phys.* 2015. V. 36. № 3. PaperNumber 035020.
8. *Suárez Á., Vaccino D., Martí A.C.* Video-based analysis of the transition from slipping to rolling // *The Physics Teacher.* 2020. V. 58. № 3. P. 170–172.
9. *Pöchel T., Brilliantov N., Zaikin A.* Bistability and noise-enhanced velocity of rolling motion // *Europhys. Lett.* 2005. V. 69. № 3. P. 371–377.
10. *Кулешов А.С., Трещев Д.В., Иванова Т.Б., Наймушина О.С.* Твердый цилиндр на вязкоупругой плоскости // Нелин. дин. 2011. Т. 7. № 3. С. 601–625.
11. *Ai J., Chen J.-F., Rotter J.M., Ooi J.Y.* Assessment of rolling resistance models in discrete element simulations // *Powder Technol.* 2011. V. 206. № 3. P. 269–282.
12. *Carter F.W.* On the action of a locomotive driving wheel // *Proc. Roy. Soc. London A.* 1926. V. 112. P. 151–157.
13. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
14. *Горячева И.Г., Зобова А.А.* Динамическая задача о качении с проскальзыванием упругого цилиндра по упругому основанию // Докл. РАН. 2018. Т. 481. № 1. С. 24–26.
15. *Горячева И.Г., Зобова А.А.* Динамика движения упругого цилиндра по упругому основанию // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 39–46.
16. *Горячева И.Г., Зобова А.А.* Торможение жесткого цилиндра, скользящего по вязкоупругому основанию // ПММ. 2019. Т. 83. № 2. С. 215–227.
17. *Zobova A.A., Goryacheva I.G.* Dynamics of a viscoelastic cylinder on a viscoelastic half-space // *Acta Mech.* 2020. V. 231. № 6. P. 2217–2230.
18. *Zobova A.A., Goryacheva I.G.* Effect of contacting bodies' mechanical properties on the dynamics of a rolling cylinder // *Acta Mech.* 2021. <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02800-w>
19. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 256 с.

Stability of the Accelerated Motion of Elastic Cylinder along Inclined Foundation

A. A. Zobova^{a,#} and I. G. Goryacheva^{b,##}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: alexandra.zobova@math.msu.ru*

^{##} *e-mail: goryache@ipmnet.ru*

We consider an infinite elastic cylinder that rolls with slipping along a half-space made of the same material in the gravity field (the cylinder's axis is horizontal). The foundation's undeformed boundary makes a non-zero angle with the horizon. The foundation reaction in dynamic equations satisfies the solution of the Carter contact problem in the quasi-static for-

mulation. If the inclination angle's tangent does not exceed the product of the friction coefficient by the coefficient depending on the elastic properties of the material and the distribution of masses, then there exists the motion with constant relative slip δ and constant acceleration of the center of mass; in the contact area, there is a region of the materials' sticking. This motion is asymptotically stable with respect to the variable δ . The dependence of the cylinder axis's acceleration on the mechanical parameters of the material and the coefficient of friction is investigated. The results are discussed in the scope of the classical problem on a rigid disk motion along an inclined straight line.

Keywords: rolling with slipping, elastic cylinder, dry friction, partial stability, inclined foundation

REFERENCES

1. *Nejmark J.I., Fufaev N.A.* Dynamics of Nonholonomic Systems. Vol. 33 Transl. Math. Monogr. Amer. Math. Soc., 2004. 518 p.
2. *Rumiantsev V.V.* On stability of motion of nonholonomic systems // JAMM, 1967, vol. 31, no. 2, pp. 282–293.
3. *Rumiantsev V.V.* On Hamilton's principle for nonholonomic systems // JAMM, 1978, vol. 42, no. 3, pp. 407–419.
4. *Rumiantsev V.V.* On the Lagrange and Jacobi principles for nonholonomic systems // JAMM, 1979, vol. 43, no 4, pp. 625–632.
5. *Rumiantsev V.V.* On general equations of motions (Ob obshchih uravneniyah dinamiki) // in: Non-linear Dynamics. Moscow: Fizmatlit, 2001. pp. 4–38. (in Russian).
6. *Appell P.* Traité de Mécanique rationnelle, Tome Deuxième: Dynamique des Systèmes Mécanique Analytique. Paris: Gauthier-Villars, 1953. (in French)
7. *De Ambrosis A., Malgieri M., Mascheretti P., Onorato P.* Investigating the role of sliding friction in rolling motion: a teaching sequence based on experiments and simulations // Europ. J. Phys., 2015, vol. 36, no. 3, Paper Number 035020.
8. *Suárez Á., Baccino D., Martí A.C.* Video-based analysis of the transition from slipping to rolling // The Physics Teacher, 2020, vol. 58, no. 3, pp. 170–172.
9. *Pöchel T., Brilliantov N., Zaikin A.* Bistability and noise-enhanced velocity of rolling motion // Europhys. Lett., 2005, vol. 69, no. 3, pp. 371–377.
10. *Kuleshov A.S., Treschev D.V., Ivanova T.B., Naimushina O.S.* A rigid cylinder on a viscoelastic plane // Nelin. Dinam., 2011, vol. 7, no. 3, pp. 601–625. (in Russian)
11. *Ai J., Chen J.-F., Rotter J.M., Ooi J.Y.* Assessment of rolling resistance models in discrete element simulations // Powder Technol., 2011, vol. 206, no. 3, pp. 269–282.
12. *Carter F.W.* On the action of a locomotive driving wheel // Proc. Roy. Soc. London A, 1926, vol. 112, pp. 151–157.
13. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Kluwer, 1998. 344 p.
14. *Goryacheva I.G., Zobova A.A.* Dynamics of rolling with a microslip for an elastic cylinder on an elastic half-space // Dokl. Phys., 2018, vol. 63, no. 7, pp. 263–265.
15. *Goryacheva I.G., Zobova A.A.* Dynamics of the motion of an elastic cylinder along an elastic foundation // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 271–277.
16. *Goryacheva I.G., Zobova A.A.* Deceleration of a rigid cylinder sliding along a viscoelastic foundation // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 278–288.
17. *Zobova A.A., Goryacheva I.G.* Dynamics of a viscoelastic cylinder on a viscoelastic half-space // Acta Mech., 2020, vol. 231, no. 6, pp. 2217–2230.
18. *Zobova A.A., Goryacheva I.G.* Effect of contacting bodies' mechanical properties on the dynamics of a rolling cylinder // Acta Mech., 2021, <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02800-w>
19. *Rumiantsev V.V., Oziraner A.S.* Stability and Stabilization of Motion with Respect to Part of the Variables. (Ustoichivost i stabilizatsiya dvizheniya po otnosheniju k chasti peremennyh) Moscow: Nauka. 1987. 256 p. (in Russian)